

---

# Méthode de Lanczos par bloc appliquée aux problèmes de vibration des structures amorties

Duc-Minh Tran

Office national d'études et de recherches aérospatiales  
(ONERA)  
BP 72  
92322 Châtillon cedex

---

*RÉSUMÉ. La méthode de Lanczos par bloc de recherche des valeurs propres et vecteurs propres ainsi que son application au calcul des fréquences et modes complexes des structures amorties sont présentées. L'équation du mouvement de la structure est transformée en un système aux valeurs propres généralités  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$  dans lequel  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des matrices symétriques et non définies positives. La méthode de Lanczos par bloc permet de générer une séquence de blocs de vecteurs orthonormés et d'obtenir, par une projection sur ces vecteurs, un système aux valeurs propres de taille réduite  $\mathbf{Tz} = \lambda\mathbf{z}$ , où  $\mathbf{T}$  est une matrice tridiagonale par blocs et non symétrique dont les valeurs propres sont des approximations de celles recherchées. Cette méthode permet d'extraire les fréquences multiples avec toutes leurs multiplicités et, pour les structures non amorties, de calculer les fréquences autour d'une valeur fixée.*

*ABSTRACT. The block Lanczos method for finding eigenvalues and eigenvectors and its application to the computation of the complex frequencies and modes of damped structures are presented. The equation of motion of the structure is transformed into a generalized eigenvalue system  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{Bx}$  in which  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{B}$  are symmetric and non positive definite matrices. The block Lanczos method generates a sequence of blocks of orthonormalized vectors and, by a projection on these vectors, we obtain a reduced eigensystem  $\mathbf{Tz} = \lambda\mathbf{z}$  where  $\mathbf{T}$  is an unsymmetric block-tridiagonal matrix whose eigenvalues are approximations of those of the initial system. This method provides extraction of multiple frequencies with their multiplicities and, for undamped structures, computation of the frequencies around a given value.*

*MOTS-CLÉS : méthode de Lanczos, fréquences et modes propres, structures amorties.*

*KEY WORDS : Lanczos method, eigen frequencies and modes, damped structures.*

---

## 1. Introduction

La méthode de Lanczos classique à un vecteur [LAN 50] consiste initialement à générer de façon itérative des vecteurs orthogonaux et à transformer une matrice  $A$  symétrique en une matrice tridiagonale symétrique de même dimension et ayant les mêmes valeurs propres que  $A$ . Cette méthode a été dans un premier temps délaissée au profit des méthodes de Givens et de Householder à cause de la dégradation de l'orthogonalité entre les vecteurs de Lanczos au cours des itérations. Les travaux de Paige [PAI 71, PAI 72] ont cependant montré qu'une tridiagonalisation partielle de  $A$  avec les quelques premiers vecteurs de Lanczos conduit à une matrice tridiagonale symétrique de taille réduite dont les valeurs propres convergent rapidement vers les plus grandes valeurs propres de  $A$ .

La méthode de Lanczos classique à un vecteur a été utilisée par plusieurs auteurs [NEW 73, CHO 76, NOU 83, WEI 83, CHA 86] pour calculer les premières fréquences et modes propres de structures non amorties, ce qui revient, moyennant une décomposition de Cholesky de la matrice de rigidité après un éventuel décalage, à déterminer les plus grandes valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique. La version par bloc de la méthode de Lanczos classique a été développée pour calculer les fréquences multiples [GOL 77, RUH 79].

La méthode de Lanczos a été étendue aux systèmes aux valeurs propres généralisés :

$$A x = \lambda B x \quad [1]$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices symétriques avec  $B$  positive. Dans cette méthode de Lanczos généralisée, présentée dans les versions à un vecteur [OJA 70, NOU 84, MAT 85] et par bloc [NOU 85, MAT 85], le produit scalaire canonique est remplacé par le produit scalaire associé à  $B$ . Carnoy et Gérardin [CAR 82] et Chen et Taylor [CHE 88] ont présenté une version à un vecteur qui s'applique au système [1] avec  $B$  non positive, ce qui conduit à une matrice tridiagonale non symétrique avec des valeurs propres complexes. Notons que la méthode de Lanczos a été également appliquée aux matrices anti-symétriques [BAU 86] ou non symétriques [GER 79, CHA 88] et au calcul de la réponse [NOU 84, CRA 88, CHE 89].

Dans cet article, on propose une méthode de Lanczos par bloc pour résoudre le système aux valeurs propres généralisé [1] où  $A$  et  $B$  sont symétriques mais pas nécessairement définies positives. Cette méthode est appliquée au calcul des fréquences et modes complexes des structures amorties dont les matrices de rigidité, de masse et d'amortissement sont symétriques. Elle permet notamment d'extraire des fréquences multiples avec toutes leurs multiplicités, ce qui n'est pas toujours le cas de la méthode de Lanczos à un vecteur. Elle s'applique également aux structures non amorties et en particulier pour calculer les fréquences autour d'une valeur fixée.

Après un rappel sur la méthode de Lanczos classique à un vecteur, on présente la méthode de Lanczos généralisée dans les deux versions, à un vecteur et par bloc. Des résultats obtenus sur quelques applications sont également présentés.

## 2. Méthode de Lanczos classique à un vecteur

On considère le système aux valeurs propres associé au mouvement libre d'une structure non amortie :

$$\mathbf{K} \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x} = 0 \quad [2]$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité,  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont symétriques et positives.

On introduit le décalage  $\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ , et le facteur d'échelle  $s$ ,  $s > 0$ , en posant :

$$\lambda = \frac{s}{\omega^2 + \alpha}. \quad [3]$$

Le système [2] devient :

$$\mathbf{K}' \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{M}' \mathbf{x} \quad [4]$$

avec

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{M} \quad [5]$$

et

$$\mathbf{M}' = s \mathbf{M}. \quad [6]$$

Le décalage  $\alpha$  est choisi de façon que la matrice  $\mathbf{K}'$  soit définie positive ( $\alpha = 0$  si  $\mathbf{K}$  est inversible). Le décalage doit être assez grand pour éviter le mauvais conditionnement de  $\mathbf{K}'$  et, en même temps, aussi petit que possible afin de ne pas pénaliser la convergence et de pouvoir restituer correctement les modes rigides.

Le facteur d'échelle  $s$  a pour but d'équilibrer les ordres de grandeur des termes de  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{M}'$ . On prend d'habitude :

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n |k'_{ii}|}{\sum_{i=1}^n |m_{ii}|} \quad [7]$$

où  $k'_{ii}$  et  $m_{ii}$  sont les termes diagonaux de  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{M}$ ,  $n$  est la dimension de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ .

On effectue la décomposition de Cholesky de  $\mathbf{K}'$  :

$$\mathbf{K}' = \mathbf{L} {}^t \mathbf{L}. \quad [8]$$

En introduisant dans [4] le changement de variable :

$$\mathbf{y} = {}^t \mathbf{L} \mathbf{x}, \quad [9]$$

on obtient le système aux valeurs propres :

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad [10]$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}' {}^t \mathbf{L}^{-1}. \quad [11]$$

La matrice  $\mathbf{A}$  étant symétrique, l'algorithme de Lanczos classique permet de générer  $m$  vecteurs de Lanczos  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  qui sont orthonormés. Soit  $\mathbf{Q}$  la matrice orthogonale formée par  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  :

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m]. \tag{12}$$

En introduisant dans [10] la transformation :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{z} \tag{13}$$

et en prémultipliant par  ${}^t\mathbf{Q}$ , on obtient un système réduit de dimension  $m$  :

$$\mathbf{T} \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z} \tag{14}$$

avec

$$\mathbf{T} = {}^t\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}. \tag{15}$$

$\mathbf{T}$  est une matrice tridiagonale symétrique :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{m-1} \\ & & & \beta_{m-1} & \alpha_m \end{bmatrix} \tag{16}$$

dont on peut facilement extraire les valeurs propres et vecteurs propres. Les valeurs propres de  $\mathbf{T}$  sont des approximations des plus grandes valeurs propres de  $\mathbf{A}$ . Les plus petites pulsations propres de [2] sont déduites par :

$$\omega^2 = \frac{s}{\lambda} - \alpha \tag{17}$$

et les modes propres sont obtenus en utilisant [9] et [13] :

$$\mathbf{x} = {}^t\mathbf{L}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{z}. \tag{18}$$

Les vecteurs de Lanczos  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  sont générés en utilisant l'algorithme suivant. On part d'un vecteur  $\mathbf{p}_0$  :

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{A} \mathbf{w} \tag{19}$$

où  $\mathbf{w}$  est un vecteur aléatoire.

A chaque itération  $i = 1, \dots, m$ , on calcule :

$$1) \quad \mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{p}_{i-1}}{\|\mathbf{p}_{i-1}\|} \quad \text{où } \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \mathbf{v}} \text{ est la norme euclidienne de } \mathbf{v} \tag{20}$$

$$2) \quad \beta_{i-1} = {}^t\mathbf{q}_{i-1} \mathbf{A} \mathbf{q}_i \quad (\text{avec } \beta_0 = 0) \tag{21}$$

$$3) \quad \mathbf{p}'_i = \mathbf{A} \mathbf{q}_i - \beta_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} \quad (\text{avec } \mathbf{q}_0 = \mathbf{0}) \tag{22}$$

$$4) \quad \alpha_i = {}^t\mathbf{q}_i \mathbf{p}'_i \tag{23}$$

$$5) \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{p}'_i - \alpha_i \mathbf{q}_i \tag{24}$$

Le vecteur  $\mathbf{q}_{i+1}$  est donc obtenu en calculant le vecteur  $\mathbf{A}\mathbf{q}_i$  puis en orthogonalisant ce dernier aux deux vecteurs précédents,  $\mathbf{q}_i$  et  $\mathbf{q}_{i-1}$ , et finalement en normalisant.

Notons que le coefficient  $\beta_{i-1}$  de l'étape 2) peut encore être obtenu par :

$$\beta_{i-1} = \|\mathbf{p}_{i-1}\|. \quad [25]$$

En effet, comme :

$$\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{A} \mathbf{q}_{i-1} - \beta_{i-2} \mathbf{q}_{i-2} - \alpha_{i-1} \mathbf{q}_{i-1}, \quad [26]$$

et comme  $\mathbf{q}_i$  est orthogonal à  $\mathbf{q}_{i-1}$  et  $\mathbf{q}_{i-2}$ , on a :

$$\begin{aligned} \beta_{i-1} &= {}^t \mathbf{q}_{i-1} \mathbf{A} \mathbf{q}_i = {}^t \mathbf{q}_i (\mathbf{A} \mathbf{q}_{i-1}) \\ &= {}^t \mathbf{q}_i (\mathbf{p}_{i-1} + \beta_{i-2} \mathbf{q}_{i-2} + \alpha_{i-1} \mathbf{q}_{i-1}) \\ &= {}^t \mathbf{q}_i \mathbf{p}_{i-1} = \|\mathbf{p}_{i-1}\| {}^t \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i = \|\mathbf{p}_{i-1}\|. \end{aligned}$$

On montre par récurrence que chaque vecteur  $\mathbf{q}_i$  est orthogonal aux vecteurs  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{i-1}$ . On en déduit que la matrice  ${}^t \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}$  est bien la matrice tridiagonale  $\mathbf{T}$  de [16] dont les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont ceux fournis par l'algorithme.

D'autre part, comme l'orthogonalité entre les vecteurs  $\mathbf{q}_i$  se dégrade au cours des itérations, il est indispensable de réorthogonaliser explicitement chaque vecteur  $\mathbf{q}_i$  par rapport aux vecteurs précédents. La réorthogonalisation itérative, proposée par Ojalvo et Newman [OJA 70], consiste à ajouter dans l'algorithme une étape supplémentaire 1') après l'étape 1) :

$$1') \quad \mathbf{q}_i^k = \mathbf{q}_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} ({}^t \mathbf{q}_j \mathbf{q}_i^{k-1}) \mathbf{q}_j \quad \text{avec } \mathbf{q}_i^0 = \mathbf{q}_i \text{ et } k = 1, 2, \dots \quad [27]$$

On répète l'opération 1') jusqu'à ce qu'on obtienne un vecteur  $\mathbf{q}_i^k$  numériquement orthogonal à  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{i-1}$  :

$$\max_{j=1, i-1} |{}^t \mathbf{q}_j \mathbf{q}_i^k| < 10^{2-t}, \quad [28]$$

$t$  étant le nombre de chiffres décimaux significatifs de l'ordinateur utilisé. Après normalisation,  $\mathbf{q}_i^k$  devient le nouveau vecteur  $\mathbf{q}_i$  et on continue l'algorithme. Si l'orthogonalité n'est pas obtenue après un certain nombre d'essais, on arrête le processus ou on repart avec un nouveau vecteur aléatoire  $\mathbf{q}_i$ .

Le nombre  $m$  des vecteurs de Lanczos est déterminé en calculant les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{T}$  à chaque itération et en testant la convergence sur les  $p$  plus grandes valeurs propres, qui sont toutes strictement positives,  $p$  étant le nombre de fréquences recherchées. Une autre façon moins coûteuse et qui est couramment utilisée est de fixer  $m$  à l'avance, en utilisant la formule empirique :

$$m = \max(2p + 1, 7). \quad [29]$$

Dans ce cas, on calcule une seule fois les valeurs propres de  $T$ , lorsque les  $m$  vecteurs de Lanczos ont été obtenus.

Cette méthode de Lanczos classique à un vecteur, bien que très rapide, présente deux principaux inconvénients :

- elle n'est applicable qu'aux matrices  $A$  symétriques, ce qui exige que l'une des deux matrices  $K'$  ou  $M'$  soit définie positive pour que l'on puisse effectuer la décomposition de Cholesky. Cette condition n'est pas remplie lorsque la structure est amortie ou lorsqu'on désire calculer, en moyen d'un décalage  $\alpha$  négatif, les fréquences autour d'une valeur donnée et non plus les premières ;

- les fréquences multiples ne sont pas fournies avec toutes leurs multiplicités.

Le premier inconvénient sera remédié avec la méthode de Lanczos pour les systèmes aux valeurs propres symétriques généralisés, et le deuxième avec un algorithme de Lanczos par bloc où plusieurs vecteurs de Lanczos sont générés simultanément à chaque itération.

### 3. Méthode de Lanczos à un vecteur pour les systèmes aux valeurs propres symétriques généralisés

#### 3.1. Système aux valeurs propres généralisé pour les structures amorties

On considère le système aux valeurs propres associé au mouvement libre d'une structure amortie :

$$K x + r C x + r^2 M x = 0 \tag{30}$$

où  $K$  est la matrice de rigidité, symétrique et positive,  $C$  est la matrice d'amortissement, symétrique, et  $M$  est la matrice de masse, symétrique et positive.

En combinant [30] avec :

$$- r M x + r M x = 0, \tag{31}$$

on obtient un système de dimension double :

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ r x \end{Bmatrix} + r \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ r x \end{Bmatrix} = 0 \tag{32}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$A y + r B y = 0 \tag{33}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{Bmatrix} x \\ r x \end{Bmatrix}. \tag{34}$$

On introduit le décalage  $\alpha$ ,  $\alpha$  réel, et le facteur d'échelle  $s$ ,  $s > 0$ , en posant :

$$\lambda = -\frac{s}{r - \alpha}. \quad [35]$$

Le système [33] devient :

$$\mathbf{A}' \mathbf{y} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{B}' \mathbf{y} \quad [36]$$

avec

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \alpha \mathbf{C} & \alpha \mathbf{M} \\ \alpha \mathbf{M} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad [37]$$

et

$$\mathbf{B}' = s \mathbf{B}. \quad [38]$$

Le décalage  $\alpha$  est choisi de façon que la matrice :

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{C} + \alpha^2 \mathbf{M} \quad [39]$$

soit inversible ( $\alpha = 0$  si  $\mathbf{K}$  est inversible). Le facteur d'échelle  $s$  sert à équilibrer les ordres de grandeur des termes de  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$  comme dans la méthode classique.

Le système aux valeurs propres généralisé [36] est du même type que [4]. Les matrices  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$  sont symétriques, cependant aucune d'elles n'est définie positive. On ne peut donc pas effectuer une décomposition de Cholesky afin d'appliquer la méthode de Lanczos classique.

En supposant dans un premier temps que  $\mathbf{A}'$  soit inversible, on écrit [36] sous forme :

$$\mathbf{D} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad [40]$$

avec

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{B}'. \quad [41]$$

En remarquant que :

$$\mathbf{A}'^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'^{-1} & \alpha \mathbf{K}'^{-1} \\ \alpha \mathbf{K}'^{-1} & \alpha^2 \mathbf{K}'^{-1} - \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad [42]$$

on a :

$$\mathbf{D} = s \begin{bmatrix} \mathbf{K}'^{-1} (\mathbf{C} + \alpha \mathbf{M}) & \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{M} \\ -\mathbf{K}'^{-1} \mathbf{K} & \alpha \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad [43]$$

L'expression de  $\mathbf{D}$  montre que seule  $\mathbf{K}'$  doit être inversible tandis que  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$  peuvent être singulières. En effet, même si  $\mathbf{A}'$  n'est pas inversible, on peut toujours aboutir au système [40], avec  $\mathbf{D}$  définie par [43], en partant directement de [30] et sans utiliser [41]. On a dans tous les cas :

$$\mathbf{A}' \mathbf{D} = \mathbf{B}', \quad [44]$$

ce qui entraîne,  $\mathbf{A}'$  et  $\mathbf{B}'$  étant symétriques :

$$\mathbf{B}' \mathbf{D} = {}^t \mathbf{D} \mathbf{B}'. \quad [45]$$

### 3.2. Méthode de Lanczos généralisée à un vecteur

Il s'agit de résoudre le système aux valeurs propres [40] dans lequel la matrice  $D$  n'est pas symétrique.

On considère la forme bilinéaire symétrique  $b : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$  est  $B'$  :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t\mathbf{u} B' \mathbf{v}. \tag{46}$$

On définit la "norme" associée à  $b$  :

$$\|\mathbf{u}\|_b = \sqrt{|b(\mathbf{u}, \mathbf{u})|} = \sqrt{|{}^t\mathbf{u} B' \mathbf{u}|}. \tag{47}$$

De [45], on déduit que  $D$  est auto-adjointe par rapport à  $b$ . Pour tous vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , on a :

$$b(\mathbf{u}, D \mathbf{v}) = b(D \mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{48}$$

Cette propriété de  $D$  permet d'appliquer l'algorithme de Lanczos décrit précédemment au système [40], à condition de remplacer le produit scalaire  ${}^t\mathbf{u} \mathbf{v}$  par  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et la norme euclidienne  $\|\mathbf{u}\|$  par  $\|\mathbf{u}\|_b$ . Dans ce qui suit, l'orthogonalité entre deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  se rapporte donc à  $b$  :  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ .

La méthode de Lanczos généralisée permet de générer  $m$  vecteurs de Lanczos  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  qui sont orthonormés :

$$\begin{cases} b(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = {}^t\mathbf{q}_i B' \mathbf{q}_j = 0 & \text{si } i \neq j, \\ \|\mathbf{q}_i\|_b = 1 \quad (e_i = b(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i) = {}^t\mathbf{q}_i B' \mathbf{q}_i = \pm 1). \end{cases} \tag{49}$$

Soit  $Q$  la matrice formée par  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  :

$$Q = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m], \tag{50}$$

et

$$E = {}^tQ B' Q. \tag{51}$$

D'après [49],  $E$  est une matrice diagonale avec les termes diagonaux  $e_i$  égaux à 1 ou  $-1$ .

En reportant dans [40] le changement de variable :

$$\mathbf{y} = Q \mathbf{z} \tag{52}$$

et en prémultipliant par  $E {}^tQ B'$ , on obtient un système réduit de dimension  $m$  :

$$T \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z} \tag{53}$$

avec

$$T = E {}^tQ B' D Q. \tag{54}$$

$\mathbf{T}$  est une matrice tridiagonale non symétrique :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_{m-1} & \\ & & \gamma_{m-1} & & \alpha_m \end{bmatrix} \quad [55]$$

dont les valeurs propres, complexes et réelles, sont déterminées par une transformation sous forme de Hessenberg puis en utilisant la méthode du QR [SMI 76].

Les valeurs propres de  $\mathbf{T}$  sont des approximations des valeurs propres de plus grandes modules de  $\mathbf{D}$ . Les valeurs propres et les vecteurs propres complexes sont deux à deux complexes conjugués. Les valeurs propres de [30] sont déduites de  $\lambda$  par [35] :

$$r = \alpha + \frac{s}{\lambda}. \quad [56]$$

Les pulsations propres sont les parties imaginaires positives de  $r$ . Les vecteurs propres  $\mathbf{x}$  de [30] sont obtenus en utilisant [52] et [34].

Avant de présenter l'algorithme de Lanczos, on remarque que si  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  sont deux vecteurs avec  $\|\mathbf{q}\|_b = 1$ , alors le vecteur :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \alpha \mathbf{q} \quad \text{avec} \quad \alpha = b(\mathbf{q}, \mathbf{q}) b(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad [57]$$

est orthogonal à  $\mathbf{q}$  :  $b(\mathbf{p}', \mathbf{q}) = 0$ .

Les vecteurs de Lanczos  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$  sont générés par l'algorithme suivant. On part d'un vecteur  $\mathbf{p}_0$  :

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{D} \mathbf{w} \quad [58]$$

où  $\mathbf{w}$  est un vecteur aléatoire.

A chaque itération  $i = 1, \dots, m$ , on calcule :

$$1) \quad \gamma_i = \|\mathbf{p}_{i-1}\|_b = \sqrt{{}^t \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{B}' \mathbf{p}_{i-1}} \quad [59]$$

$$2) \quad \mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{p}_{i-1}}{\gamma_i} \quad [60]$$

$$3) \quad e_i = b(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i) = {}^t \mathbf{q}_i \mathbf{B}' \mathbf{q}_i \quad (= \pm 1) \quad [61]$$

$$4) \quad \beta_{i-1} = e_i e_{i-1} \gamma_i \quad (\text{avec } \beta_0 = 0) \quad [62]$$

$$5) \quad \mathbf{p}'_i = \mathbf{D} \mathbf{q}_i - \beta_{i-1} \mathbf{q}_{i-1} \quad (\text{avec } \mathbf{q}_0 = 0) \quad [63]$$

$$6) \quad \alpha_i = e_i b(\mathbf{q}_i, \mathbf{p}'_i) = e_i {}^t \mathbf{q}_i \mathbf{B}' \mathbf{p}'_i \quad [64]$$

$$7) \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{p}'_i - \alpha_i \mathbf{q}_i \quad [65]$$

On a la relation :

$$p_i = D q_i - \beta_{i-1} q_{i-1} - \alpha_i q_i. \tag{66}$$

Montrons par récurrence que  $q_i$  est orthogonal à  $q_1, \dots, q_{i-1}$ . Ceci est vrai pour  $i = 2, 3$ . Supposons que ce soit vrai jusqu'à l'ordre  $i$  et montrons que  $p_i$ , donc  $q_{i+1}$ , est orthogonal à  $q_1, \dots, q_i$ . D'après [57], [64] et [65],  $p_i$  est orthogonal à  $q_i$  par construction. On a :

$$\begin{aligned} b(q_{i-1}, p_i) &= b(q_{i-1}, D q_i - \beta_{i-1} q_{i-1} - \alpha_i q_i) \\ &= b(q_{i-1}, D q_i) - \beta_{i-1} b(q_{i-1}, q_{i-1}) \\ &= b(q_i, D q_{i-1}) - (e_i e_{i-1} \gamma_i) e_{i-1} \\ &= b(q_i, p_{i-1} + \beta_{i-2} q_{i-2} + \alpha_{i-1} q_{i-1}) - e_i \gamma_i \\ &= b(q_i, q_i) \gamma_i - e_i \gamma_i = 0, \end{aligned}$$

d'où  $p_i$  est orthogonal à  $q_{i-1}$ . D'autre part, pour  $j = 1, \dots, i - 2$ , on a :

$$\begin{aligned} b(q_j, p_i) &= b(q_j, D q_i - \beta_{i-1} q_{i-1} - \alpha_i q_i) \\ &= b(q_j, D q_i) = b(q_i, D q_j) \\ &= b(q_i, p_j + \beta_{j-1} q_{j-1} + \alpha_j q_j) = 0, \end{aligned}$$

d'où  $p_i$  est orthogonal à  $q_j$ , ce qui termine la démonstration.

Le vecteur  $q_{i+1}$  est donc obtenu en calculant le vecteur  $Dq_i$  puis en orthogonalisant ce dernier aux deux vecteurs précédents,  $q_i$  et  $q_{i-1}$ , et finalement en normalisant.

On a, d'après [66], [59] et [60] :

$$\begin{cases} D q_i = \beta_{i-1} q_{i-1} + \alpha_i q_i + \gamma_{i+1} q_{i+1} & \text{pour } i = 1, \dots, m - 1 \\ D q_m = \beta_{m-1} q_{m-1} + \alpha_m q_m + p_m. \end{cases} \tag{67}$$

Soit  $T$  la matrice tridiagonale définie par [55] et dont les coefficients  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  sont ceux fournis par l'algorithme. Le système [67] peut s'écrire sous forme matricielle :

$$D Q = Q T + \underbrace{[0, \dots, 0]}_{m-1 \text{ fois}}, p_m]. \tag{68}$$

En prémultipliant [68] par  ${}^t Q B'$ , on obtient :

$${}^t Q B' D Q = {}^t Q B' Q T + {}^t Q B' [0, \dots, 0, p_m]. \tag{69}$$

Comme  $p_m$  est orthogonal à  $q_1, \dots, q_m$ , on a :

$${}^t Q B' [0, \dots, 0, p_m] = 0. \tag{70}$$

[69] devient, en utilisant [51]:

$${}^t \mathbf{Q} \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{Q} = \mathbf{E} \mathbf{T} \quad [71]$$

et finalement, on obtient [54].

Comme pour la méthode de Lanczos classique, il est indispensable de réorthogonaliser explicitement chaque vecteur  $\mathbf{q}_i$  aux vecteurs  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{i-1}$ . La réorthogonalisation itérative consiste à ajouter dans l'algorithme une étape supplémentaire 2') après l'étape 2):

$$2') \quad \mathbf{q}_i^k = \mathbf{q}_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} e_j b(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_i^{k-1}) \mathbf{q}_j \quad \text{avec } \mathbf{q}_i^0 = \mathbf{q}_i \text{ et } k = 1, 2, \dots \quad [72]$$

On itère sur  $k$  jusqu'à ce qu'on obtienne un vecteur  $\mathbf{q}_i^k$  numériquement orthogonal à  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{i-1}$ . Après normalisation,  $\mathbf{q}_i^k$  devient le nouveau vecteur  $\mathbf{q}_i$  et on continue l'algorithme.

Le nombre  $m$  des vecteurs de Lanczos est déterminé comme dans la méthode classique, soit en calculant les valeurs propres de  $\mathbf{T}$  à chaque itération puis en testant la convergence sur celles de plus grandes modules, soit en utilisant la formule empirique:

$$m = \max(2(2p + 1), 14) \quad [73]$$

où  $p$  est le nombre de fréquences propres recherchées, ceci en tenant compte du fait qu'une fréquence complexe correspond à deux valeurs propres complexes conjuguées.

On remarque que les matrices de dimension double  $\mathbf{B}'$  et  $\mathbf{D}$  n'interviennent que dans les produits du type  $\mathbf{B}'\mathbf{u}$  et  $\mathbf{D}\mathbf{u}$ . Si  $\mathbf{u}$  est un vecteur de dimension  $2n$ :

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix},$$

on a:

$$\mathbf{B}'\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s(\mathbf{C}\mathbf{u}_1 + \mathbf{M}\mathbf{u}_2) \\ s\mathbf{M}\mathbf{u}_1 \end{Bmatrix} \quad [74]$$

et

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}'^{-1}(\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2) \\ \alpha\mathbf{K}'^{-1}(\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2) - s\mathbf{u}_1 \end{Bmatrix}. \quad [75]$$

L'opération  $\mathbf{D}\mathbf{u}$  ne nécessite donc qu'une seule résolution d'un système linéaire de dimension  $n$ :  $\mathbf{K}'^{-1}(\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2)$ . On n'a pas besoin de former explicitement  $\mathbf{B}'$  et  $\mathbf{D}$ .

### 3.3. Cas des structures non amorties

Revenons à [4], on a :

$$\mathbf{K}' \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{M}' \mathbf{x} \quad [76]$$

où  $\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{M}$  est définie positive et en particulier inversible, et  $\mathbf{M}' = s \mathbf{M}$  est positive. On écrit [76] sous la forme :

$$\mathbf{D} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad [77]$$

avec

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}'^{-1} \mathbf{M}'. \quad [78]$$

$\mathbf{D}$  vérifie évidemment :

$$\mathbf{M}' \mathbf{D} = {}^t \mathbf{D} \mathbf{M}'. \quad [79]$$

On peut donc appliquer l'algorithme de Lanczos généralisé en remplaçant  $\mathbf{A}'$  par  $\mathbf{K}'$  et  $\mathbf{B}'$  par  $\mathbf{M}'$ . On a :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t \mathbf{u} \mathbf{M}' \mathbf{v}. \quad [80]$$

Comme  $\mathbf{M}'$  est positive, il en résulte que  $b(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i) > 0$  et que la matrice  $\mathbf{E}$  définie en [51] est l'identité. On en déduit que  $\mathbf{T}$  est symétrique et que ses valeurs propres sont réelles. Le nombre  $m$  des vecteurs de Lanczos est donné par [29].

D'autre part,  $\mathbf{K}'$  n'a pas besoin d'être positive car on n'effectue pas de décomposition de Cholesky. On peut donc introduire un décalage  $\alpha$  négatif. En particulier, si l'on veut calculer les pulsations propres autour d'une valeur fixée  $\omega_0$  et non plus les plus petites, on prend alors :

$$\alpha = -\omega_0^2. \quad [81]$$

L'algorithme de Lanczos fournit des approximations des valeurs propres :

$$\lambda = \frac{s}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad [82]$$

de plus grandes valeurs absolues de [77], ce qui correspond à des pulsations propres  $\omega$  les plus proches de  $\omega_0$ .

La méthode de Lanczos généralisée est cependant moins performante que la méthode classique pour le calcul des premières fréquences et modes propres.

## 4. Méthode de Lanczos par bloc pour les systèmes aux valeurs propres symétriques généralisés

La méthode de Lanczos généralisée à un vecteur permet de résoudre le système non symétrique [40], cependant les valeurs propres multiples ne sont pas fournies

avec toutes leurs multiplicités. Ceci est remédié avec la méthode de Lanczos généralisée par bloc.

Soit  $l$  un entier fixé,  $l \geq 1$ , appelé taille des blocs.  $l$  doit être supérieur ou égal au plus grand degré de multiplicité attendu des fréquences recherchées. Le cas  $l = 1$  correspond à la méthode de Lanczos généralisée à un vecteur.

Dans ce qui suit, l'orthogonalité se rapporte toujours à la forme bilinéaire  $b$ .

La méthode de Lanczos généralisée par bloc permet de générer  $m$  blocs de Lanczos  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$  qui sont des matrices de dimension  $2n \times l$ ,  $n$  étant la dimension du système [30], et qui vérifient les relations d'orthonormalité :

$$\begin{cases} {}^t\mathbf{Q}_i \mathbf{B}' \mathbf{Q}_j = 0 & \text{si } i \neq j, \\ {}^t\mathbf{Q}_i \mathbf{B}' \mathbf{Q}_i = \mathbf{E}_i \end{cases} \quad [83]$$

où  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_m$  sont des matrices diagonales de dimension  $l$  avec les termes diagonaux égaux à 1 ou  $-1$ .

Soit  $\mathbf{Q}$  la matrice formée par  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$  :

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m], \quad [84]$$

et

$$\mathbf{E} = {}^t\mathbf{Q} \mathbf{B}' \mathbf{Q}. \quad [85]$$

$\mathbf{E}$  est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont ceux de  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_m$  et sont donc égaux à 1 ou  $-1$ .

En reportant dans [40] le changement de variable :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \mathbf{z} \quad [86]$$

et en prémultipliant par  $\mathbf{E} {}^t\mathbf{Q} \mathbf{B}'$ , on obtient un système réduit de dimension  $ml$  :

$$\mathbf{T} \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z} \quad [87]$$

avec

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} {}^t\mathbf{Q} \mathbf{B}' \mathbf{D} \mathbf{Q}. \quad [88]$$

$\mathbf{T}$  est une matrice tridiagonale par blocs, non symétrique :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{S}_1 & & & \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{H}_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{R}_{m-1} & \mathbf{S}_{m-1} \\ & & & & \mathbf{H}_m \end{bmatrix}. \quad [89]$$

$\mathbf{H}_i$ ,  $\mathbf{R}_i$  et  $\mathbf{S}_i$  sont des matrices carrées de dimension  $l$ , avec  $\mathbf{R}_i$  triangulaire supérieure et  $\mathbf{S}_i$  triangulaire inférieure.  $\mathbf{T}$  est en fait une matrice "bande" de demi-largeur de bande  $l + 1$ .

Les valeurs propres  $\lambda$ , réelles et complexes, de  $\mathbf{T}$  sont déterminées par une transformation sous forme de Hessenberg puis en utilisant la méthode du QR. Ce sont des approximations des valeurs propres de plus grandes modules de  $\mathbf{D}$ . Les valeurs propres  $r$  de [30] sont déduites de  $\lambda$  par [56] et les vecteurs propres  $\mathbf{x}$  sont obtenus par [86] et [34]. Les valeurs propres et les vecteurs propres complexes sont deux à deux complexes conjugués.

Les blocs de Lanczos  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_m$  sont générés en utilisant l'algorithme suivant. On part d'un bloc  $\mathbf{P}_0$  :

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{D} \mathbf{W} \tag{90}$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice de dimension  $2n \times l$  générée aléatoirement.

A chaque itération  $i = 1, \dots, m$ , on effectue :

$$1) \quad \text{Décomposition QR de } \mathbf{P}_{i-1} \text{ en } \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i \tag{91}$$

$$2) \quad \mathbf{E}_i = {}^t \mathbf{Q}_i \mathbf{B}' \mathbf{Q}_i \tag{92}$$

$$3) \quad \mathbf{S}_{i-1} = \mathbf{E}_{i-1} {}^t \mathbf{R}_i \mathbf{E}_i \quad (\text{avec } \mathbf{S}_0 = 0) \tag{93}$$

$$4) \quad \mathbf{P}'_i = \mathbf{D} \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{S}_{i-1} \quad (\text{avec } \mathbf{Q}_0 = 0) \tag{94}$$

$$5) \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{E}_i {}^t \mathbf{Q}_i \mathbf{B}' \mathbf{P}'_i \tag{95}$$

$$6) \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{P}'_i - \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i \tag{96}$$

On a la relation :

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{D} \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{S}_{i-1} - \mathbf{Q}_i \mathbf{H}_i. \tag{97}$$

La décomposition QR de  $\mathbf{P}_{i-1}$  consiste à trouver une matrice  $\mathbf{Q}_i$  dont les vecteurs colonnes sont orthonormés et une matrice carrée triangulaire supérieure  $\mathbf{R}_i$  telles que  $\mathbf{P}_{i-1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i$ . Cette décomposition est réalisée en utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt adapté à la forme bilinéaire  $b$ .

De la même façon que pour la méthode à un vecteur, on démontre par récurrence que chaque bloc  $\mathbf{Q}_i$  est orthogonal aux blocs précédents  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{i-1}$ . On en déduit que la matrice  $\mathbf{T}$  définie par [89] et dont les sous matrices  $\mathbf{H}_i$ ,  $\mathbf{R}_i$  et  $\mathbf{S}_i$  sont celles fournies par l'algorithme vérifie bien [88].

La réorthogonalisation est effectuée à deux niveaux. Le premier, proposé par Matthies [MAT 85], consiste à réorthogonaliser systématiquement deux fois le bloc  $\mathbf{P}_i$  aux blocs  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_i$ , avant la décomposition QR. Ceci est réalisé en ajoutant dans l'algorithme une étape supplémentaire 6') après l'étape 6) :

$$6') \quad \mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{Q}_j (\mathbf{E}_j {}^t \mathbf{Q}_j \mathbf{B}' \mathbf{P}_i^{k-1}) \quad \text{avec } \mathbf{P}_i^0 = \mathbf{P}_i \text{ et } k = 1, 2. \tag{98}$$

Après cette étape,  $\mathbf{P}_i^2$  devient le nouveau bloc  $\mathbf{P}_i$ .

Le deuxième niveau consiste à réorthogonaliser itérativement chaque bloc  $Q_i$  aux blocs précédents  $Q_1, \dots, Q_{i-1}$ , comme dans la méthode à un vecteur. Ceci est réalisé en ajoutant une étape supplémentaire 1') après l'étape 1) :

$$1') \quad Q_i^k = Q_i^{k-1} - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j (E_j^t Q_j B' Q_i^{k-1}) \quad \text{avec } Q_i^0 = Q_i \text{ et } k = 1, 2, \dots \quad [99]$$

On itère sur  $k$  jusqu'à ce qu'on obtienne une matrice  $Q_i^k$  dont les vecteurs colonnes sont numériquement orthogonaux à tous les vecteurs colonnes composant les blocs  $Q_1, \dots, Q_{i-1}$ . Après normalisation de ses vecteurs colonnes,  $Q_i^k$  devient le nouveau bloc  $Q_i$  et on continue l'algorithme.

Le nombre  $m$  des blocs de Lanczos est déterminé soit en calculant les valeurs propres de  $T$  à chaque itération puis en testant la convergence sur celles de plus grandes modules, soit en utilisant la formule empirique :

$$m = \max \left( 2 \left[ \frac{2p}{l} \right] + 2, 2 \left[ \frac{6}{l} \right] + 2 \right) \quad [100]$$

où  $p$  est le nombre de fréquences propres recherchées et  $[.]$  est la partie entière.

On peut bien entendu appliquer la méthode de Lanczos généralisée par bloc aux structures non amorties, en remplaçant les matrices  $A'$  par  $K' = K + \alpha M$  et  $B'$  par  $M' = s M$ , comme dans la méthode à un vecteur. Dans ce cas, comme les valeurs propres sont réelles, le nombre  $m$  des blocs de Lanczos donné par [100] doit être divisé par 2.

En cas d'absence de fréquence multiple, il vaut mieux d'utiliser la méthode à un vecteur qui est plus performante que la méthode par bloc.

## 5. Applications

### 5.1. Système masses-ressorts avec amortissement proportionnel

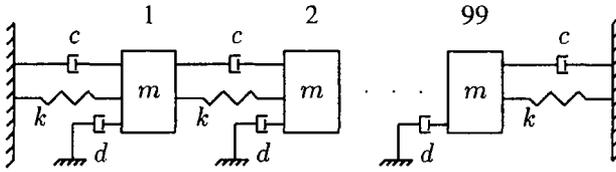
Le système est composé de :

– 100 ressorts identiques de raideur  $k = 10^7$  N/m et d'amortissement  $c = 10^3$  Ns/m ;

– 99 masses ponctuelles identiques  $m = 10$  kg ;

– 99 amortissements ponctuels identiques  $d = 6.28318$  Ns/m.

Le système est encastré aux extrémités (Fig. 1).



**Figure 1.** *Système masses-ressorts*

La matrice d'amortissement de ce système est de type proportionnel :

$$C = aK + bM \quad \text{avec} \quad a = 10^{-4} \quad \text{et} \quad b = 0.628318. \quad [101]$$

Les pulsations théoriques sont obtenues en projetant le système amorti sur les modes propres du système non amorti. On obtient alors les équations découplées du type :

$$q_i + \left(a + \frac{b}{\omega_i^2}\right) \dot{q}_i + \frac{1}{\omega_i^2} \ddot{q}_i = 0 \quad [102]$$

dont on connaît la solution analytique [LAL 92] et dans lesquelles  $\omega_i$  sont les pulsations du système non amorti et  $q_i$  sont les coordonnées généralisées modales.

Les 6 premières pulsations obtenues avec la méthode de Lanczos généralisée à un vecteur ainsi que les pulsations théoriques sont présentées dans le tableau 1. Elles sont pratiquement identiques.

Mode	Théorie	Lanczos	Ecart
1	$-0.36350 + 31.412 i$	$-0.36350 + 31.413 i$	0.0032 %
2	$-0.51148 + 62.820 i$	$-0.51149 + 62.819 i$	0.0016 %
3	$-0.75799 + 94.211 i$	$-0.75796 + 94.210 i$	0.0011 %
4	$-1.10270 + 125.58 i$	$-1.10270 + 125.58 i$	0.0000 %
5	$-1.54540 + 156.91 i$	$-1.54530 + 156.91 i$	0.0001 %
6	$-2.08560 + 188.21 i$	$-2.08540 + 188.21 i$	0.0001 %

$$\text{Ecart} = \left\| \frac{(\omega_{\text{Lanczos}} - \omega_{\text{Théorie}})}{\omega_{\text{Théorie}}} \right\|$$

**Tableau 1 :** *Pulsations (rd/s) du système masses-ressorts*

### 5.2. Amortissement quelconque (symétrique), fréquences doubles

Il s'agit d'un rotor composé d'un arbre formé par plusieurs éléments de poutre de sections différentes, d'un disque et de deux paliers identiques (Fig. 2) [TRA 81].

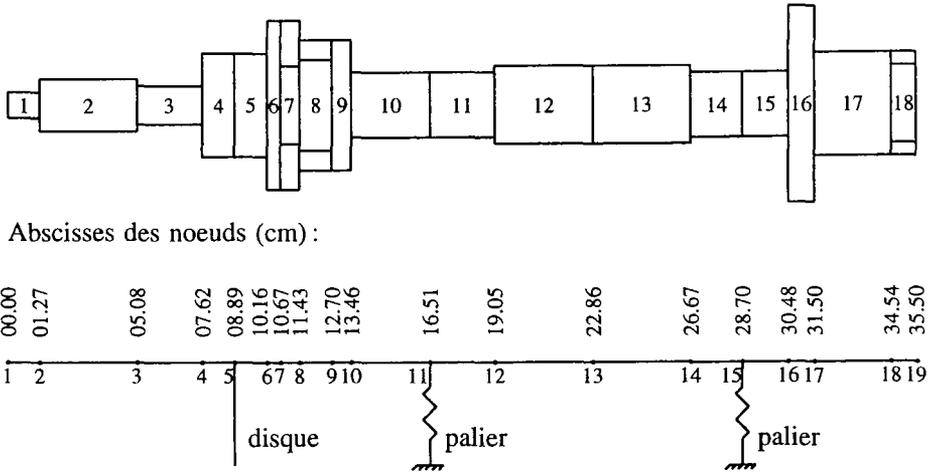


Figure 2. Modélisation du rotor

La modélisation éléments-finis de l'arbre comporte 18 éléments de poutre et 19 noeuds. Seuls les degrés de liberté de flexion dans les plans  $xy$  et  $xz$  ( $u_y$ ,  $u_z$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$ ) sont retenus. Le disque est modélisé par des masses et inerties ponctuelles dans les directions  $y$  et  $z$ , et les paliers par des rigidités et amortissements dans les mêmes directions.

Les données du rotor sont :

– Arbre : masse volumique  $7800 \text{ kg/m}^3$ , coefficient de Poisson 0.3, module d'Young  $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ , diamètres :

Elément	1	2	3	4, 5	6	7	8
Diam. int. (cm)	0	0	0	0	0	3.04	3.56
Diam. ext. (cm)	1.02	2.04	1.52	4.06	6.6	6.6	5.08
Elément	9	10, 11	12, 13	14, 15	16	17	18
Diam. int. (cm)	0	0	0	0	0	0	3.04
Diam. ext. (cm)	5.08	2.54	3.04	2.54	7.62	4.06	4.06

Les abscisses des noeuds sur l'axe  $x$  sont données dans la figure 2.

– Disque : masse  $1.401 \text{ kg}$ ,  $I_{Dy} = I_{Dz} = 0.00136 \text{ kg.m}^2$ ,  $I_{Dx} = 0.002 \text{ kg.m}^2$ , localisé au noeud 5.

– Paliers : localisés aux noeuds 11 et 15, de rigidité et d'amortissement :

$$k_{yy} = k_{zz} = 4.378 \cdot 10^7 \text{ N/m}, \quad c_{yy} = c_{zz} = 2627 \text{ Ns/m}, \quad k_{yz} = k_{zy} = c_{yz} = c_{zy} = 0.$$

On s'intéresse uniquement aux fréquences et modes du rotor à l'arrêt car les méthodes de Lanczos décrites précédemment ne s'appliquent pas aux structures tournantes avec une matrice  $C$  non symétrique (effet gyroscopique etc.). A cause de la symétrie des mouvements dans les plans  $xy$  et  $xz$ , les fréquences sont doubles.

Les 6 premières fréquences du rotor, sans et avec amortissement, sont calculées en utilisant la méthode de Lanczos généralisée par bloc, avec la taille des blocs  $l = 2$  ou  $l = 1$  (Tableau 2). Elles sont comparées aux fréquences fournies par [TRA 81], qui sont obtenues par une méthode d'itérations simultanées spécialement destinée aux systèmes avec des matrices  $K$  et  $C$  non symétriques [BOR 77]. Avec  $l = 2$ , toutes les fréquences doubles sont calculées, tandis qu'avec  $l = 1$ , certaines fréquences sont ignorées. Les écarts avec les résultats de [TRA 81] sont faibles, de l'ordre de 0.5%.

Sans amortissement				
Mode	[TRA 81]	Lanczos $l = 2$	Ecart	Lanczos $l = 1$
1	270	268.6	0.52 %	268.6
2	270	268.6	0.52 %	268.6
3	806	804.3	0.21 %	804.3
4	806	804.3	0.21 %	1263
5	1267	1263	0.32 %	1995
6	1267	1263	0.32 %	2802

Avec amortissement				
Mode	[TRA 81]	Lanczos $l = 2$	Ecart	Lanczos $l = 1$
1	$-6.66 + 270 i$	$-6.52 + 268.88 i$	0.42 %	$-6.52 + 268.88 i$
2	$-6.66 + 270 i$	$-6.52 + 268.88 i$	0.42 %	$-6.52 + 268.88 i$
3	$-84.9 + 810 i$	$-84.1 + 807.81 i$	0.29 %	$-84.1 + 807.81 i$
4	$-84.9 + 810 i$	$-84.1 + 807.81 i$	0.29 %	$-185 + 1249.9 i$
5	$-181 + 1255 i$	$-185 + 1249.9 i$	0.53 %	$-36 + 1996.4 i$
6	$-181 + 1255 i$	$-185 + 1249.9 i$	0.53 %	$-174 + 2794.6 i$

$$\text{Ecart} = \|(f_{\text{Lanczos}(l=2)} - f_{\text{[TRA 81]}}) / f_{\text{[TRA 81]}}\|$$

**Tableau 2 :** Fréquences (hz) du rotor

### 5.3. Calcul des fréquences autour d'une valeur fixée

La structure est une plaque rectangulaire avec les données suivantes :

- longueur : 1 m
- largeur : 0.5 m
- épaisseur : 0.012 m
- module d'Young :  $2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>
- coefficient de Poisson : 0.3
- masse volumique : 7800 kg/m<sup>3</sup>.

La plaque est en mouvement de flexion avec les conditions aux limites de type libre-libre. Elle est modélisée par des éléments de plaque à 4 noeuds et à 3 degrés de liberté par noeud ( $u_z$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$ ). Son maillage éléments-finis comporte 10 découpages réguliers suivant les deux côtés, soit 100 éléments et 121 noeuds. Il n'y a pas d'amortissement.

Avec la méthode de Lanczos généralisée, on calcule les 20 premières fréquences avec un décalage  $\alpha = 100$ , la plaque étant libre, ainsi que 5 fréquences autour de 200 hz, 400 hz, 600 hz et 800 hz, ce qui correspond à des décalages négatifs :

$$\alpha = -(400\pi)^2, -(800\pi)^2, -(1200\pi)^2, -(1600\pi)^2.$$

Les fréquences correspondant aux modes flexibles obtenues avec la méthode de Lanczos généralisée à un vecteur ( $l = 1$ ) ainsi que les temps de calcul sur VAX/780 sont présentées dans le tableau 3. On note que la méthode d'itérations sur un sous-espace [TRA 82] fournit les mêmes résultats avec des temps de calcul d'environ trois fois plus importants, tant pour les premières fréquences que pour celles autour des valeurs fixées. Signalons enfin que les fréquences correspondant aux modes rigides ne sont pas nulles et sont de l'ordre de 0.1 hz à 1 hz. Ceci, se produisant aussi bien avec la méthode de Lanczos qu'avec la méthode d'itérations sur un sous-espace, est probablement du au décalage [YIU 90].

Mode n°	Premières fréquences	5 fréquences autour de			
		200 hz	400 hz	600 hz	800 hz
4	63.1	63.1			
5	78.0	78.0			
6	173.4	173.4			
7	177.7	177.7			
8	275.5	275.5			
9	303.6		303.6		
10	305.2		305.2		
11	360.7		360.7		
12	422.1		422.1		
13	491.4		491.4	491.4	
14	585.1			585.1	
15	620.0			620.0	
16	712.9			712.9	712.9
17	725.6			725.6	725.6
18	771.4				771.4
19	809.2				809.2
20	854.1				854.1
Temps	366 s	104 s	122 s	119 s	96 s
Temps [TRA 82]	888 s	298 s	357 s	588 s	260 s

Tableau 3 : Fréquences (hz) de la plaque et temps de calcul (s)

## 6. Conclusion

On a présenté une méthode de Lanczos par bloc pour les systèmes aux valeurs propres généralisés qui permet de calculer les fréquences et modes propres de structures amorties avec des matrices  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}$  symétriques. Les résultats obtenus sur les exemples traités concordent avec des résultats théoriques ou provenant d'autres méthodes. Cette méthode est particulièrement adaptée pour le calcul des fréquences multiples. Cependant, en cas d'absence de ces dernières, il vaut mieux d'utiliser la méthode de Lanczos généralisée à un vecteur qui est plus performante.

Pour les structures non amorties, cette méthode permet également de calculer les fréquences autour d'une valeur fixée. Cependant, pour déterminer les premières fréquences et s'il n'y pas de fréquence multiple, on préférera la méthode de Lanczos classique à un vecteur.

## Références

- [BAT 76] BATHE K.J. et WILSON E.L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis* Prentice-Hall, 1976.
- [BAU 86] BAUCHAU O.A., "A solution of the eigenproblem for undamped gyroscopic systems with the Lanczos algorithm," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp. 1705–1713.
- [BOR 77] BORRI M. et MANTEGAZZA M., "Efficient solution of quadratic eigenproblems arising in dynamic analysis of structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 12, 1977, p. 19–31.
- [BOS 87] BOSTIC S.W. et FULTON R.E., "Implementation of the Lanczos method for structural vibration analysis on a parallel computer," *Computer & Structures*, Vol. 25, n° 3, 1987, pp. 395–403.
- [CAR 82] CARNOY E. et GERADIN M., "On the practical use of the Lanczos algorithm in finite element applications to vibration and stability problems," *Matrix Pencil, Lecture Note in Mathematics*, édité par B. Kagstrom et A. Ruhe, Springer-Verlag, 1982.
- [CHA 86] CHANG S.C., "Lanczos algorithm with selective reorthogonalization for eigenvalue extraction in structural dynamic and stability analysis," *Computer & Structures*, Vol. 23, n° 2, 1986, pp. 121–128.
- [CHA 88] CHATELIN F., *Valeurs propres de matrices*, Masson, 1988.
- [CHE 88] CHEN H.C. et TAYLOR R.L., "Solution of eigenproblems for damped structural systems by the Lanczos algorithm," *Computer & Structures*, Vol. 30, n° 1-2, 1988, pp. 151–161.
- [CHE 89] CHEN H.C. et TAYLOR R.L., "Using Lanczos vectors and Ritz vectors for computing dynamic responses," *Engineering Computations*, Vol. 6, Juin 1989, pp. 151–157.

- [CHO 76] CHOWDHURY P.C., "The truncated Lanczos algorithm for partial solution of the symmetric eigenproblem," *Computer & Structures*, Vol. 6, 1976, pp. 439-446.
- [CRA 88] CRAIG R.R. Jr., SU T.J. et KIM H.M., "Use of Lanczos vectors in structural dynamics," *Proceedings of the International Conference on "Spacecraft Structures and Mechanical Testing"*, Noordwijk, The Netherlands, 19-21 Octobre 1988, ESA SP-289, Janvier 1989, pp. 187-192.
- [ERI 80] ERICSSON T. et RUHE A., "The spectral transformation Lanczos method for the numerical solution of large sparse generalized symmetric eigenvalue problems," *Mathematics of Computation*, Vol. 35, n° 152, 1980, pp. 1251-1268.
- [GER 79] GERADIN M., "Application of the biorthogonal Lanczos algorithm," *Energy Methods in Finite Element Analysis*, édité par R. Glowinski, E.Y. Rodin et O.C. Zienkiewicz, Wiley, 1979, Chapitre 19, pp. 335-348.
- [GER 92] GERADIN M. et RIXEN D., *Théorie des vibrations – Application à la dynamique des structures*, Masson, 1992.
- [GOL 72] GOLUB G.H., UNDERGOOD R. et WILKINSON J.H., "The Lanczos algorithm for the symmetric  $Ax = \lambda Bx$  problem," Report n° STAN-CS-72-270, Stanford University, California, 1972.
- [GOL 77] GOLUB G.H. et UNDERGOOD R., "The block Lanczos method for computing eigenvalues," *Mathematical Software III*, édité par J. Rice, Academic Press, 1977, pp. 361-377.
- [JEN 77] JENNINGS A., *Matrix computation for engineers and scientists*, Wiley, 1977.
- [LAL 92] LALANNE M., BERTHIER P. et DER HAGOPIAN J., *Mécanique des vibrations linéaires*, Deuxième édition, Masson, 1992.
- [LAN 50] LANCZOS C., "An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators," *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 45, n° 4, 1950, pp. 255-282.
- [MAT 85] MATTHIES H.G., "A subspace Lanczos method for the generalized symmetric eigenproblem," *Computer & Structures*, Vol. 21, n° 1-2, 1985, pp. 319-325.
- [NOU 83] NOUR-OMID B., PARLETT B.N. et TAYLOR R.L., "Lanczos versus subspace iteration for solution of eigenvalue problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp. 859-871.
- [NOU 84] NOUR-OMID B., "Dynamic analysis of structures using Lanczos coordinates," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, 1984, pp. 565-577.
- [NOU 85] NOUR-OMID B., "Block Lanczos method for dynamic analysis of structures," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 13, 1985, pp. 271-275.
- [NEW 73] NEWMAN M. et PIPANO P., "Fast modal extract in NASTRAN via the FEER computer program," NASA TM-X-2893, 1973, pp. 485-506.
- [OJA 70] OJALVO I.U. et NEWMAN M., "Vibration modes of large structures by an automatic matrix-reduction method," *AIAA Journal*, Vol. 8, n° 7, 1970, pp. 1234-1239.
- [OJA 85] OJALVO I.U., "Proper use of Lanczos vectors for large eigenvalue problems," *Computer & Structures*, Vol. 20, n° 1-3, 1985, pp. 115-120.

- [PAI 71] PAIGE C.C., "The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large sparse matrix," Ph.D. Thesis, London University, 1971.
- [PAI 72] PAIGE C.C., "Computational variants of the Lanczos method for the eigenproblem," *J. Inst. Maths Applies*, Vol. 10, 1972, pp. 373-381.
- [PAI 76] PAIGE C.C., "Error analysis of the Lanczos algorithm for tridiagonalizing a symmetric matrix," *J. Inst. Maths Applies*, Vol. 18, 1976, pp. 341-349.
- [PAR 79] PARLETT B.N. et SCOTT D.S., "The Lanczos algorithm with selective orthogonalization," *Mathematics of Computation*, Vol. 33, n° 145, 1979, pp. 217-238.
- [PAR 80] PARLETT B.N., *The symmetric eigenvalue problem*, Prentice-Hall, 1980.
- [RAM 80] RAMASWAMY S., "On the effectiveness of the Lanczos method for the solution of large eigenvalue problems," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 73, n° 3, 1980, pp. 405-418.
- [RUH 79] RUHE A., "Implementation aspects of band Lanczos algorithms for computation of eigenvalues of large sparse symmetric matrices," *Mathematics of Computation*, Vol. 33, n° 146, 1979, pp. 680-687.
- [SCO 79] SCOTT D.S., "How to make the Lanczos algorithm converge slowly," *Mathematics of Computation*, Vol. 33, n° 145, 1979, pp. 239-247.
- [SCO 81] SCOTT D.S., "Solving sparse symmetric definite quadratic  $\lambda$ -matrix problems," *BIT*, Vol. 21, 1981, pp. 475-480.
- [SMI 76] SMITH B.T., BOYLE J.M., DONGARRA J.J., GARBOW B.S., IKEBE Y., KLEMA V.C. et MOLER C.B., *Matrix eigensystem routines. Eispack guide. Second edition*, Lecture Note in Computer Science, Vol. 6, Springer-Verlag, 1976.
- [TRA 81] TRAN D.M., "Etude du comportement dynamique des rotors flexibles," Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA de Lyon, 1981.
- [TRA 82] TRAN D.M., "Système Titus : Introduction de la méthode d'itérations sur un sous-espace de recherche de valeurs propres et vecteurs propres," Rapport technique, Framatome, 1982.
- [TRA 86] TRAN D.M., "SYSTUS : Introduction de la méthode sous-espace Lanczos par bloc pour les problèmes aux valeurs propres symétriques généralisés. Application au calcul des fréquences et modes complexes de structures amorties," Rapport technique, Framatome, 1986.
- [WEI 83] WEINGARTEN V.I., RAMANATHAN R.K., CHEN C.N., "Lanczos eigenvalue algorithm for large structures on a minicomputer," *Computer & Structures*, Vol. 16, n° 1-4, 1983, pp. 253-257.
- [YIU 90] YIU Y.C., "Reduced vector basis for dynamic analysis of large damped structures," Report n° UCB/SEMM-90/06, University of California Berkeley, 1990.

Article reçu le 21 février 1994.

Version révisée le 20 mai 1994.