
Comportement élastoplastique des aciers lors de la mise en forme : théorie micromécanique, simulations numériques et résultats expérimentaux.

Marcel Berveiller* — Joseph Morreale** — Eric Reubrez*

* *Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
URA CNRS, ISGMP Ile du Saulcy, 57045 Metz*

** *Laboratoire d'Étude et de Développement des Produits Plats
(LEDEPP - SOLLAC)
17, avenue des Tilleuls, 57191 Florange*

RÉSUMÉ. *On présente les récents développements décrivant à partir des méthodes de la micromécanique le comportement élastoplastique des aciers lors de la mise en forme. La relation entre mouvement des dislocations et taux de glissement plastique sur les systèmes de glissement sert à établir la loi de comportement du monocristal. La transition entre l'échelle mesoscopique (le grain) et l'échelle macroscopique (le polycristal) est réalisée à partir de l'approximation autocohérente d'une équation intégrale obtenue à partir des équations de champ du problème. Les résultats théoriques sont confrontés avec succès aux mesures expérimentales concernant l'écrouissage, l'anisotropie plastique et l'évolution des textures cristallographiques de tôles d'acier pour mise en forme.*

ABSTRACT. *Recent developments concerning the modelisation of the elastoplastic behaviour of steel sheets using micromechanical models are presented. For the polycrystalline grains, the connection of moving dislocations and the global slip rate as well as the hardening matrix describing the slip systems interaction are introduced in order to describe the behaviour of the single crystals. The field equations for heterogeneous elastoplastic metals are transformed into an integral equation which is approximate by the self consistent assumption. New results concerning hardening, plastic anisotropy, crystallographic texture evolution are compared to experimental measurements.*

MOTS-CLÉS : *plasticité, polycristal, acier, texture, anisotropie, micromécanique, simulation, mise en forme, contraintes internes, glissement, dislocations, grains.*

KEY WORDS : *plasticity, polycrystal, steel, texture, anisotropy, micromechanics, simulation, forming, residual stresses, slip, dislocations, grains.*

1. Introduction

La description du comportement élastoplastique des métaux a bénéficié de l'apport de trois types d'approches à des échelles différentes :

- à l'échelle macroscopique, on utilise une théorie continue, basée sur une décomposition additive des vitesses de déformation élastique et plastique. La partie plastique découlant de la thermodynamique des processus irréversibles (matériaux standards généralisés, règle de normalité...) utilise un nombre réduit de variables internes ou cachées qu'il est difficile d'identifier pour décrire des chargements complexes (séquentiels, non monotones, multiaxiaux).

- à une échelle intermédiaire (mesoscopique), on tire profit du fait que le mécanisme usuel de déformation plastique correspond au glissement plastique sur des systèmes de glissement cristallographiques ce qui limite le nombre de variables locales mais nécessite de suivre l'évolution de l'orientation des réseaux cristallins du polycristal. En contrepartie, il résulte que l'anisotropie du comportement plastique associée à la formation des textures du réseaux et des contraintes internes est directement prise en compte dans de tels modèles.

- à une échelle microscopique, la théorie (discrète ou continue) des dislocations et les études de métallurgie physique renseignent sur les mécanismes physiques, nombreux, divers et variés qui sont présents dans les métaux et permet, lors des transitions d'échelles microscopique - mesoscopique de ne retenir que l'essentiel des mécanismes physiques compatibles avec une modélisation, nécessairement simplifiée, du comportement global.

La revue présentée ici s'inscrit avant tout dans le cadre de la plasticité cristalline. Elle est concernée par la transition mesoscopique - macroscopique et s'inspire de quelques éléments de mécanique physique des dislocations.

L'élément de volume dont on cherche à décrire le comportement élastoplastique est polycristallin. Il contient un grand nombre de grains ou cristaux dont l'orientation des réseaux est aléatoire ou organisée (présence d'une texture cristallographique). D'un point de vue mécanique, il doit être traité comme une structure dans laquelle les lois de conservation de la quantité de mouvement, la continuité des vitesses et les principes de la thermodynamique sont vérifiés.

Dans le cadre de la théorie phénoménologique, on choisit la déformation plastique comme variable interne. L'orientation de l'écoulement plastique découle du principe du travail maximal ou règle de normalité.

Dans le cadre de la plasticité cristalline un tel principe n'est pas nécessaire ; "l'orientation" de l'écoulement plastique est prise en compte dans la loi locale décrivant le glissement plastique cristallographique à l'échelle des grains. En conséquence, l'orientation des réseaux cristallins devient une variable interne dont l'évolution doit être déduite des équations de champ et non introduite par la donnée d'une loi supplémentaire [DIE 91].

Plus généralement, si on accepte le concept d'un comportement global tangent dépendant de la structure interne du matériau, on doit distinguer quatre familles de paramètres physiques ou variables d'état dont l'évolution doit être connue et déterminée pour tout trajet de déformation.

- A l'échelle intracristalline, la multiplication des dislocations et l'évolution de leur répartition spatiale (cellules, parois, empilements...) sont responsables de l'écroutissage intracristallin. Logiquement, il conviendrait de relier l'état disloqué intragranulaire au comportement du monocristal, ce qui constitue un domaine de recherche largement ouvert. Actuellement, l'écroutissage intracristallin est plutôt décrit par l'intermédiaire d'une matrice d'écroutissage [FRA 80], reliant le taux de cisssion critique sur les systèmes de glissement au taux du glissement plastique sur les systèmes actifs. Des informations concernant cette matrice d'écroutissage peuvent être déduites des mesures expérimentales de l'écroutissage latent mais, là encore, la détermination précise et complète de cette matrice reste à effectuer. Malgré l'absence d'outils plus complets et précis, cette approche sera utilisée par la suite pour décrire le comportement intracristallin.

- A l'échelle des grains (échelle intercristalline), la désorientation relative des réseaux cristallins constitue une source de contraintes internes par l'intermédiaire des incompatibilités du champ de déformation plastique. Ces contraintes internes jouent un rôle essentiel et fondamental dans la plasticité des métaux. Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler la définition même d'une dislocation et les théories physiques qui permettent de prévoir la nature cristallographique des systèmes de glissement et les différents stades d'écroutissage des monocristaux. Au cours de l'écoulement plastique, les contraintes internes se développent du fait des incompatibilités plastiques, se relaxent (au moins partiellement) grâce à l'accommodation plastique et contribuent ainsi, de manière significative, au comportement élastoplastique macroscopique (écroutissage isotrope et cinématique).

- A la même échelle, le mécanisme de glissement plastique induit une rotation plastique qui, en relation avec les équations de compatibilité de Kröner [KRO 58], entraîne une rotation des réseaux cristallins. Ces rotations sont à l'origine des textures de déformations, phénomène connu depuis longtemps et qui est, pour une large part, responsable de l'anisotropie du comportement élastoplastique macroscopique.

- A cette même échelle, on peut signaler le changement morphologique des grains qui se superpose aux hétérogénéités plastiques intra et intergranulaires.

Face à une telle complexité, il est nécessaire d'aborder le problème de la détermination des lois de comportement élastoplastiques à partir de simplifications "homogènes".

Le comportement intracristallin des grains est construit à partir de variables cinématiques décrivant la vitesse de glissement plastique sur les systèmes de glissement actifs. Le glissement plastique obéit à la loi de Schmid [SCH 24] et l'écroutissage intracristallin est décrit par la matrice d'écroutissage discutée précédemment.

Formulée en vitesse, une telle loi de comportement a été développée par Mandel [MAN 71], Hill et Rice [HIL 72], Asaro [ASA 83], Nemat-Nasser [IWA 84]. Elle est basée sur une décomposition additive des vitesses de déformation plastique et élastique proposée pour la première fois par Kröner [KRO 58]. Cette loi de comportement est rappelée dans le chapitre 2.

Le cadre général des transitions d'échelles pour les grandeurs microscopiques et macroscopiques a été discuté par Mandel [MAN 71]. Pour les grandes déformations plastiques, Hill [HIL 72] suggère l'emploi du gradient de la vitesse et des taux des contraintes nominales pour effectuer ces transitions. Ce choix ramène les opérations d'homogénéisation à de simples opérations de moyenne volumique comme c'est le cas pour les déformations infinitésimales. Les résultats de Hill [HIL 65] sont rappelés dans le chapitre 3 et de nouvelles relations de localisations sont proposées pour les grandeurs physiques locales décrivant l'évolution de la microstructure. Dans le chapitre 3, on traite ainsi le problème de la localisation cinématique en proposant une équation intégrale similaire à celle que Dederichs et Zeller, ont démontrée dans le cas de l'élasticité [DED 73].

Différentes approximations proposées pour cette équation intégrale conduisent aux modèles classiques. Un développement de l'équation intégrale sous forme de série de Born constitue un premier pas vers les méthodes statistiques systématiques pour les solides élastoplastiques. Face à la lourdeur de la formulation et eu égard aux simplifications faites par ailleurs (loi de comportement du monocristal, absence d'hétérogénéité plastiques intragranulaires...) cette démarche systématique n'est pas poursuivie. Nous avons préféré développer l'approximation autocohérente pour l'équation intégrale, approximation présentée dans le chapitre 3.

C'est également dans le cadre de l'approximation autocohérente que sont décrites les lois d'évolution de la structure interne du polycristal.

Une telle approximation a été proposée par Iwakuma et Nemat Nasser [IWA 84] pour la plasticité du polycristal en grandes déformations plastiques en utilisant directement la solution du problème d'inclusion adaptée au problème des grandes déformations. Ici, le fait d'avoir établi la solution du problème d'inclusion à partir de l'équation intégrale permet des développements ultérieurs basés sur d'autres approximations de l'équation intégrale. Par ailleurs, les applications qui ont été développées par Iwakuma et Nemat Nasser [IWA 84] ne concernent que des problèmes plans à deux systèmes de glissements imposés a priori. Cette forte restriction ignore l'un des problèmes centraux de la plasticité des métaux qui est celui du choix de la combinaison de systèmes actifs parmi les systèmes de glissements potentiels. Or on sait, à partir d'observations expérimentales et de calculs antérieurs, que le nombre et la nature des systèmes de glissement actifs dépendent fortement du chargement et de l'état d'écrouissage du polycristal au travers, notamment de la formation des textures de déformation.

Dans le chapitre 4 de nombreux résultats nouveaux obtenus à partir de cette formulation sont présentés.

Cet article s'inspire de nombreux travaux issus :

- de la théorie des dislocations [KRO 58], [DEW 73], [HAN 91], [MVG 88]
- des études de plasticité cristalline [HUT 70], [HIL 65], [BER 87], [BER 80], [BER 81], [HIH 85], [KRO 61]
- des théories phénoménologiques [MAU 92], [LEM 90], [HIL 60], [LIP 81],

2. Le comportement élastoplastique du monocristal

2.1. Mécanisme de déformation des métaux par glissement plastique

La déformation élastique des grains d'un polycristal résulte des transformations géométriques des réseaux cristallins et constitue une variable d'état observable par des techniques de diffraction du rayonnement X ou des particules (neutron, électrons,...). Elle peut donc être utilisée directement pour décrire le comportement thermoélastique à partir des principes généraux de la thermodynamique.

Les déformations inélastiques, en général irréversibles et conduisant à la plasticité, sont le résultat du mouvement des défauts de la structure cristalline parfaite.

A basse température (par rapport à la température de fusion du métal), les mécanismes prépondérants sont constitués par :

- le mouvement des défauts linéaires (dislocations)
- le mouvement des interfaces (maclage)
- les changements de phases à l'état solide.

Pour les métaux usuels, (acier, cuivre, aluminium, etc.) et leurs alliages, la plasticité résulte d'un mouvement athermique des dislocations sur des plans de glissement [TAY 38].

Sans rentrer dans tous les détails de la théorie des dislocations [KRO 58], [DEW 73] ; on indique dans le paragraphe 2.2, une transition d'échelle microscopique - mesoscopique de type cinématique qui permet d'introduire le taux de glissement plastique comme variable (de procédé et non d'état) pouvant décrire le processus de plastification d'un cristal.

2.2. Transition entre mouvement de dislocations et glissement plastique cristallographique

Une ligne de dislocation correspond à la frontière (L) d'une surface plané (S) de normale unitaire \vec{n} au travers de laquelle le déplacement des particules est discontinu.

La discontinuité est décrite par le vecteur de Burgers \vec{b} uniforme sur S et caractéristique du métal.

Le champ de la distorsion plastique correspondant β^p peut s'écrire sous la forme

$$\beta_{ij}^p(r) = + n_j b_i \delta(S) \tag{1}$$

où $\delta(S) n_j$ est relié à la distribution de Dirac $\delta(R) = \delta(r - r')$ par la relation

$$n_j \delta(S) = \int_S \delta(r - r') n_j dS' \tag{2}$$

En général, dans les réseaux cristallins à forte symétrie (CC ou CFC), les vecteurs b et \vec{n} possèdent des valeurs discrètes et en nombre fini, attachées au réseau cristallin.

Le module b du vecteur de Burgers est le même pour toutes les dislocations et on écrit $b_i = b m_i$ (\vec{m} = vecteur unitaire).

Un système de glissement g sera défini par la donnée de la normale au plan de glissement n_i^g et la direction du vecteur de Burgers m_i^g .

Dans ces conditions, (1) se réécrit sous la forme

$$\beta_{ij}^p = b n_j m_i \delta(S) \tag{3}$$

pour une surface S unique et pour un ensemble de dislocation sur plusieurs systèmes de glissement

$$\beta_{ij}^p = \sum n_j^g m_i^g \delta(S^g) \tag{4}$$

La valeur moyenne $\overline{\beta^p}$ de β^p sur un volume V de monocristal s'écrit

$$\overline{\beta_{ij}^p} = \frac{1}{V} \int_V b \sum_g m_i^g n_j^g \delta(S^g) dV \tag{5}$$

soit, en supposant m^g, n^g et b uniformes sur V

$$\overline{\beta_{ij}^p} = b \sum_g m_i^g n_j^g \frac{1}{V} \int_V \sum_g \delta(S^g) dV \tag{6}$$

L'accroissement de la distorsion plastique moyenne provient du mouvement de la frontière des surfaces S^g si bien que

$$\dot{\beta}_{ij}^p = \frac{d}{dt} \bar{\beta}_{ij} = b \sum_g m_i^g n_j^g \frac{d}{dt} \frac{1}{V} \int_v \sum_g \delta(S^g) dV \quad (7)$$

Sans décrire dans le détail le mouvement discret des dislocations, on se contente, en plasticité cristalline, d'introduire une vitesse de glissement plastique $\dot{\gamma}^g$ par système de glissement g pour décrire le processus de plastification.

On a :

$$\dot{\beta}_{ij}^p = \sum m_i^g n_j^g \dot{\gamma}^g \quad (8)$$

et, par identification avec (7)

$$\dot{\gamma}^g = b \frac{d}{dt} \frac{1}{V} \int_v \delta(S^g) dV \quad (9)$$

(9) correspond à la relation d'Orowan [ORO 42] écrite sous une forme différente.

La structure de la relation (8) est fondamentale dans la mesure où l'orientation de l'écoulement plastique d_{ij}^p est donnée par l'orientation du réseau cristallin (vecteurs \vec{m}^g et \vec{n}^g).

On a

$$d_{ij}^p = \frac{1}{2} (\dot{\beta}_{ij}^p + \dot{\beta}_{ji}^p) = \sum_g \frac{1}{2} (m_i^g n_j^g + m_j^g n_i^g) \dot{\gamma}^g \quad (10)$$

Il en est de même du taux de rotation plastique ω_{ij}^p

$$\omega_{ij}^p = \frac{1}{2} (\dot{\beta}_{ij}^p - \dot{\beta}_{ji}^p) = \sum_g \frac{1}{2} (m_i^g n_j^g - m_j^g n_i^g) \dot{\gamma}^g \quad (11)$$

qui, dans les théories s'inscrivant dans le cadre de la plasticité cristalline, découle de la connaissance des variables de process $\dot{\gamma}^g$

Il n'est donc pas nécessaire, comme c'est le cas des théories continues phénoménologiques, d'introduire une loi de comportement additionnelle portant sur le taux de rotation plastique.

La contrepartie de cet avantage certain est qu'il est nécessaire de connaître l'orientation des réseaux cristallins (les repères directeurs de Mandel [MAN 71]) et

de suivre leur évolution au cours de l'écoulement plastique, évolution qui découle naturellement des relations de champ décrites dans le chapitre 3 et de la loi de comportement du monocristal formulée dans le paragraphe suivant.

Un autre avantage qui découle de la description des mécanismes physiques de la plasticité cristalline à l'échelle microscopique puis mesoscopique réside dans le fait que l'anisotropie du comportement global d'un polycristal associé à la présence d'une texture des réseaux cristallins (la statistique des repères directeurs) est directement prise en compte.

La description de l'écoulement plastique par l'intermédiaire des relations (8) et (9) semble être bien adaptée au cas du glissement multiple homogène mettant en jeu plusieurs systèmes de glissement et lorsque la répartition des dislocations mobiles et immobiles est relativement aléatoire.

Cependant, dans de nombreuses situations (chargement cyclique,...), on observe la formation de cellules à faible densité de dislocations et de parois à forte densité de dislocations [HAN 91], [MUG 88]. A cette hétérogénéisation intragranulaire est associée un écrouissage non local [BER 93] qui nécessite une description plus fine que celle qui est adoptée ici.

2.3. Loi de comportement du monocristal

A l'échelle mesoscopique, le gradient de la vitesse des particules $g_{ij} = v_{i,j}$ est composé additivement d'une partie élastique $d^e + w^e$ relative au réseau cristallin et d'une partie plastique $d^p + w^p$ relative au mouvement collectif moyen des dislocations de sorte que

$$v_{i,j} = (d_{ij}^e + w_{ij}^e) + (d_{ij}^p + w_{ij}^p) \quad (12)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$v_{i,j} = d_{ij} + w_{ij} \equiv g_{ij} \quad (13)$$

D'après (8) la partie plastique est décomposée en terme R^n et S^n prenant en compte l'orientation moyenne du réseau cristallin sur l'élément de volume monocristallin et en la variable $\dot{\gamma}^n$ décrivant globalement le processus de mouvement des dislocations

$$d_{ij}^p = \sum_g R_{ij}^g \dot{\gamma}^g, \quad w_{ij}^p = \sum_g S_{ij}^g \dot{\gamma}^g \quad (14)$$

$$R_{ij}^g = \frac{1}{2} (m_i^g n_j^g + m_j^g n_i^g) \quad (15)$$

$$S_{ij}^g = \frac{1}{2} (m_i^g n_j^g - m_j^g n_i^g)$$

Pour les métaux, le comportement élastique est décrit avec suffisamment de précision par une approximation linéaire utilisant les constantes élastiques du cristal C sous la forme

$$\nabla \sigma_{ij} = C_{ijkl} d_{kl}^e - \sigma_{ij} d_{kk}^e \quad (16)$$

$$\nabla \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}^e \sigma_{kj} + w_{kj}^e \sigma_{ki}$$

est la dérivée corotationnelle avec le réseau cristallin du tenseur de Cauchy σ .

Il reste à préciser le comportement de la partie plastique $d^P + w^P$ pour laquelle on se base sur l'expression de la force thermodynamique sur une dislocation (formule de Peach et Koehler) [PEA 50] ou, plus généralement, sur la loi de Schmid [SCH 24].

La puissance des efforts extérieurs $\dot{\mathcal{T}}^T$, décrite par les contraintes σ dans un champ de vitesse $v_i = (d_{ij} + w_{ij}) x_j$ s'écrit ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{T}}^T &= \sigma_{ij} v_{i,j} \\ &= \sigma_{ij} d_{ij}^e + \sigma_{ij} d_{ij}^P \end{aligned} \quad (17)$$

et la partie plastique $\dot{\mathcal{T}}^{Tp} = \sigma_{ij} d_{ij}^P$ se met sous la forme

$$\dot{\mathcal{T}}^{Tp} = \sum_n \sigma_{ij} R_{ij}^n \dot{\gamma}^n \quad (18)$$

dans laquelle on voit apparaître la cission réduite sur le système de glissement n

$$\tau^n = \sigma_{ij} R_{ij}^n \quad (19)$$

Basé sur les observations expérimentales et sur l'analyse physique des conditions de mouvement de dislocations [TAY 38], on observe que le système n n'est actif $\dot{\gamma}^n \neq 0$ que lorsque la cission réduite τ^n atteint une valeur critique τ_c^n (γ^n) dépendant de l'état d'écroutissage du métal c'est-à-dire, ici du glissement plastique cumulé γ^n sur les différents systèmes de glissement.

Ces remarques se traduisent formellement par les conditions

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^n &= 0 & \text{si } \tau^n = \sigma_{ij} R_{ij}^n < \tau_c^n(\gamma^n) & \quad \forall (\widehat{\sigma_{ij} R_{ij}^n}) \\ \dot{\gamma}^n &= 0 & \text{si } \tau^n = \tau_c^n & \quad \text{si } \widehat{\sigma_{ij} R_{ij}^n} \leq 0 \\ \dot{\gamma}^n &> 0 & \text{si } \tau^n = \tau_c^n & \quad \text{si } \widehat{\sigma_{ij} R_{ij}^n} = \tau_c^n(\gamma^n) \end{aligned} \quad (20)$$

Le terme $\widehat{\sigma_{ij} R_{ij}^n}$ se met également sous la forme

$$\tau^n = \overset{\vee}{\sigma_{ij}} R_{ij}^n \tag{21}$$

et la variation τ_c^n peut s'écrire

$$\dot{\tau}_c^n = \frac{\partial \tau_c^n}{\partial \gamma^m} \frac{d\gamma^m}{dt} = H^{nm} \dot{\gamma}^m \tag{22}$$

où H_{nm} désigne la matrice d'écroissage qui représente et décrit les interactions entre systèmes de glissement.

Pour les systèmes actifs on a $R_{ij}^n \overset{\vee}{\sigma_{ij}} = H^{nm} \dot{\gamma}^m$ (23)

Pour une combinaison de systèmes de glissement actifs, il est alors possible d'écrire la loi de comportement de l'élément de volume monocristallin à partir de (13), (16) et (23)

On a :

$$R_{ij}^n \overset{\vee}{\sigma_{ij}} = R_{ij}^n C_{ijkl} (d_{kl} - d_{kl}^p) - R_{ij}^n \sigma_{ij} d_{kk}^e \tag{24}$$

soit d'après (23)

$$H^{nm} \dot{\gamma}^m = R_{ij}^n C_{ijkl} (d_{kl} - R_{kl}^m \dot{\gamma}^m) - R_{ij}^n \sigma_{ij} d_{kk}^e \tag{25}$$

puisque $d_{kk}^e = d_{kk}$ ($d_{kk}^p = 0$).

Cette relation se met sous forme

$$(H^{nm} + R_{ij}^n C_{ijkl} R_{kl}^m) \dot{\gamma}^m = R_{ij}^n (C_{ijkl} - \sigma_{ij} \delta_{kl}) d_{kl} \tag{26}$$

ou, en introduisant la matrice

$$M = (H + R C R)^{-1} \tag{27}$$

$$\dot{\gamma}^n = M^{nm} R_{ij}^m (C_{ijkl} - \sigma_{ij} \delta_{kl}) d_{kl} \tag{28}$$

D'après (16) (24) et (28), la loi de comportement de l'élément de volume mesoscopique (ici le grain) s'écrit :

$$\overset{\vee}{\sigma_{ij}} = \left[C_{ijkl} - C_{ijpq} R_{pq}^n M^{nm} R_{rs}^m (C_{rskl} - \sigma_{rs} \delta_{kl}) \right] g_{kl} \tag{29}$$

Pour la transition de l'échelle mesoscopique vers l'échelle macroscopique (le polycristal), on a intérêt à introduire le taux de contraintes nominales \dot{n}_{ij} relié au taux corotationnel $\overset{\vee}{\sigma}_{ij}$ par

$$\dot{n}_{ij} = \overset{\vee}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} g_{kk} - (d_{ik} \sigma_{kj} + d_{jk} \sigma_{ki}) - (w_{ik}^p \sigma_{kj} + w_{jk}^p \sigma_{ki}) + g_{jk} \sigma_{ki} \quad (30)$$

et à exprimer le comportement local sous la forme

$$\dot{n}_{ij} = l_{ijkl} g_{kl} \quad (31)$$

avec, d'après (29) et (30)

$$l_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{1}{2} (\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj}) - \frac{1}{2} (\delta_{lj} \sigma_{ki} - \delta_{jk} \sigma_{li}) - (C_{ijmn} R_{mn}^g + S_{im}^g \sigma_{mj} - S_{mj}^g \sigma_{mi}) M^{gh} (R_{pq}^h C_{pqkl} - R_{pq}^h \sigma_{pq} \delta_{kl}) \quad (32)$$

Le tenseur l dépend de l'état de contraintes local, des conditions de plastification (20), de l'orientation du réseau par l'intermédiaire des tenseurs R et S et du tenseur C . L'histoire du chargement intervient par l'intermédiaire des amplitudes de glissement dont dépendent les cissions critiques sur les systèmes de glissement.

Si l'élasticité est isotrope et décrite par les modules de Lamé (λ, μ) sous la forme

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

et si on néglige les termes en σ par rapport aux termes C , on a

$$M = (H^{nm} + 2\mu R_{ij}^n R_{ij}^m)^{-1}$$

et pour l

$$l_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - 4\mu^2 R_{ij}^g M^{gh} R_{kl}^h$$

3. Localisation et transition d'échelle

Pour décrire la réponse élastoplastique du polycristal, il est nécessaire d'effectuer les opérations d'homogénéisation à partir de la connaissance des champs locaux. Ceux-ci peuvent être reliés au chargement imposé par l'intermédiaire des tenseurs localisation.

Le choix des grandeurs conjuguées contraintes - déformations (ou de leur vitesse) pour décrire le comportement local n'est pas forcément celui qui facilite les opérations d'homogénéisation ou qui simplifie les relations d'équilibre et de compatibilité.

Ainsi, s'il paraît naturel d'employer les contraintes de Cauchy, σ_{ij} , pour décrire les relations de comportement locales et globales, il s'avère que, dans ce cas, les transitions d'échelles sont plus complexes à écrire.

Un autre choix, plus naturel parce qu'il est relié aux conditions aux limites sur la surface du solide dans la configuration actuelle, consiste à utiliser le gradient de la vitesse et le taux de contraintes nominales \dot{n} pour décrire à la fois :

- les lois d'équilibre et de compatibilité
- les transitions d'échelles.

Ce choix simplifie les équations précédentes mais complique légèrement l'écriture des relations de comportement.

Soient n_{ij} les composantes du tenseur des contraintes nominales locales et v_i le vecteur vitesse au point r .

Le gradient de la vitesse $v_{i,j}$ se décompose en une partie symétrique d_{ij} et une partie antisymétrique w_{ij} telles que :

$$v_{i,j} = d_{ij} + w_{ij} \tag{34}$$

Ces relations assurent la compatibilité de la transformation puisqu'avec (34) l'incompatibilité du champ d est nulle.

En choisissant la configuration actuelle comme configuration de référence, et en désignant par σ_{ij} les contraintes de Cauchy, on a :

$$\dot{n}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k} \sigma_{kj} + \sigma_{ij} d_{kk} \tag{35}$$

et

$$\dot{n}_{ij,i} + \rho \dot{f}_i = 0 \tag{36}$$

ρ désigne la masse volumique actuelle et f_i les forces massiques. Pour le solide de volume V et de frontière S , on impose des forces surfaciques dF_i telles que :

$$dF_i = \dot{N}_{ij} v_j dS \tag{37}$$

On a alors, si \dot{N}_{ij} est uniforme sur la surface :

$$\dot{N}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \dot{n}_{ij}(r) dV \tag{38}$$

De même, pour un solide macrohomogène, le gradient de la vitesse macroscopique $V_{i,j}$ s'écrit :

$$V_{i,j} = \frac{1}{V} \int_v v_{i,j}(\mathbf{r}) dV \quad (39)$$

Les relations cinématique (34), d'équilibre (36) et les relations entre grandeurs locales et globales (38) et (39) prennent alors la même forme que pour les théories en déformations infinitésimales [HIL 72].

La forme des relations de comportement local doit également être exprimée à partir du gradient de la vitesse locale et des vitesses de contraintes nominales.

On pose (31) :

$$\dot{n}_{ij}(\mathbf{r}) = l_{ijkl}(\mathbf{r}) v_{k,l}(\mathbf{r}) \quad (40)$$

Le tenseur l est déterminé dans le chapitre 2 à partir du comportement élastique et des mécanismes de glissement plastique.

En introduisant le tenseur localisation cinématique :

$$v_{i,j}(\mathbf{r}) = A_{ijkl}(\mathbf{r}) V_{k,l} \quad (41)$$

le comportement global s'écrit :

$$\dot{N}_{ij} = \left\{ \frac{1}{V} \int_v l_{ijkl}(\mathbf{r}) A_{klmn}(\mathbf{r}) dV \right\} V_{m,n} \quad (42)$$

soit

$$\dot{N}_{ij} = L_{ijkl}^e V_{k,l} = L_{ijkl}^e G_{kl} \quad (43)$$

où $G_{kl} = V_{k,l}$ désigne le gradient de la vitesse macroscopique.

Le tenseur L^e caractérise ainsi le comportement du polycristal.

Il reste à déterminer le champ du tenseur localisation $A(\mathbf{r})$ qui se déduit en général d'une équation intégrale.

3.1. Equation intégrale

La détermination des tenseurs de localisation constitue le problème central des méthodes d'homogénéisation des propriétés des milieux microhétérogènes. Dans ce travail, ce problème est résolu en considérant le milieu microhétérogène comme étant un milieu continu à microstructure.

On résout alors, pour la configuration actuelle, un problème de structure, c'est-à-dire on recherche une solution (en vitesse ou contrainte) satisfaisant les équations d'équilibre, de compatibilité et vérifiant les relations de comportement.

En élasticité, la formulation d'un tel problème conduit à une équation intégrale [DED 73] dont la solution formelle est analogue à (41). En élastoplasticité, Berveiller et Zaoui [BER 84] ont formulé une équation intégrale pour les petites déformations.

Ici, la même démarche est utilisée pour résoudre le problème des grandes déformations plastiques, formulé en vitesse. [LIP 89]

D'après (34) et (36) on a à écrire :

- les équations d'équilibre

$$\dot{n}_{ij,i} = 0 \tag{44}$$

- les relations définissant d et w à partir du gradient de la vitesse v

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{45}$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i})$$

- les relations de comportement local

$$\dot{n}_{ij} = l_{ijkl} v_{k,l} \tag{46}$$

Nous nous limitons ici au problème pour lequel on impose sur la frontière actuelle une vitesse V_i donnée.

En éliminant n_{ij} de (44) et de (46) on obtient la relation :

$$(l_{ijkl} v_{k,l})_{,i} = 0 \tag{47}$$

Comme pour les milieux linéaires, on décompose le tenseur l en une partie uniforme L^0 et les déviations δl (r) telles que ;

$$l(r) = L^0 + \delta l(r) \tag{48}$$

L'équation (47) s'écrit maintenant :

$$L^0_{ijkl} v_{k,li} + (\delta l_{ijkl} v_{k,l})_{,i} = 0 \tag{49}$$

Le deuxième terme apparaît comme des forces de volume et on peut utiliser un tenseur de Green G^* adjoint à (49) défini par :

$$L_{ijkl}^0 G_{km,li}^* (r - r') + \delta_{jm} \delta (r - r') = 0 \quad (50)$$

pour transformer (49) en équation intégrale.

En multipliant (49) par $G_{jm} (r - r')$ et (50) par $v_j (r)$, on obtient par différence :

$$\left\{ G_{jm}^* L_{ijkl}^0 v_{k,l} - v_j L_{lkji}^0 G_{mj,l}^* \right\}_{,i} + G_{jm}^* \dot{f}_j - v_m \delta (r - r') = 0 \quad (51)$$

avec

$$\dot{f}_j = (\delta l_{ijkl} v_{k,l})_{,i}$$

Par intégration sur V , on a :

$$\begin{aligned} v_m (r') &= \int_S \left\{ G_{jm}^* (L_{ijkl}^0 + \delta l_{ijkl}) v_{k,l} - v_j L_{lkji}^0 G_{km,l}^* \right\} n_i dS \\ &+ \int_V G_{jm,i}^* (r - r') \delta l_{ijkl} (r) v_{k,l} (r) dV \end{aligned} \quad (52)$$

Si v_j est imposé sur S , alors $G_{jm}^* = 0$ sur S et le premier terme du second membre de (52) n'est autre que la vitesse $v_m (r')$ du milieu homogène L^0 soumis aux mêmes conditions sur S .

On a alors

$$v_m (r') = v_m^0 (r) + \int_V G_{jm,i}^* (r - r') \delta l_{ijkl} (r') v_{k,l} (r') dV \quad (53)$$

soit pour le gradient $v_{m,n} = g_{mn}$

$$g_{mn}(r) = g_{mn}^0 (r) + \int_V G_{jm,in}^* (r - r') \delta l_{ijkl} (r') g_{kl} (r') dV' \quad (54)$$

qui est l'équation intégrale recherchée.

3.2. Approximation autocohérente

La résolution exacte de (54) paraît hors de portée pour une microstructure quelconque. Pour les polycristaux métalliques tels que les aciers, on peut

raisonnablement admettre que le milieu est suffisamment désordonné pour que l'approximation autocohérente soit justifiée.

Dans cette approche on tire profit de la propriété du tenseur de Green modifié $\Gamma_{mnij} = G_{jm, in}^*$ de pouvoir être décomposé en une partie locale $E^\circ \delta(r - r')$ et une partie "à distance" décroissant rapidement [DED 73].

$$\Gamma(r - r') = E^\circ \delta(r - r') + F^\circ(e) / (r - r')^3$$

$$\text{où } \vec{e} = \vec{r} - \vec{r}' / |r - r'|$$

On peut alors décomposer (54) en trois termes

$$g(r) = G + E^\circ \delta l(r) g(r) + \int_V F^\circ(e) \frac{1}{(r - r')^3} \delta l(r') g(r') dV' \quad (56)$$

Au lieu de calculer le terme intégral, on cherche à l'affaiblir en imposant au terme $\delta l(r') g(r')$ de fluctuer autour d'une valeur moyenne nulle. $g(r)$ fluctuant autour de G ($= \frac{1}{V} \int_V g(r) dV$) et les $l(r)$ étant donnés, on ne peut jouer que sur les modules tangents L° du milieu homogène de référence choisis pour établir l'équation intégrale (56).

Les modules tangents $L^{\circ*}$ qui annulent la valeur moyenne sur le volume de $\delta l(r) g(r)$ s'obtiennent par :

$$\frac{1}{V} \int_V (l(r) - L^{\circ*}) g(r) dV = 0 \quad (57)$$

Mais comme $\dot{n} = l(r) g(r)$, on a finalement

$$\dot{N} = L^{\circ*} G \quad (58)$$

ce qui montre que $L^{\circ*}$ doit être choisi égal au tenseur des modules tangents du milieu homogène équivalent.

L'équation (56) qui constitue l'approximation autocohérente de (54) s'écrit maintenant

$$g(r) = G + E^e \delta l_e(r) g(r) \quad (59)$$

où la partie locale E^e et la fluctuation $\delta l(r) = l(r) - L^e$ sont calculées pour le milieu homogène équivalent L^e .

Dans le processus d'homogénéisation décrit au début du chapitre 3, le tenseur localisation retenu ici s'écrit [ESH 57]

$$A(r) = (I - E^e \delta l_e(r))^{-1}$$

Ce choix, exact pour les milieux parfaitement désordonnés permet également de décrire l'évolution de la structure interne du polycristal [LIP 90] caractérisée par :

- la rotation des grains (formation des textures)
- les contraintes internes
- l'écroissage (évolution des $\dot{\gamma}$ donc des $\dot{\tau}_c^n$)
- la forme des grains.

Les algorithmes numériques sont précisés dans [LIP 90] et un logiciel appelé "Crystal" a été développé. Dans le chapitre suivant on présente les résultats concernant certaines tôles d'acier utilisées pour la mise en forme.

4. Résultats théoriques et expérimentaux

On présente des résultats obtenus pour des tôles en acier à faible teneur en carbone destinées à la mise en forme.

Ces tôles sont obtenues par les procédés classiques (laminage à chaud, à froid, recuit,...) et possèdent donc une texture cristallographique initiale mesurée par les techniques classiques de rayons X [REU 92]. La forme moyenne des grains est déterminée par métallographie.

Le réseau cristallin étant du type CC, le glissement plastique est décrit par deux familles de systèmes de glissement $\{112\} \langle 111 \rangle$ et $\{112\} \langle \bar{1}11 \rangle$ ce qui conduit à 48 systèmes de glissement si on distingue les deux sens de glissement.

Le comportement élastique a été supposé isotrope (modules de Lamé $\lambda = 120$ GPa, $\mu = 80$ GPa).

Du fait du traitement de recuit final imposé au polycristal, on peut admettre que les contraintes internes sont nulles dans l'état de référence et que la cission critique initiale τ_c^0 est identique sur tous les systèmes de glissement. Cette valeur ainsi que les paramètres (p , L , a^{gh}) entrant dans la matrice d'écroissage prise, à partir de considération de métallurgie physique sous la forme

$$H^{gh} = \frac{\mu^2 b}{L (\tau_c^0)^p} a^{gh}$$

sont obtenus à partir d'une simulation d'un essai de traction (dans la direction de laminage D.L.) et comparaison avec les mesures expérimentales (figure 1).

On constate que, jusqu'à des déformations plastiques de l'ordre de 20 %, le modèle est capable de bien représenter les résultats expérimentaux. La forte non linéarité de la courbe de traction jusqu'à des déformations de l'ordre de 5 % provient de la plastification progressive des systèmes de glissement dans les différents grains du polycristal.

Les paramètres p , L et a^{gh} étant identifiés, on utilise le modèle pour décrire la réponse du matériau lors de chargements différents.

Du fait de la texture initiale, la tôle possède une anisotropie plastique que l'on peut caractériser partiellement à partir de la mesure du coefficient de Lankford (rapport entre les déformations en largeur et en épaisseur sur une éprouvette de traction) lors d'essais uniaxiaux effectués à 45° de la direction de laminage et dans la direction transverse. La figure 2 présente l'évolution du coefficient de Lankford avec la déformation axiale pour les trois essais définis précédemment (DL, DT, 45°). Les mesures de r à 10 % de déformation, également reportés sur la figure 2, montrent que l'anisotropie plastique due à la texture cristallographique est relativement bien prise en compte dans le modèle.

La figure 3 présente une coupe de la surface de plasticité initiale dans le plan DL - DT pour différents niveaux de déformation plastique équivalente au sens de Von Mises (0.2 % - 2 %). La valeur du seuil plastique à 0.2 % de déformation équivalente obtenu lors des essais de traction selon DL et DT est également reproduite.

Ces surfaces peuvent être approchées par un critère de plasticité anisotrope (Hill par exemple).

Après un écrouissage correspondant à un chargement en rétreint de 25 %, la forme des surfaces de plasticité est profondément modifiée traduisant simultanément un écrouissage isotrope et cinématique mais également une distorsion de la surface (figure 4). Les mesures de seuil en traction selon DL et DT reportés sur la figure 4 montrent que le phénomène d'écrouissage complexe est pris en compte dans le modèle.

L'origine de l'écrouissage est multiple et correspond :

- à une distribution complexe des dislocations dans les grains et à une évolution anisotrope de cissions critiques,
- à la présence de contraintes internes intra et intergranulaires associées aux incompatibilités du champ plastique,
- à la rotation des réseaux cristallins conduisant à la formation ou la transformation des textures.

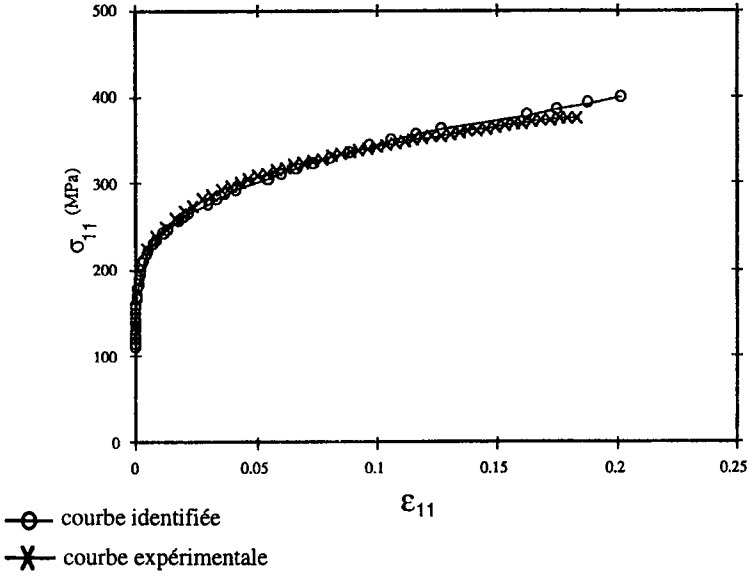


Figure 1. Comportement en traction uniaxiale (parallèle à la direction de laminage) d'un polycristal d'acier doux dont la texture est donnée sous forme de figures de pôles sur les figures 5 et 6

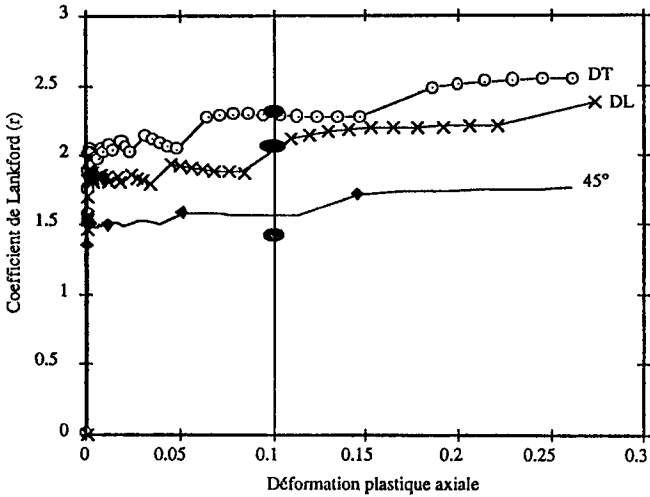


Figure 2. Evolution du coefficient de Lankford pour des essais de traction selon DL, DT et 45° de DL. Comparaisons avec les mesures expérimentales (● ● ●) à 10 % de déformation plastique

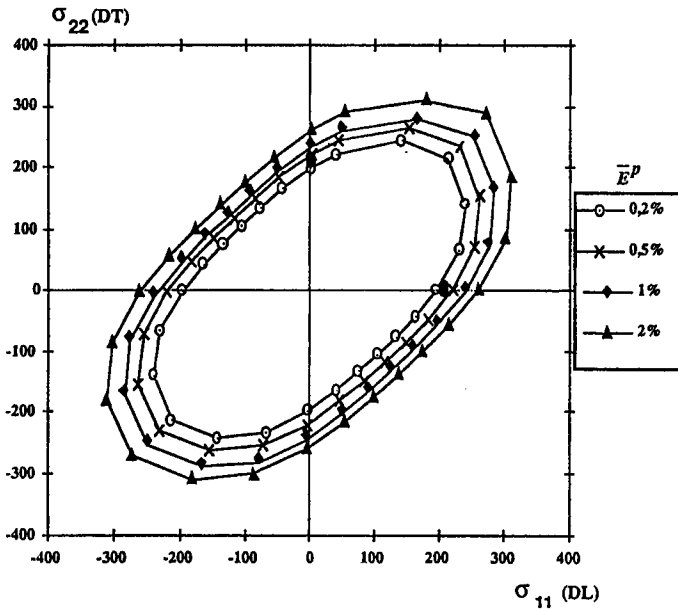


Figure 3. Surfaces de plasticité initiales dans le plan DL, DT pour différents niveaux de déformation plastique équivalente \bar{E}^P . Comparaison avec les mesures expérimentales en traction (● ●) (selon DT et DT) pour une déformation plastique équivalente de 0,2 %

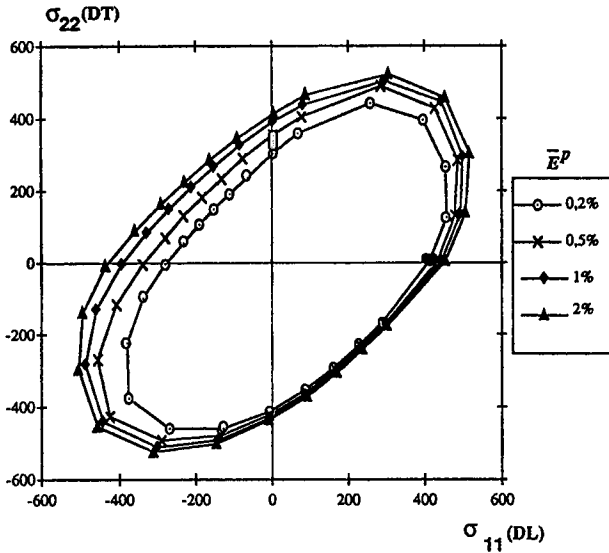


Figure 4. Surfaces de plasticité dans le plan DL, DT après une prédéformation plastique en rétreint de 25 %. Comparaison avec les mesures expérimentales en traction (● ●) pour une déformation plastique équivalente de 0,2 %

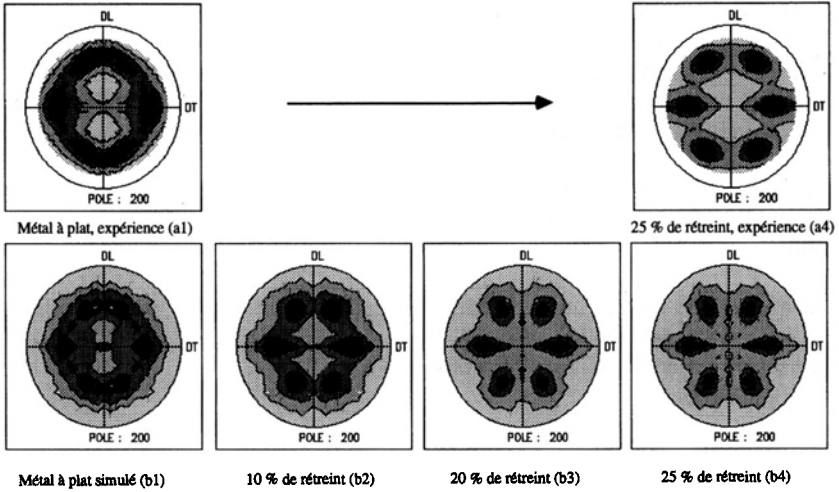


Figure 5. Evolution de la figure de pôle 200 durant le rétreint

a : figures de pôles expérimentales (a1 : $\bar{E}^P = 0\%$, a4 : $\bar{E}^P = 25\%$)

b : figures de pôles simulées (b1 : $\bar{E}^P = 0\%$, b2 : $\bar{E}^P = 10\%$, b3 : $\bar{E}^P = 20\%$, b4 : $\bar{E}^P = 25\%$,)

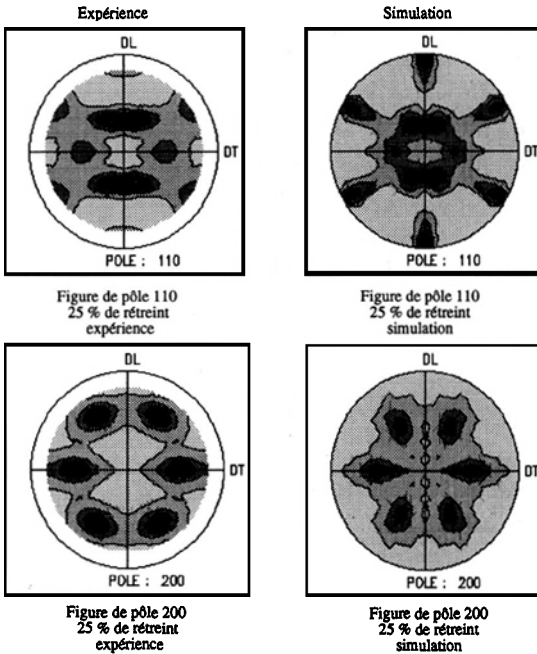


Figure 6. Comparaisons simulation - mesures expérimentales pour les figures de pôles 110 et 200 après un rétreint de 25 %

La figure 5 indique sous forme de figure de pôle 200 l'évolution de cette texture lors du trajet en rétreint décrit dans la figure 4. Les figures a1 et a4 correspondent aux mesures expérimentales des pôles 200 alors que celles notées b1 - b4 sont obtenues, pour différents niveaux de déformation, à partir du modèle. La figure 6 décrit l'état initial et final des pôles 110 et 200 après un rétreint de 25 %.

On constate que la texture évolue rapidement (les nouvelles orientations sont présentes dès 10 % de rétreint) et continue à se renforcer lors de l'écoulement plastique.

L'évolution complexe de la distribution de l'orientation des grains, fortement dépendante du trajet de déformation, explique la difficulté d'une représentation unifiée et phénoménologique du phénomène d'écrouissage.

5. Bibliographie

- [ASA 83] ASARO R.J., Micromechanics of crystal and polycrystals, *Adv. in Appl. Mechanics* Vol 23 p. 1 - 115 (1983)
- [BER 87] BERADAI CH., BERVEILLER M., LIPINSKI P., *Int. J. Plasticity* 3 (1987) 13
- [BER 93] BERVEILLER M., MULLER D., KRATOCHVIL J., Non local versus local elastoplastic behavior of heterogeneous materials. *Int. J. Plasticity* 9 (1993) 633 - 652
- [BER 81] BERVEILLER M., ZAOUÏ A. *Méthodes self consistantes en mécanique des solides hétérogènes. Comp. rhéologique et structure des matériaux*. Ed. ENPC, Paris (C. HUET, A. ZAOUÏ Ed) (1981) p. 175 - 198
- [BER 84] BERVEILLER M., ZAOUÏ A., Modelling of the plastic behavior of inhomogeneous media. *J. Engng Mat. and Technology* 106 (1984) p. 295 - 299
- [BER 86] BERVEILLER M., ZAOUÏ A., *Some applications of the self consistent scheme in the yield of plasticity and texture of metallic polycrystals in "Large déformations of solids"* Ed. J. Gittus., J. Zarka, S. Nemat - Nasser Elsevier Applied Science (1986)
- [DEW 73] DE WITT R., Theory of disclinations : Continuous and discrete disclinations in anisotropic elasticity. *J. of Research of the NBS* 77A (1973) 49 - 100
- [DED 73] DEDERICHS P.H., ZELLER R., Variational treatment of the elastic constants of disordered materials, *Z. Phys.* 259 (1973) 103
- [DIE 91] DIEPOLDER W., MANNE V., LIPPMANN H., The Cosserat continuum, a model for grain rotations in metals, *Int. J. Plasticity* 7 (1991) 313 - 328
- [ESH 57] ESHELBY J.D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Roy. Soc. London* A241 (1957)
- [FRA 80] FRANCIOSI P., BERVEILLER M., ZAOUÏ A., Latent hardening in copper and aluminium single crystals. *Acta Met* 28 (1980) 273 - 283
- [HAN 91] HANSEN N., JENSEN D.J., Microscopic and crystallographic Aspect of flow stress anisotropy. *Proc. Plasticity* 91 Grenoble

- [HIH 85] HIHI A., BERVEILLER M., ZAOUI A., Nouvelle formulation du schéma autocohérent en plasticité des polycristaux métalliques. *J. Nec. Théorique et Appl.* 4 (1985) 201 - 219
- [HIL 65] HILL R., A self consistent mechanics of composites materials *J. Nech. Phys. Solids* 13 (1965) 213
- [HIL 72] HILL R., On constitutive macrovariables for heterogeneous solids at finite strain. *Proc. Roy. Soc. London* A326 (1972) 131
- [HIL 60] HILL R., *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press Oxford (1960)
- [HIL 65] HILL R., Continuum micro mechanics of elastoplastic polycrystals *J. Rech. Phys. Solids* 13 (1965) 89
- [HIL 72] HILL R., RICE J.R., Constitutive analysis of elastic - plastic crystals at arbitrary strain, *J. Mech. Phys. Solids* 20 (1972) 401
- [HUT 70] HUTCHINSON J.W., Elastic plastic behavior of polycrystalline metals and composites. *Proc. Roy. Soc. London* A319 (1970) 247
- [DED 73] DEDERICHS P.H., ZELLER R., Variational treatment of the elastic constants of disordered materials, *Z. Phys* 259 (1953) 103
- [IWA 84] IWAKUMA T., NEMAT - NASSER S., Finite elastic - plastic deformation of polycrystalline metals. *Proc. Roy. Soc. (London)* A 394 (1984) 87
- [KRÖ 58] KRÖNER E., Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Z. Phys.* 151 (1958) 504
- [KRÖ 58] KRÖNER E., *Kontinuums theoric der versetzungen und Eigenspannungen* Springer (1958) Berlin
- [KRÖ 61] KRÖNER E., Zur plastischen verformung des Vielkristalls *Acta Met.* 9 (1961) 155
- [LEM 90] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press (1990)
- [LIP 89] LIPINSKI P., BERVEILLER M., Elastoplasticity of micro in homogeneous metals at large strains. *Int. J. Plasticity* 5 (1989) p. 149 - 172
- [LIP 90] LIPINSKI P., KRIER J., BERVEILLER M., Elastoplasticité des métaux en grandes déformations : comportement global et évolution de la structure interne. *Rev. Phys. Appl.* 25 (1990) 361 - 388
- [LIP 81] LIPMANN H., *Mechanik des plastischen FliessBens* Springer (1981) Berlin
- [MAU 92] MAUGIN G.A., The thermomechanics of plasticity and fracture. Cambridge Texts in applied Mathematics Clarendon Press
- [MAN 71] MANDEL J., Plasticité classique et viscoplasticité, Lecture Notes CISM udine - Springer Verlag Vienna (1971)
- [MUG 88] MUGHRABI H., Dislocation clustering and long range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals. *Rev. Phys. Appl.* - 23 - (1988) 367
- [ORO 42] OROWAN E., A type of plastic deformation new in metals *Nature* 149 (1942) 643 - 644
- [PEA 50] PEACH and KOEHLER J.S., The forces exerted on dislocations and the yields produced by them. *Phys. Rev.* 80, (1950) 436 - 439

[REU 92] REUBREZ E., Optimal crystallographie texture in Modelling of Plastic deformation
13 th R150 Int. Sijmposium 1992 p 403 - 408

[SCH 24] SCHMIDT E., *Proc. Int. Congr. Applied Rech.* Delft 342 (1924)

[TAY 38] TAYLOR G.I., Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals* 62 (1938) 307