
Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique

Jean-Claude Michel* — Pierre Suquet* — Frédéric Thébaud**

* LMA CNRS

31 Chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille cedex 20

** RNU RENAULT SA

9 Avenue 18 Juin 1940, 92500 Rueil-Malmaison

RÉSUMÉ. Le comportement des interfaces entre matrice et renfort peut influencer de façon significative le comportement macroscopique des composites à matrice métallique. Un modèle de décohésion d'interface est proposé dans cette étude. Il est basé sur la notion de taux de restitution de l'énergie et nécessite l'introduction d'un comportement élastique fragile de l'interface. L'évolution de l'endommagement est gouverné par un critère de Griffith et le paramètre matériel principal qui caractérise le comportement de l'interface est l'énergie qui peut être dissipée tout au long du processus de décohésion. Ce modèle est mis en œuvre dans une analyse par éléments finis de la réponse d'une cellule unitaire soumise à une traction simple axiale. Il permet la prise en compte de la dispersion de taille des particules. Il met également en évidence l'existence d'une énergie d'interface "optimale" pour laquelle le champ local de déformation est le plus homogène possible, retardant ainsi l'apparition de déformations localisées défavorables à la ductilité du composite.

ABSTRACT. The overall behavior of metal matrix composites can be significantly influenced by the properties of the interphase zone between the matrix and the reinforcements. This study presents a model of interfacial debonding based on the introduction of an energy release rate. The debonding evolution is ruled by a Griffith criterion and the main material parameter associated with debonding is the interfacial energy. This model is incorporated in the F.E.M. analysis of a unit cell under axial tension. Size effects are built in the model. It demonstrates that an optimal value of the interface energy can be defined for which the local strain field approaches homogeneity and therefore delays strain localization effects and improves the composite overall ductility.

MOTS-CLÉS : CMM, endommagement, plasticité, interfaces, éléments finis.

KEY WORDS : MMC, damage, plasticity, interfaces, finite elements.

1. Introduction

L'influence de l'interface matrice/renfort sur les propriétés mécaniques macroscopiques des matériaux composites a été mise en évidence par de nombreuses études (cf [KEL 70], [AVE 73] entre autres références). Un exemple classique est celui des composites à matrice fragile dont la déformation à rupture peut être augmentée de façon significative par un traitement approprié de l'interface entre les constituants. En affaiblissant l'interface on autorise l'extraction des fibres qui constitue ainsi un mécanisme de dissipation d'énergie. Le rôle des interfaces dans les composites à matrice métallique (CMM) semble avoir été moins systématiquement étudié. Lorsque leurs interfaces sont non traitées, donc résistants, les CMM s'endommagent principalement par rupture des renforts ([LLO 91]). Toutefois il a été observé ([BRE 90]) que des interfaces faibles sont susceptibles d'accroître la ductilité des CMM. Plus précisément ces auteurs ont remarqué que des interfaces résistants favorisent la rupture des renforts et la localisation de la déformation dans la matrice au voisinage des particules rompues, observation en accord avec celles d'autres auteurs ([HUN 91]), tandis que des interfaces faibles conduisent à une décohésion des particules et à une déformation plus homogène de la matrice. L'affaiblissement des interfaces pourrait ainsi faire jouer deux facteurs permettant l'amélioration de certaines propriétés mécaniques des composites par rapport à celles observées sur des composites à interfaces résistants. Le premier facteur est la consommation d'une quantité d'énergie non négligeable aux interfaces au cours de la décohésion. Le second facteur est la plus grande homogénéité des déformations qui retarde la localisation des déformations dans la matrice.

L'objet de la présente étude est de proposer dans un premier temps une modélisation théorique du comportement des interfaces. Cette modélisation repose sur la notion (classique en mécanique de la rupture) de taux de restitution de l'énergie. Elle nécessite l'introduction d'une élasticité d'interface, également considérée par d'autres auteurs ([LEN 82], [BEN 85], [HAS 91] entre autres). Dans un second temps le modèle proposé est mis en œuvre dans l'analyse par éléments finis de la réponse d'une cellule élémentaire. Cette modélisation permet une meilleure compréhension de la réponse macroscopique des CMM et confirme qu'une optimisation de l'interface pourrait conduire à une meilleure ductilité de ces matériaux.

2. Comportement de l'interface

2.1. Modèle d'endommagement

Le but de ce paragraphe est de présenter un modèle de comportement d'interface autorisant une décohésion de celui-ci et permettant de passer de façon continue d'une interface parfaitement résistante à une interface infiniment faible.

Un élément de volume V représentatif du composite considéré contient trois zones correspondant aux trois phases en présence : la matrice qui occupe un domaine M , les renforts qui occupent un domaine R et "l'interphase", occupant un domaine I situé entre les renforts et la matrice, dont les propriétés sont différentes de celles des deux autres phases. Dans le cas examiné par [BRE 90] et [THE 93], cette troisième phase a un volume très faible et ses propriétés peuvent être modifiées par une oxydation plus ou moins importante des renforts. L'état d'endommagement de cette troisième phase est décrit globalement par une variable D , constante dans tout le volume V (on ne cherche pas ici à décrire très finement des endommagements locaux en certains points des interfaces, mais plutôt à rendre compte globalement de l'endommagement moyen des interfaces). L'énergie élastique de cette phase (ou plus généralement son énergie libre) est prise sous la forme suivante (dans tout le texte les lettres en caractères gras désignent des tenseurs)

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \frac{1}{2} (1-D) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{c}^I : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{dans } I. \quad [1]$$

Les variables d'état de l'élément de volume V sont la déformation macroscopique \mathbf{E} , le champ microscopique des variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ qui décrivent les évolutions irréversibles à petite échelle (ici nous nous contenterons des déformations plastiques dans la matrice) et la variable (globale) d'endommagement D . L'énergie totale du volume V s'écrit en fonction de ces variables

$$W(D, \mathbf{E}, \boldsymbol{\alpha}) = \int_M w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D), \boldsymbol{\alpha}) \, dx + \int_R w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D), \boldsymbol{\alpha}) \, dx + \int_I w(D, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D)) \, dx \quad [2]$$

où \mathbf{u}^D désigne le champ de déplacement dans le domaine V lorsque toutes les variables $(\mathbf{E}, D, \boldsymbol{\alpha})$ sont fixées. \mathbf{u}^D et \mathbf{E} sont liées par la relation classique de moyenne

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) \rangle,$$

où $\langle . \rangle$ désigne la moyenne spatiale sur V

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D(\mathbf{x})) \, dx.$$

La force thermodynamique associée à D est alors le taux de restitution de l'énergie

$$G = - \frac{\partial W}{\partial D} = \int_I \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) : \mathbf{c}^I : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^D) \, dx \quad [3]$$

L'absence de terme supplémentaire dans [3] provient des équations d'équilibre satisfaites par \mathbf{u}^D et du fait que $\partial \mathbf{u}^D / \partial D$ est de moyenne nulle. La puissance dissipée dans l'endommagement de l'interphase est

$$P_d = G \dot{D}.$$

Le modèle proposé est basé sur deux hypothèses supplémentaires :

(H1) *L'interphase I consiste en une fine couche entourant chaque renfort*

$$I = \Gamma \times]0, eL[,$$

où Γ désigne la surface des renforts, e est un petit paramètre sans dimension destiné à tendre vers 0, L est une longueur caractéristique du problème. Précisons pour plus de clarté les choix possibles pour L . Cette longueur caractéristique peut être prise indépendante de la taille des renforts R , ce qui revient à supposer que l'épaisseur de l'interphase est identique pour tous les renforts. Un autre choix possible, correspondant à une situation physique différente, consiste à lier L à la taille du renfort entouré par l'interphase I (typiquement, pour une particule sphérique, L est le rayon de la particule). L'épaisseur de chaque interphase est alors proportionnelle au rayon de la particule qu'elle enrobe. C'est cette deuxième hypothèse qui sera retenue au paragraphe 2.2, mais l'analyse qui suit est indépendante de ce choix.

(H2) *La raideur c^I de l'interphase est faible*

$$c^I = e c^0.$$

Sous les hypothèses (H1) et (H2), le terme d'énergie portant sur I peut être réduit à une énergie de surface. Nous donnons ici l'idée de la démarche, renvoyant pour une démonstration plus détaillée à [SUQ 87]. La déformation dans l'interphase, l'énergie totale et le taux de restitution de l'énergie peuvent être évalués par

$$\varepsilon(\mathbf{u}) \equiv \frac{[\mathbf{u}]}{eL} \otimes_s \mathbf{n}, \tag{4}$$

où $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ désigne le saut de \mathbf{u} à la traversée de l'interface (\mathbf{u}^+ et \mathbf{u}^- désignent les valeurs de \mathbf{u} de part et d'autre de l'interface, la normale \mathbf{n} étant orientée de - vers +, cf Figure 1b) et $(a \otimes_s b)_{ij} = (a_i b_j + a_j b_i) / 2$,

$$W(D, E, [\mathbf{u}], \alpha) \equiv \int_M w(\varepsilon(\mathbf{u}^D), \alpha) \, dx + \int_R w(\varepsilon(\mathbf{u}^D), \alpha) \, dx + \tag{1-D} \int_{\Gamma} \frac{1}{2L} [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{K}^0(\mathbf{n}) \cdot [\mathbf{u}] \, ds, \tag{5}$$

$$G = - \frac{\partial W}{\partial D} \equiv \int_{\Gamma} \frac{1}{2L} [\mathbf{u}] \cdot \mathbf{K}^0(\mathbf{n}) \cdot [\mathbf{u}] \, ds. \tag{6}$$

Le tenseur du second ordre \mathbf{K}^0 s'exprime respectivement dans le cas général et dans le cas d'un matériau isotrope (de coefficients de Lamé λ^0 et μ^0) par

$$\mathbf{K}^0(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot c^0 \cdot \mathbf{n}, \text{ i.e. } K^0_{ik}(\mathbf{n}) = c^0_{ijkh} n_j n_h \text{ (cas général),}$$

$$\mathbf{K}^0 = (\lambda^0 + \mu^0) \mathbf{n} \otimes_s \mathbf{n} + \mu^0 \mathbf{Id}, \text{ i.e.}$$

$$\mathbf{K}^0_{ik}(\mathbf{n}) = (\lambda^0 + \mu^0) n_i n_k + \mu^0 \delta_{ik} \quad (\text{cas isotrope}). \quad [7]$$

(H3) Nous nous limiterons dans la suite au cas d'un matériau isotrope pour l'interphase.

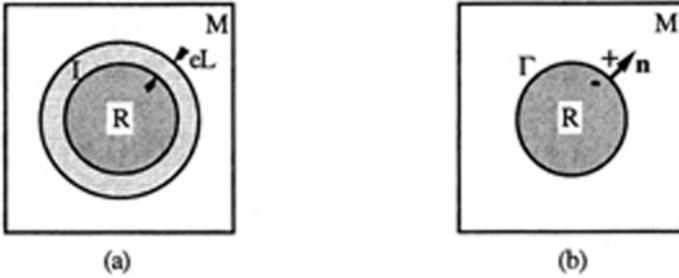


Figure 1. (a) Schéma des trois phases en présence dans le composite. M : matrice, R : renfort, I : interphase. (b) Cas d'une couche de fine épaisseur

La loi de comportement de l'interface se déduit de l'expression [5] de l'énergie

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial [\mathbf{u}]}, \text{ i.e. } \mathbf{T} = \sigma_N \mathbf{n} + \sigma_T,$$

$$\sigma_T = (1-D) \mu^0 \frac{[\mathbf{u}_T]}{L}, \quad \sigma_N = (1-D) K^0 \frac{[u_N]}{L}, \quad [8]$$

où $[u_N]$ et $[u_T]$ désignent les discontinuités normales et tangentielles du déplacement à l'interface et $K^0 = \lambda^0 + 2\mu^0$ et μ^0 sont les raideurs normale et tangentielle initiales (i.e. quand $D=0$) de l'interface. Pour éviter l'interpénétration entre les renforts et la matrice les relations [8] sont modifiées par adjonction d'une condition de contact unilatéral :

$$[u_N] \geq 0, \quad \sigma_N = (1-D) K^0 \frac{[u_N]}{L} \text{ si } [u_N] > 0, \quad \sigma_N \leq 0 \text{ si } [u_N] = 0. \quad [9]$$

La puissance dissipée lors de la décohésion est

$$P_d = G \dot{D}.$$

L'évolution de la variable d'endommagement D est gouvernée par l'existence d'un seuil portant sur le taux de restitution de l'énergie

$$G \leq H(D,L) |\Gamma|,$$

$\dot{D} = 0$ lorsque $G < H(D,L) |\Gamma|$, $\dot{D} \geq 0$ lorsque $G = H(D,L) |\Gamma|$. [10]
 $H(D,L)$ est le critère gouvernant l'évolution de la décohésion de l'interface. Sa forme explicite sera précisée ultérieurement. L'évolution de la variable de décohésion est donné par la relation de consistance

$$\dot{G} - H'(D,L) \dot{D} |\Gamma| = 0 \text{ en charge, } i.e.$$

$$\dot{D} = \frac{1}{H'(D,L)} \frac{1}{|\Gamma|} \left(\int_{\Gamma} K^0 \frac{[[u_N]]}{L} \frac{[[\dot{u}_N]]}{L} + \mu^0 \frac{[[u_T]] \cdot [[\dot{u}_T]]}{L} ds \right)^+. \quad [11]$$

Le modèle [8]-[11] est un modèle d'endommagement fragile qui s'apparente à ceux proposés par [NEE 87], [TVE 90] avec toutefois les différences suivantes. Le modèle présenté ici est basé sur des relations incrémentales et décrit un comportement dissipatif, la dissipation étant associée à la décohésion de l'interface. Il est donc différent du modèle d'élasticité non linéaire proposé par [NEE 87]. Il ne prédit cependant aucun déplacement normal ou tangentiel à la décharge. Il est donc également différent du modèle incrémental de [TVE 90], qui prend en compte la possibilité de frottement à l'interface (le frottement est négligé ici).

2.2. Fonction seuil

Nous disposons de peu d'informations sur la rhéologie des interfaces permettant de préciser l'expression de $H(D,L)$. Toutefois le point essentiel sur le plan physique, qui doit être exprimé par le modèle, est que la puissance dissipée au cours de la décohésion de l'interface est proportionnelle à la surface de l'interface $|\Gamma|$. Or cette puissance dissipée s'écrit, compte tenu de la relation [10] (en charge)

$$P_d = H(D,L) \dot{D} |\Gamma|.$$

Si l'on adopte pour L une longueur indépendante de la taille des particules, l'exigence précédente est satisfaite automatiquement. Si L est proportionnelle à la taille des renforts, il est nécessaire que H soit indépendante de L . Nous ferons les hypothèses suivantes.

(H4) L est proportionnelle à la taille des particules (cette taille sera notée a par la suite et peut être prise égale au rayon des particules lorsque celles-ci sont sphériques).

(H5) H est indépendante de L .

Nous avons retenu une forme simple pour H , privilégiant des paramètres qui nous ont paru physiques

$$H(D) = \gamma_0 \left(1 + \eta \frac{D}{2-D} \right)^2. \quad [12]$$

L'interprétation des paramètres du modèle est simple lorsque la séparation des deux parties de l'interface est purement normale (on peut par exemple penser à la décohésion autour d'une particule sphérique sous traction hydrostatique) :

γ_0 est la valeur de l'énergie nécessaire pour amorcer la décohésion,

η est un paramètre destiné à ajuster $W_{\text{déc}}$, l'énergie consommée dans l'ensemble du processus de décohésion, à une valeur prescrite γ . Cette énergie s'exprime par

$$W_{\text{déc}} = \int_0^T H(D) \dot{D} dt = \int_0^1 H(D) dD,$$

où T désigne le temps nécessaire à la décohésion totale.

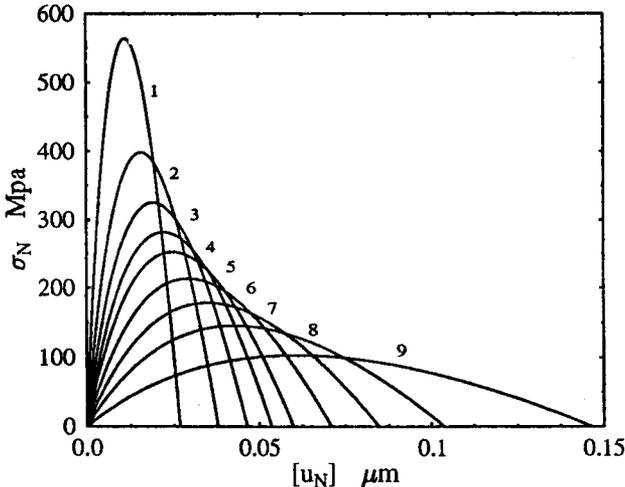


Figure 2. Comportement de l'interface (Eq. [8] à [12]) lorsque la séparation est purement normale. $K^0 = 1.2 \times 10^5$ Mpa, $\gamma_0 = 10^{-2}$ J/m², $\gamma = 10$ J/m², $a = 1$. (1), 2. (2), 3. (3), 4. (4), 5. (5), 7. (6), 10. (7), 15. (8), 30. (9) μm

Toujours dans l'hypothèse d'une décohésion en mode d'ouverture pur, on note δ_0 la valeur de l'ouverture pour laquelle la décohésion s'amorce, δ la valeur de l'ouverture

pour laquelle la décohésion est totale. η , δ , δ_0 , γ_0 et γ sont liés par les relations suivantes

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} K^0 \frac{\delta_0^2}{a}, \quad \delta = \delta_0 (1+\eta), \quad \gamma = \int_0^\delta \sigma_N d[u_N].$$

γ est donc "l'aire sous la courbe" (σ_N , $[u_N]$).

Dans le modèle proposé K^0 et γ sont des paramètres matériels *indépendants de la taille des particules*. En revanche δ_0 , δ et la contrainte maximale supportée par l'interface dépendent de la taille des particules. Il est possible de générer dans le même esprit d'autres modèles basés sur une description différente de la physique du problème (par exemple en imposant comme information essentielle que la contrainte maximale supportable par l'interface soit indépendante de la taille des renforts).

3. Modélisation par éléments finis

3.1. Cellule axisymétrique et conditions aux limites

Le modèle d'endommagement d'interface présenté au dessus est utilisé dans la simulation numérique de la réponse d'un élément de volume composite. Les calculs sont effectués par éléments finis sur une cellule unitaire axisymétrique qui approche une cellule cylindrique de base hexagonale ([CHR 89], [TVE 90], [BAO 91]). Les particules axisymétriques sont alignées selon l'axe de révolution de la cellule (cf Figure 3) dont le rayon et la hauteur sont notés R et $2h$.

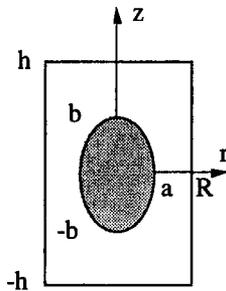


Figure 3. Cellule unitaire axisymétrique contenant une particule ellipsoïdale

On se limite à des états de déformation macroscopiques préservant la symétrie de révolution du problème :

$$\mathbf{E} = \alpha (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \beta \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

La solution en déplacement est donc cherchée sous la forme

$$u_r = \alpha r + u_r^*(r,z), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = \beta z + u_z^*(r,z). \quad [13]$$

Sur le bord de la cellule cylindrique $3d$ à base hexagonale, les conditions aux limites de périodicité imposent

\mathbf{u}^* prend des valeurs identiques sur les côtés opposés de V ,

$\sigma \cdot \mathbf{n}$ prend des valeurs opposées sur les côtés opposés de V .

Pour des déformations axisymétriques les conditions de périodicité sur les faces $z=\pm h$, h du cylindre se réduisent à des conditions de symétrie classiques

$$u_z^*(r,-h) = u_z^*(r,h) = 0, \quad \sigma_{rz}(r,-h) = \sigma_{rz}(r,h) = 0, \quad 0 \leq r \leq R. \quad [14]$$

Les conditions aux limites sur les faces latérales sont plus complexes. Dans l'approximation où le cylindre à base hexagonale est remplacé par le cylindre à base circulaire, ces conditions sont approchées sur la surface latérale $r=R$ par :

$$u_r^*(R,z) = 0, \quad \sigma_{rz}(R,z) = 0, \quad -h \leq z \leq h. \quad [15]$$

On vérifie aisément que les constantes α et β apparaissant dans [13] sont les composantes de la déformation macroscopique \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|\partial V|} \int_{\partial V} \mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n} \, ds = \alpha (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \beta \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad [16]$$

où ∂V désigne le bord extérieur du cylindre circulaire V . La contrainte macroscopique Σ s'exprime par :

$$\Sigma = T (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + S \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad T = \frac{1}{2h} \int_{z=-h}^h \sigma_{rr}(R,z) \, dz,$$

$$S = \frac{2}{R^2} \int_{r=0}^R \sigma_{zz}(r,h) \, r dr. \quad [17]$$

3.2. Contraintes macroscopiques imposées

Lorsque la cellule élémentaire est soumise à un essai de traction simple, la direction des contraintes macroscopiques est connue sans que son intensité le soit nécessairement. C'est par exemple le cas lorsque l'essai de traction simple est piloté en contrôlant la déformation axiale, ou une autre variable. Le chargement se fait néanmoins à direction de contrainte macroscopique imposée :

$$\Sigma_t = x_t \Sigma^0, \quad \Sigma^0 = T^0 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + S^0 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad [18]$$

où T^0 et S^0 sont des constantes fixant la direction des contraintes, et où x_t mesure l'intensité de ces contraintes et peut être connu ou inconnu.

Indépendamment de la loi de comportement des phases constituant le composite, le problème "local" sur la cellule élémentaire présente donc une particularité. Le chargement n'est pas seulement appliqué au travers des conditions aux limites [14] et [15], mais également au travers de la condition de moyenne [17]. Pour simplifier l'exposé nous détaillons la méthode retenue pour traiter ce chargement particulier dans le cas où les phases ont un comportement élastique linéaire et sont parfaitement collées.

Pour alléger les notations Σ_t est noté simplement Σ . Soit \mathbf{v} un champ de déplacement de la forme [13], décomposé en un terme de fluctuation \mathbf{v}^* vérifiant [14] et [15] et un terme correspondant à une déformation homogène \mathbf{E}' . Le principe des travaux virtuels appliqué à la cellule de base V , s'écrit :

$$\langle \sigma : (\mathbf{E}' + \varepsilon(\mathbf{v}^*)) \rangle - \Sigma : \mathbf{E}' = 0, \tag{19}$$

ou après discrétisation,

$$\{ \mathbf{v}^*, \mathbf{E}' \} \left\{ \begin{array}{l} \sum_e \frac{1}{|V|} \int_e [\mathbf{B}]^T \sigma \, dx \\ \sum_e \frac{1}{|V|} \int_e \sigma \, dx \end{array} \right\} = \{ \mathbf{v}^*, \mathbf{E}' \} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \Sigma \end{array} \right\} \tag{20}$$

pour tout champ $\{ \mathbf{v}^* \}$ vérifiant les conditions cinématiques de [14] et [15] et tout tenseur de déformation homogène $\mathbf{E}' = (\alpha', \beta')$ de \mathbb{R}^2 . L'indice e fait référence à l'élément fini courant. La matrice $[\mathbf{B}]$ relie déformations et déplacements, *i.e.*

$$\{ \varepsilon^* \} = [\mathbf{B}] \{ \mathbf{u}^* \}.$$

Après prise en compte de la loi de comportement, le système élastique à résoudre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \Sigma \end{Bmatrix}, \tag{21}$$

avec

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}] &= \sum_e [\mathbf{k}_e] \quad \text{où} \quad [\mathbf{k}_e] = \frac{1}{|V|} \int_e [\mathbf{B}]^T [\mathbf{c}] [\mathbf{B}] \, dx, \\ [\mathbf{K}'] &= \sum_e [\mathbf{k}'_e] \quad \text{où} \quad [\mathbf{k}'_e] = \frac{1}{|V|} \int_e [\mathbf{B}]^T [\mathbf{c}] \, dx, \quad [\mathbf{K}''] = \langle [\mathbf{c}] \rangle \end{aligned} \tag{22}$$

L'équation [21] explicite la nature des degrés de liberté $\{\mathbf{u}\}$ de la cellule unitaire. Les deux degrés de liberté \mathbf{E} correspondent à la déformation moyenne de cette cellule, tandis que les degrés de liberté $\{\mathbf{u}^*\}$ décrivent les fluctuations locales du déplacement réel autour de la transformation homogène définie par \mathbf{E} . En pratique, la prise en considération des deux degrés de liberté globaux \mathbf{E} se fait par adjonction d'un noeud supplémentaire (dit noeud macroscopique) commun à tous les éléments du maillage. Le vecteur des inconnues nodales élémentaires (indice e) et la matrice $[\mathbf{B}]$ classiques sont remplacés par

$$\{\mathbf{u}_e\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{B}'] = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} & 1 & 0 \\ b_{21} & \dots & b_{2n} & 0 & 1 \\ b_{31} & \dots & b_{3n} & 0 & 0 \\ b_{41} & \dots & b_{4n} & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

où les b_{ij} sont les composantes de la matrice $[\mathbf{B}]$ usuelle dans le cas bi-dimensionnel axisymétrique, n est le nombre de degrés de liberté de chaque élément et les déformations sont stockées dans l'ordre suivant : $1 = \varepsilon_{rr}$, $2 = \varepsilon_{zz}$, $3 = 2\varepsilon_{rz}$, $4 = \varepsilon_{\theta\theta}$. Alors :

$$\{\varepsilon_e\} = [\mathbf{B}'] \{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}^*\} + \mathbf{E}.$$

Après ces modifications, les matrices de rigidité élémentaires sont assemblées classiquement.

3.3. Schéma de Newton à déplacement généralisé constant

Lorsque l'une des phases du composite présente un comportement plastique (matrice) ou adoucissant (interface), un chargement en force à pas constants peut conduire à des incréments de déplacements importants et à des instabilités numériques. La procédure adoptée ici consiste à imposer une direction de contraintes constante en considérant le niveau de contraintes x_t comme une inconnue. Cette inconnue est déterminée en contrôlant un degré de liberté ou une combinaison de degrés de liberté du système. Plus précisément cette inconnue est déterminée au moyen d'une relation linéaire $L(\mathbf{u}_t^*, \mathbf{E}_t) = t$ entre les degrés de liberté du système, et les pas de la variable t sont contrôlés. L'algorithme itératif proposé s'apparente à ceux qui sont utilisés dans les problèmes avec non linéarité géométrique ([BAT 79], [CLA 90]).

Les variables d'état du problème sont supposées connues à l'instant t . Les inconnues principales à l'instant $t+\Delta t$ sont :

$$\{\mathbf{u}^*\}_{t+\Delta t} = \{\mathbf{u}^*\}_t + \{\Delta\mathbf{u}^*\}, \quad \mathbf{E}_{t+\Delta t} = \mathbf{E}_t + \Delta\mathbf{E}, \quad x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta x, \quad [23]$$

et elles sont soumises à la contrainte

$$L(\Delta\mathbf{u}^*, \Delta\mathbf{E}) = \Delta t.$$

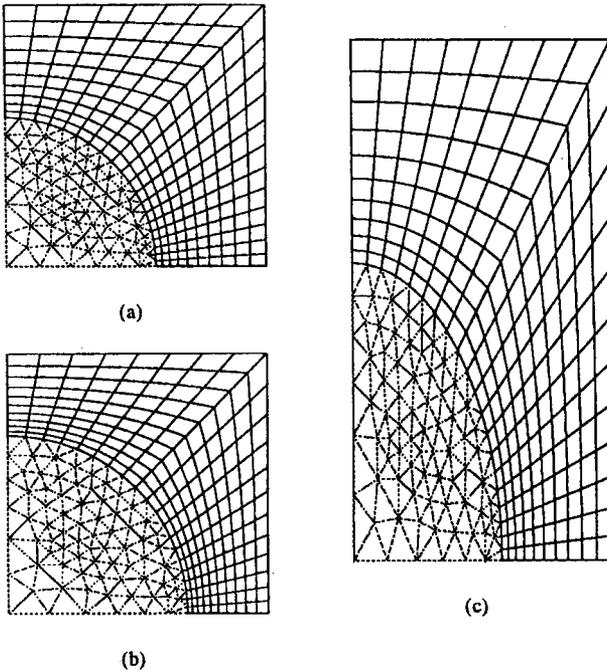


Figure 4. Maillages en éléments Q8 pour la matrice et en éléments T6 pour les renforts. (a) Renfort sphérique, $\nu_p = 0.125$, $b/a = 1$, $h/R = 1$. (b) Renfort sphérique, $\nu_p = 0.216$, $b/a = 1$, $h/R = 1$. (c) Renfort ellipsoïdal, $\nu_p = 0.125$, $b/a = 2$, $h/R = 2$

Pour un incrément Δt , on cherche les incréments $\{\Delta \mathbf{u}^*\}$, $\Delta \mathbf{E}$ et le niveau de contrainte $\mathbf{x}_{t+\Delta t}$ de façon à réaliser l'équilibre en fin de pas à l'instant $t+\Delta t$:

$$\int_{M,R} \sigma_{t+\Delta t} : (\mathbf{E}' + \varepsilon(\mathbf{v}^*)) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} (\sigma_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n}) \cdot [\mathbf{v}^*] \, ds - |\mathbf{V}| \, \mathbf{x}_{t+\Delta t} \, \Sigma^0 : \mathbf{E}' = 0. \quad [24]$$

La discrétisation spatiale de la forme intégrale [24] est faite par éléments finis axisymétriques aux déplacements. Des quadrilatères à 8 noeuds (Q8) sous intégrés par 2×2 points de Gauss sont utilisés dans la matrice M. Le renfort R est maillé par des éléments triangulaires à 6 noeuds (T6) et 3 points d'intégration de Hammer, et l'interface Γ est maillé par des éléments de ligne à 6 noeuds avec une intégration numérique à 3 points de Newton-Cotes. La figure 4 présente les maillages utilisés.

Ainsi discrétisée, l'équation non linéaire [24] est résolue par un schéma itératif de type Newton avec pilotage à déplacement généralisé constant. Etant connus $\mathbf{x}^{i-1}_{t+\Delta t}$, $\{\Delta \mathbf{u}^*\}^{i-1}_{t+\Delta t}$ et $\Delta \mathbf{E}^{i-1}_{t+\Delta t}$ à la $i^{\text{ème}}$ itération du pas $t+\Delta t$, avec l'égalité $L(\Delta \mathbf{u}^{*i-1}_{t+\Delta t}, \Delta \mathbf{E}^{i-1}_{t+\Delta t}) = \Delta t$, la boucle d'itérations s'écrit

i) Calculer $\sigma^{i-1}_{t+\Delta t}$, $\alpha^{i-1}_{t+\Delta t}$ en chaque point d'intégration numérique. Lorsque l'interface est dégradable, calculer $D^{i-1}_{t+\Delta t}$ et mettre à jour $\sigma^{i-1}_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n}$.

ii) Si test de convergence vérifié, FIN. Sinon, résoudre les systèmes linéaires associés aux formulations variationnelles

$$\int_{M,R} \mathbf{c}^{i-1}_{t+\Delta t} : (\mathbf{E}_0 + \varepsilon(\mathbf{u}^*_0)) : (\mathbf{E}' + \varepsilon(\mathbf{v}^*)) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \mathbf{K}^{i-1}_{t+\Delta t} \cdot [\mathbf{u}^*_0] \cdot [\mathbf{v}^*] \, ds = |\mathbf{V}| \Sigma^0 : \mathbf{E}',$$

$$\int_{M,R} \mathbf{c}^{i-1}_{t+\Delta t} : (\mathbf{E}_1 + \varepsilon(\mathbf{u}^*_1)) : (\mathbf{E}' + \varepsilon(\mathbf{v}^*)) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \mathbf{K}^{i-1}_{t+\Delta t} \cdot [\mathbf{u}^*_1] \cdot [\mathbf{v}^*] \, ds =$$

$$- \int_{M,R} \sigma^{i-1}_{t+\Delta t} : (\mathbf{E}' + \varepsilon(\mathbf{v}^*)) \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\sigma^{i-1}_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n}) \cdot [\mathbf{v}^*] \, ds. \quad [25]$$

iii) Mettre à jour $\mathbf{x}^i_{t+\Delta t}$, $\{\Delta \mathbf{u}^*\}^i_{t+\Delta t}$ et $\Delta \mathbf{E}^i_{t+\Delta t}$ par

$$\mathbf{x}^i_{t+\Delta t} = - \frac{\mathbf{L}(\mathbf{u}^*_1, \mathbf{E}_1)}{\mathbf{L}(\mathbf{u}^*_0, \mathbf{E}_0)}, \quad \{\Delta \mathbf{u}^*\}^i_{t+\Delta t} = \{\Delta \mathbf{u}^*\}^{i-1}_{t+\Delta t} + \mathbf{x}^i_{t+\Delta t} \{\mathbf{u}^*_0\} + \{\mathbf{u}^*_1\},$$

$$\Delta \mathbf{E}^i_{t+\Delta t} = \Delta \mathbf{E}^{i-1}_{t+\Delta t} + \mathbf{x}^i_{t+\Delta t} \{\mathbf{E}_0\} + \{\mathbf{E}_1\}. \quad [26]$$

et retourner en i).

Dans le choix de la matrice de rigidité $\mathbf{c}^{i-1}_{t+\Delta t}$, plusieurs variantes sont possibles. Pour tous les exemples du paragraphe 4, les directions de correction sont calculées en adoptant la méthode de la raideur initiale. Cette méthode particulièrement économique n'a pas posé de problème de convergence. Le test de convergence porte sur la norme relative du maximum des résidus d'équilibre ; la boucle d'itérations est stoppée lorsque cette norme est inférieure à $5 \cdot 10^{-4}$.

En ce qui concerne l'étape d'intégration locale du comportement (étape i)), la démarche suivie consiste à écrire la loi de comportement élasto-plastique de la matrice sous la forme d'un système différentiel par rapport au temps. Ce système est intégré sur $[t, t+\Delta t]$ par une méthode de Runge-Kutta 4x4 à pas de temps adaptatifs contrôlés.

Le choix de la relation linéaire \mathbf{L} dépend très fortement du cas considéré. Dans le cas d'une adhésion parfaite entre la matrice et le renfort, et d'un comportement élasto-plastique de la matrice, la relation suivante est choisie pour évaluer le niveau de contrainte macroscopique :

$$\mathbf{L}(\Delta \mathbf{u}^*, \Delta \mathbf{E}) = \Sigma^0 : \Delta \mathbf{E}.$$

Dans le cas d'une liaison matrice/renfort dégradable, et d'un chargement macroscopique correspondant à un essai de traction simple selon l'axe des z ($T^0 = 0$, $S^0 = 1$), le meilleur choix (qui nous a été suggéré par [NEE 91]) semble être le saut de déplacement au pôle de la particule :

$$L(\Delta \mathbf{u}^*, \Delta \mathbf{E}) = [\Delta \mathbf{u}^*_N] \text{ au pôle de la particule.}$$

4. Applications

Dans tous les exemples présentés ci dessous les renforts sont supposés élastiques et la matrice élasto-plastique de Von Mises à écrouissage isotrope :

$$E_p = 400\,000 \text{ Mpa, } \nu_p = 0.2 \text{ (renforts), } E_m = 75\,000 \text{ Mpa, } \nu_m = 0.3,$$

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_U(p) = \sigma_0 + H p^\alpha \text{ (écrouissage de la matrice),}$$

$$\sigma_0 = 75 \text{ Mpa, } H = 416.5 \text{ Mpa, } \alpha = 0.3895,$$

où p désigne la déformation plastique cumulée. Lorsque la décohésion de l'interface est prise en compte, les valeurs suivantes sont prises pour les raideurs K^0 et μ^0 :

$$K^0 = 120\,000 \text{ Mpa, } \mu^0 = 40\,000 \text{ Mpa.}$$

Trois configurations ont été étudiées, deux d'entre elles correspondant à des particules sphériques, la dernière correspondant à des particules ellipsoïdales. L'élanement et la fraction volumique des particules dans cette dernière configuration ont été mesurées [THE 93] sur un composite élaboré par rhéomoulage [SAL 91] suivi d'une extrusion qui aligne les renforts dans la direction axiale.

configuration 1 :	$\nu_p = 0.125$,	$b/a = 1$,	$h/R = 1$,
configuration 2 :	$\nu_p = 0.216$,	$b/a = 1$,	$h/R = 1$,
configuration 3 :	$\nu_p = 0.125$,	$b/a = 2$,	$h/R = 2$,

où ν_p désigne la fraction volumique de renforts.

4.1. Effet de taille des particules

4.1.1. Systèmes monodisperses

Dans un premier temps les courbes contrainte/déformation macroscopiques ont été calculées pour des composites contenant des particules *présentant toutes la même taille* (système monodisperse). Ces calculs ont été effectués pour plusieurs tailles de particules (précisées dans la légende de la Figure 5) à énergie d'interface γ donnée. Les courbes contrainte/déformation macroscopiques obtenues pour la configuration 3 sont portées sur la figure 5.

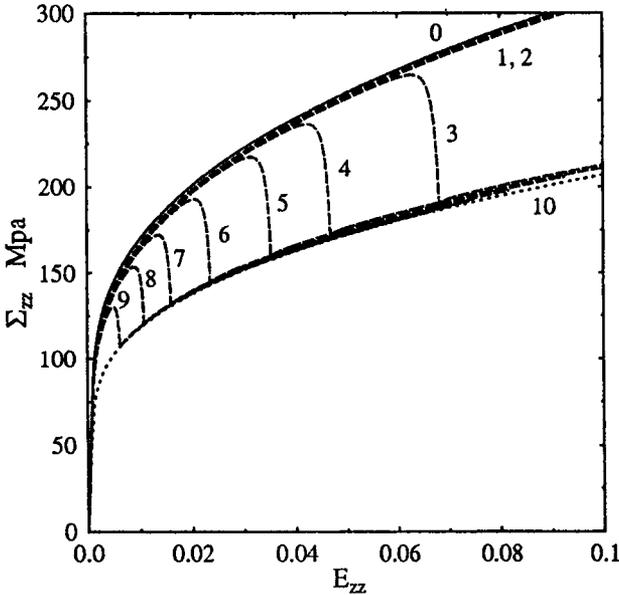


Figure 5. Configuration 3. Courbes contrainte/déformation macroscopiques calculées pour différents rayons de particules. Interfaces : $\gamma_0 = 10^{-2} \text{ J/m}^2$, $\gamma = 10 \text{ J/m}^2$, $L = a$. Ligne continue (courbe $\Sigma_+(E)$) : adhésion parfaite (0). Lignes en tirets : $a = 1$. (1), 2. (2), 3. (3), 4. (4), 5. (5), 7. (6), 10. (7), 15. (8), 30. (9) μm . Ligne en pointillés (courbe $\Sigma_-(E)$) : décohésion totale (10).

Deux observations peuvent être faites sur ces courbes. Tout d'abord les courbes contrainte/déformation macroscopiques pour différentes tailles de renforts sont schématiquement comprises entre la courbe $\Sigma_+(E)$ correspondant à l'adhésion parfaite entre les constituants et la courbe $\Sigma_-(E)$ correspondant à la décohésion totale (seule la condition de contact unilatéral entre la particule et la matrice reste active).

En second lieu, la transition d'une courbe à l'autre se fait assez brutalement, lorsque la déformation axiale macroscopique atteint une valeur critique $E_{\text{déc}}$ correspondant à la décohésion complète de l'interface et à la consommation totale de l'énergie γ . Sur la courbe macroscopique, cette valeur se situe au point de discontinuité de pente (passage de l'écroutissage négatif à l'écroutissage positif). A énergie d'interface γ donnée, cette déformation critique dépend de la taille des particules et varie sensiblement comme l'inverse de cette taille. Une interpolation numérique donne

$$a_{\text{déc}}(E) = 0.24 E^{-0.92}. \quad [27]$$

A l'inverse, pour une déformation macroscopique E donnée, il existe un rayon critique $a_{\text{déc}}(E)$ tel que les particules de rayon supérieur à $a_{\text{déc}}$ ont subi une

décohésion totale, tandis que les particules de rayon inférieur à $a_{d\acute{e}c}$ adhèrent encore parfaitement à la matrice (Figure 6).

Ces deux observations seront utilisées dans le paragraphe suivant pour proposer un modèle simplifié (n'utilisant que les courbes $\Sigma_+(E)$, $\Sigma_-(E)$ et $a_{d\acute{e}c}(E)$ pour prendre en compte la dispersion de tailles des renforts dans un CMM réel).

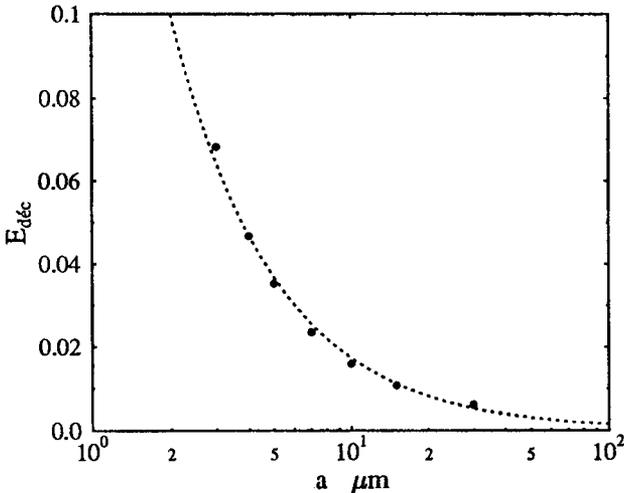


Figure 6. Configuration 3. Déformation de décohésion $E_{d\acute{e}c}$ en fonction du rayon des particules. Marqueurs : valeurs de $E_{d\acute{e}c}$ issues de la figure 5. Ligne en pointillés : fonction puissance ajustée, $a_{d\acute{e}c}(E) = 0.24 E^{-0.92}$.

4.1.2. Systèmes polydisperses

Les composites considérés dans ce paragraphe sont renforcés par des inclusions présentant une distribution de tailles comprises dans l'intervalle $[a_{\min}, a_{\max}]$ (système polydisperse). Du fait du critère de décohésion retenu, la décohésion des interfaces des différentes particules n'est plus simultanée et, au niveau macroscopique, la transition d'une courbe à l'autre se fait progressivement. En supposant en première approximation la déformation constante dans l'échantillon et égale à la déformation globale E , la décohésion se produira en priorité autour des plus gros renforts (de rayon supérieur à $a_{d\acute{e}c}(E)$) et s'étendra progressivement aux renforts de plus petite taille, au fur et à mesure de l'augmentation de la déformation. Plus précisément, supposons donnée la probabilité de répartition de taille des renforts : $P(a)$ da est le pourcentage de renforts dont le rayon est dans l'intervalle $[a, a+da]$. Pour une déformation E donnée la proportion de particules décollées est,

$$n(E) = \int_{a_{d\acute{e}c}(E)}^{a_{\max}} P(a) da. \tag{28}$$

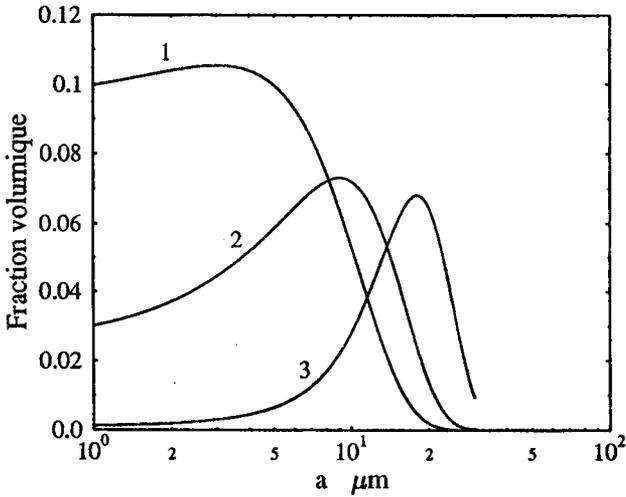


Figure 7. Probabilité de présence des particules en fonction de leur rayon. Les profils 1, 2 et 3 sont définis par [30]-[31].

La contrainte totale supportée par l'échantillon est la moyenne des contraintes dans celui ci, et en supposant en première approximation la déformation identique en tout point

$$\Sigma = n(E) \Sigma_-(E) + (1-n(E)) \Sigma_+(E). \quad [29]$$

La figure 8 présente la réponse, calculée selon les relations [27] à [29], d'un composite contenant des particules dont la répartition de tailles suit 3 profils différents (donnés sur la figure 7), calculée selon la courbe de Gauss

$$P(a) = P_{\max} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t = \frac{a - m}{\sigma}, \quad [30]$$

où les tailles de particules varient entre $a_{\min} = 1$ et $a_{\max} = 30 \mu\text{m}$. Les trois profils considérés correspondent respectivement à une taille moyenne de fines, moyennes et grosses particules,

$$\begin{array}{ll} \text{profil 1 :} & m = 3 \mu\text{m}, \quad \sigma = 6 \mu\text{m}, \\ \text{profil 2 :} & m = 9 \mu\text{m}, \quad \sigma = 6 \mu\text{m}, \\ \text{profil 3 :} & m = 18 \mu\text{m}, \quad \sigma = 6 \mu\text{m}. \end{array} \quad [31]$$

Les valeurs de P_{\max} se déduisent de l'égalité

$$\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} P(a) da = 1.$$

Les décrochements observés sur la figure 5 sont alors effacés (ou adoucis) par le caractère progressif de la décohésion. Il est également intéressant de noter que pour une valeur donnée de la déformation macroscopique, le module d'écroutissage apparent du composite (défini comme la pente de la courbe $\Sigma(E)$) est plus faible pour le composite à particules en cours de décohésion que pour le composite à particules complètement décollées (voir la courbe 1 sur la figure 8 aux environs de 5% de déformation).

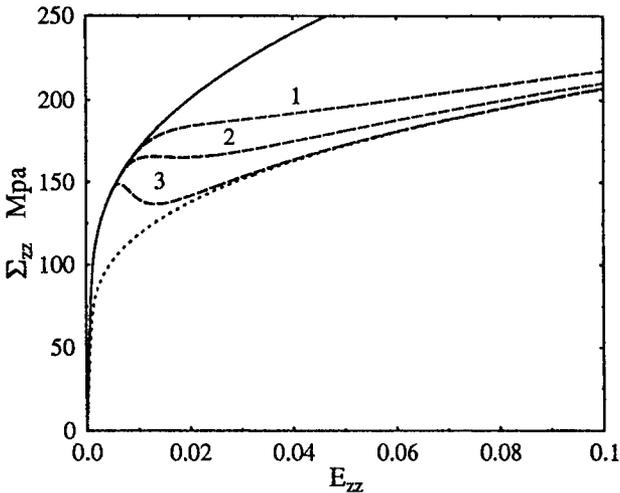


Figure 8. Configuration 3. Courbes contrainte/déformation macroscopiques calculées à partir de [28]-[29] en utilisant les courbes $\Sigma_+(E)$ et $\Sigma_-(E)$ de la figure 5, $a_{dec}(E) = 0.24 E^{-0.92}$, et les profils représentés à la figure 7. Ligne continue : $\Sigma_+(E)$. Lignes en tirets : profil 1 (1), profil 2 (2), profil 3 (3). Ligne en pointillés : $\Sigma_-(E)$.

4.2. Hétérogénéités locales de déformation

Pour mieux comprendre l'influence du comportement des interfaces sur la déformation à rupture des CMM, les cartes de déformations locales pour une même déformation et une même taille de particules ont été examinées pour différentes valeurs de l'énergie d'interface γ . Une attention particulière a été portée à la valeur maximale de la déformation équivalente dans la matrice, considérée comme un indicateur possible de rupture (aucun mécanisme de rupture ou d'endommagement de la matrice n'est introduit dans la présente étude et on renvoie à [MIC 94] pour la prise en considération d'un endommagement de la matrice par croissance de cavités). Pour les trois configurations considérées, on constate une influence significative du comportement de l'interface sur l'homogénéité du champ de déformations dans la matrice. L'homogénéité la plus grande (parmi les valeurs de γ considérées) n'est pas observée pour les cas extrêmes (résistance nulle ou infinie de l'interface) mais pour une valeur intermédiaire de l'énergie d'interface.

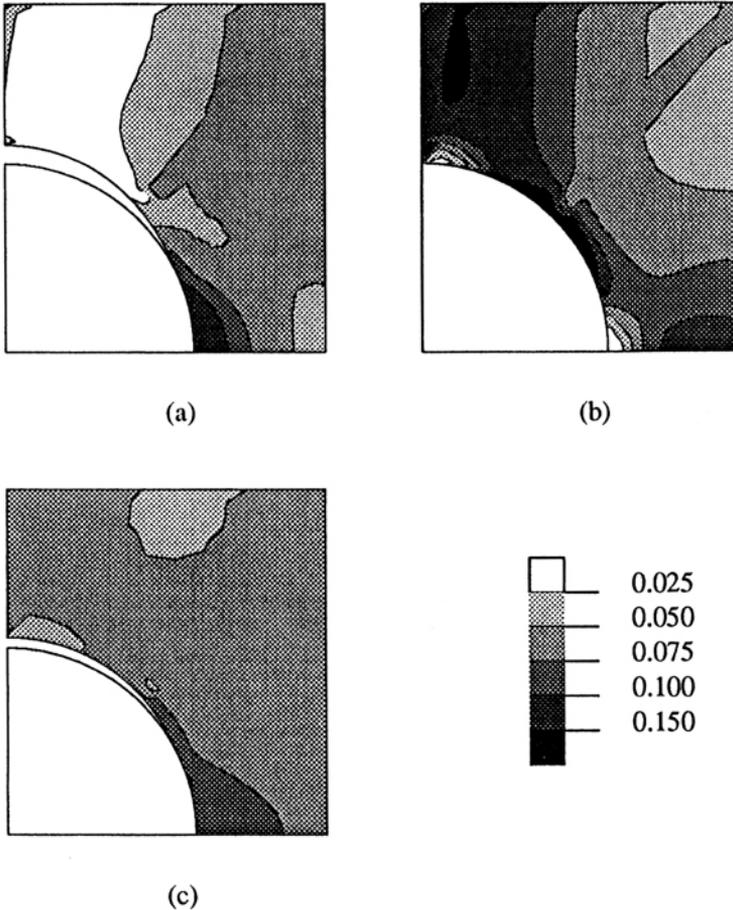


Figure 9. Configuration 1. Cartes de la déformation plastique cumulée à 6% d'allongement axial du cylindre composite en fonction de l'énergie d'interface γ . (a) Décohesion totale ($\gamma = 0$). (b) Adhésion parfaite ($\gamma = +\infty$). (c) : $\gamma = 15 \text{ J/m}^2$, $\gamma_0 = 15 \times 10^{-3} \text{ J/m}^2$, $L = a = 10 \mu\text{m}$.

Pour quantifier cette observation, on a porté sur la figure 11 la valeur (notée E_{crit}) de la déformation macroscopique axiale pour laquelle la déformation équivalente maximale dans la matrice atteint une valeur particulière notée ϵ_{crit} . Trois valeurs de cette déformation critique ont été considérées : $\epsilon_{\text{crit}} = 5\%$, 10% et 15% . On observe que la déformation critique macroscopique lorsque les particules sont décollées ($\gamma = 0$) est supérieure à la déformation critique lorsque les particules adhèrent parfaitement à la matrice. Mais un optimum se situe pour une valeur intermédiaire de l'énergie d'interface, qui se situe dans les cas envisagés ici aux alentours de $\gamma = 15 \text{ J/m}^2$.

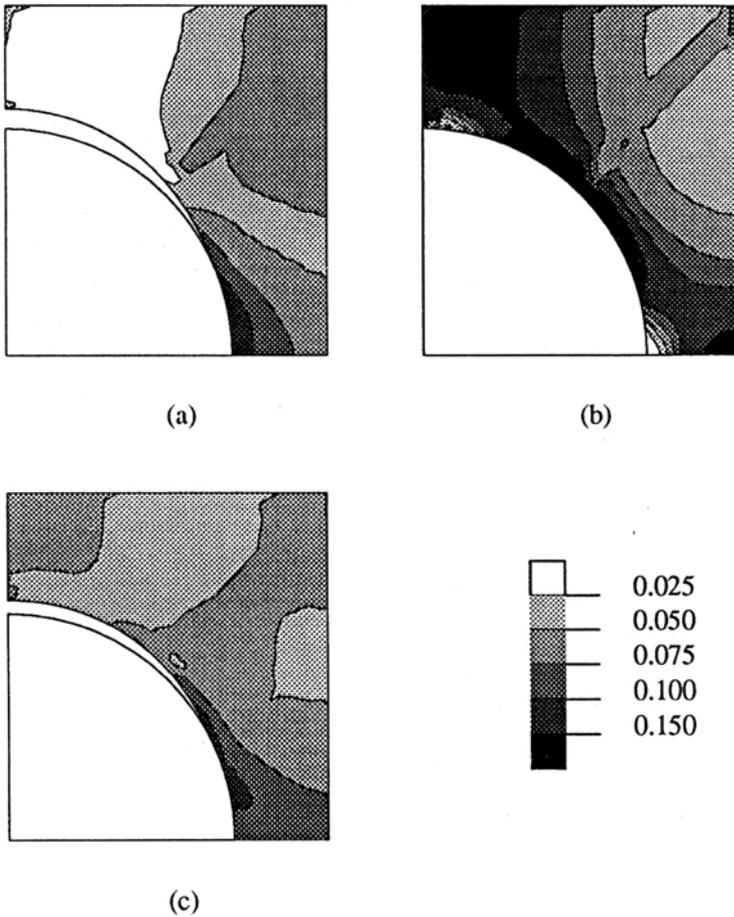


Figure 10. Configuration 2. Cartes de la déformation plastique cumulée à 6% d'allongement axial du cylindre composite en fonction de l'énergie d'interface γ . (a) Décohesion totale ($\gamma = 0$). (b) Adhésion parfaite ($\gamma = +\infty$). (c) : $\gamma = 15 \text{ J/m}^2$, $\gamma_0 = 15 \times 10^{-3} \text{ J/m}^2$, $L = a = 10 \text{ }\mu\text{m}$.

5. Conclusions

Un modèle mécanique décrivant la décohésion d'un interface entre les différents constituants d'un composite a été présenté et mis en oeuvre pour des composites à matrice métallique. Les exemples présentés permettent de tirer les premières conclusions suivantes :

1) En prenant comme caractéristique matérielle principale l'énergie susceptible d'être dissipée par la décohésion de l'interface, le modèle permet de rendre compte de

l'influence de la dispersion de taille des particules sur la réponse macroscopique des composites. Alors que les calculs sur cellules élémentaires conduisent à des courbes contrainte/déformation macroscopiques présentant un décrochement brutal non observé sur les composites réels, la prise en compte de la dispersion des tailles via la décohésion progressive des interfaces permet de retrouver des courbes macroscopiques plus proches des observations réelles.

2) En examinant le champ de déformation local dans la matrice, on établit (dans les hypothèses du modèle) qu'en choisissant l'énergie d'interface de façon optimale, il est possible de rendre ce champ plus homogène que dans les cas où l'interface est très résistant ou très peu résistant. Cette observation renforce l'idée qu'un traitement approprié des interfaces pourrait améliorer la ductilité des composites à matrice métallique.

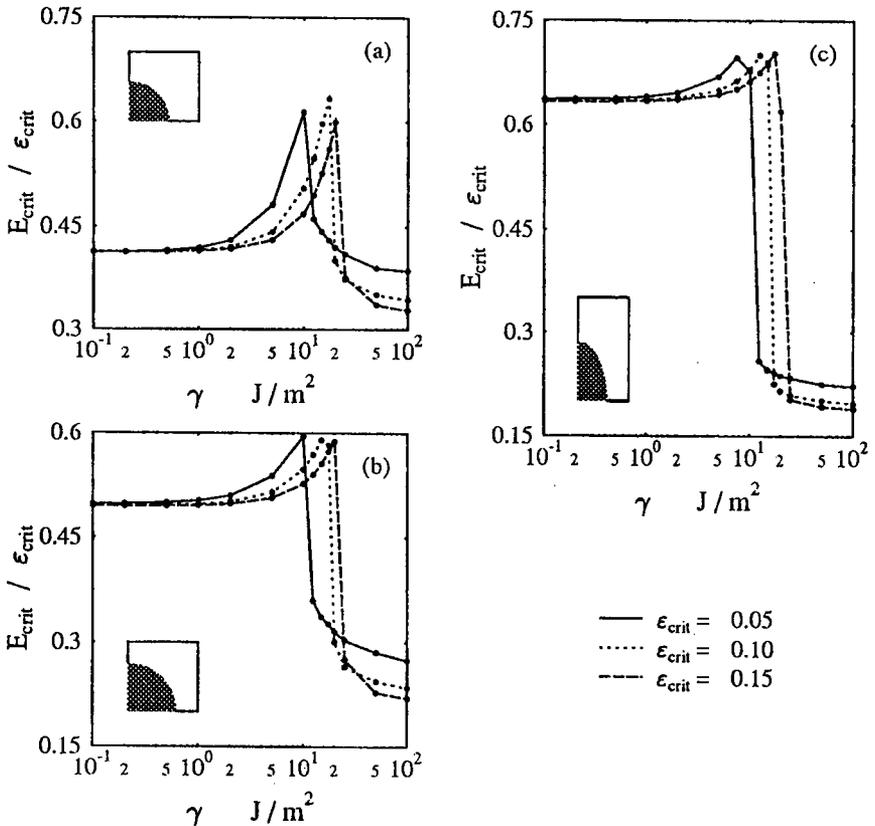


Figure 11. Valeur de E_{crit} en fonction de γ . $\gamma_0 = \gamma \times 10^{-3}$, $L = a = 10 \mu\text{m}$. (a) Configuration 1. (b) Configuration 2. (c) Configuration 3.

6. Remerciements

Les auteurs remercient la Régie Renault pour son soutien financier lors d'une étude plus complète sur les composites à matrice métallique menée en collaboration avec T. Bretheau, F. Decoms et A. Zaoui qui ont fortement influencé le modèle présenté dans cet article.

7. Bibliographie

- [AVE 73] AVESTON J., KELLY A., "Theory of multiple fracture of fibrous composites", *J. Mater. Sc.*, **8**, 1973, p. 352-362.
- [BAO 91] BAO G., HUTCHINSON J.W., Mc MEEKING R.M., "Particle reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep", *Acta Metall. Mater.*, **39**, 1991, p. 1871-1882.
- [BAT 79] BATOZ J.L., DHATT G., "Incremental displacement algorithms for non linear problems", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **14**, 1979, p. 1262-1267.
- [BEN 85] BENVENISTE Y., "The effective mechanical behaviour of a composite with imperfect contact between the constituents", *Mech. Materials*, **4**, 1985, p. 197-208.
- [BRE 90] BRETHERAU T., DA SILVA R., ZAOUÏ A., "Micromécanique et comportement des composites à matrice métallique à renfort particulaire", *Compte Rendus des JNC 7*, G. Fantozzi et P. Fleischmann (eds.), Pluralis, Paris, 1990, p. 198-260.
- [CHR 89] CHRISTMAN T., NEEDLEMAN A., SURESH S., "An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites", *Acta metall. mater.*, **37**, 1989, p. 329-350.
- [CLA 90] CLARKE M.J., HANCOCK G.J., "A study of incremental-iterative strategies for non linear analyses", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **29**, 1990, p. 1365-1391.
- [HAS 91] HASHIN Z., "Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface", *J. Mech. Phys. Solids*, **39**, 1991, p. 745-762.
- [HUN 91] HUNT W. H., BROKENBROUGH J.R., MAGNUSEN P.E., "An Al-Si-Mg composite model system: microstructural effects on deformation and damage evolution", *Scripta metall. mater.*, **25**, 1991, p. 15-20.
- [KEL 70] KELLY A., "Interface effects and the work of fracture of a fibrous composite", *Proc. Roy. Soc. London, A* **319**, 1970, p. 95-116.
- [LEN 82] LENE F., LEGUILLON D., "Homogenized constitutive law of a partially cohesive composite materials", *Int. J. Solids Structures*, **18**, 1982, p. 443-458.
- [LLO 91] LORCA J., NEEDLEMAN A., SURESH S., "An analysis of the effects of matrix void growth on deformation and ductility in metal-ceramic composites", *Acta metall. mater.*, **39**, 1991, p. 2317-2335.
- [MIC 93] MICHEL J.C., SUQUET P., "On the strength of composite materials", in M.P. Bendsoe and C. Mota-Soares (Eds.), *Topology Design of Structures*, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1993, p. 355-374.

- [MIC 94] MICHEL J.C., SUQUET P., "An analytical and numerical study of the overall behavior of metal matrix composites". *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, **2**, 1994, p. 637-658.
- [NEE 87] NEEDLEMAN A., "A continuum model for void nucleation by inclusion debonding", *J. Appl. Mech.*, **54**, 1987, p. 525-531.
- [NEE 91] NEEDLEMAN A., Communication personnelle, 1991.
- [SAL 91] SALVO L., SUERY M., LEGOUX J.G., L'ESPERANCE G., "Influence of particle oxidation on age-hardening behaviour of as-fabricated and remelted SiC reinforced Al-1% Mg alloys", *Mat. Sc. Engng.*, A **135**, 1991, p. 129-133.
- [SUQ 87] SUQUET P., "Discontinuities and Plasticity", in *Nonsmooth Mechanics and Applications*, J.J. Moreau and P.D. Panagiotopoulos (eds.), Springer-Verlag, 1987, p. 280-340.
- [SUQ 93] SUQUET P., "Overall potentials and flow stresses of ideally plastic or power law materials", *J. Mech. Phys. Solids*, **41**, 1993, p. 981-1002.
- [THE 93] THEBAUD F., Vers l'introduction de l'endommagement dans la prévision globale du comportement des composites à matrice métallique, thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 1993.
- [TVE 90] TVERGAARD V., "Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal", *Mater. Sci. Eng.*, A **125**, 1990, p. 203-213.