
Modélisation de l'évolution des fonds mobiles en mer et en rivière par éléments finis

Gouri Dhatt* — Jean-Michel Tanguy**
Eric Peltier*** — Bainian Zhang*

* Université de Technologie de Compiègne
BP 649
60206 Compiègne

** Service Technique Central des Ports Maritimes et des Voies Navigables
2, Boulevard Gambetta
60321 Compiègne cedex

*** Laboratoire National d'Hydraulique d'Electricité de France
6, quai Watier
78400 Chatou

RÉSUMÉ. *Le transport des sédiments par l'action des houles et des courants provoque, par l'intermédiaire des processus de dépôt et d'érosion, des modifications des fonds des rivières, des estuaires et des mers. L'objet du présent article est de comparer deux schémas numériques utilisés pour discrétiser l'équation de conservation des fonds, dans le contexte de la méthode des éléments finis. Le premier de type Lax-Wendroff, le second basé sur la méthode des caractéristiques.*

ABSTRACT. *Sediment transport, under waves and currents action, modify bed topography of rivers, estuaries and seas, by means of deposition and erosion processes. The aim of this article is to compare two numerical schemes, used to discretise the bed continuity equation, in the context of the finite element method. The first one is a Lax-Wendroff type scheme and the other one is based on the characteristic method.*

MOTS-CLÉS : *modélisation, éléments finis, sédimentologie, transport saturé, charriage, transport total, caractéristiques, évolution des fonds.*

KEY WORDS : *modelling, finite elements, sedimentology, saturated transport, bed-load, total-load, characteristics, bed evolution.*

Introduction

Les mouvements de sédiments sous les actions dynamiques de l'eau et du vent affectent grandement l'équilibre de nos littoraux et de nos rivières. Ces remaniements sédimentaires, qui résultent des processus d'érosion et de dépôt, peuvent provoquer des mutations irréversibles de l'écosystème, et avoir également des conséquences sur la tenue des ouvrages implantés sur le littoral ou en rivière.

L'étude de ces phénomènes est complexe, car elle nécessite la connaissance d'un grand nombre de paramètres, ainsi que de leurs interactions. Les domaines physiques concernés peuvent être très étendus et les évolutions s'étaler sur de longues périodes de temps. Dans ce cas, il est souvent difficile, voire impossible, d'utiliser des modèles physiques pour reproduire ces phénomènes. Le recours aux modèles numériques constitue alors une solution bien adaptée et moins coûteuse.

Actuellement, la modélisation numérique en sédimentologie est en plein essor, grâce aux progrès de la connaissance des phénomènes physiques, au développement très rapide de la puissance des ordinateurs ainsi qu'aux progrès de la modélisation de l'hydrodynamique (houle-courant). Un certain nombre d'outils ont été développés, mais ils restent encore peu opérationnels, car isolés les uns des autres, ne permettant de résoudre qu'un type de processus et non les problèmes dans toute leur complexité.

Il est donc apparu judicieux, de la part de certains organismes français intéressés par la modélisation numérique en hydraulique :

- le Service Technique Central des Ports Maritimes et des Voies Navigables (STCPMVN) de la Direction des Ports et de la Navigation Maritimes (DPNM) ;
- le Laboratoire National d'Hydraulique (LNH) d'Electricité de France ;
- la SOGREAH associée au Laboratoire d'Hydraulique de France (LHF) ;
- l'Université de Technologie de Compiègne (UTC) ;

de se regrouper sur le thème de la "sédimentologie" pour développer, en commun, un produit de très haut niveau, fruit des dernières innovations en matière de connaissance des phénomènes physiques et de méthodes numériques.

Ce produit consistera en un système logiciel cohérent, dénommé SISYPHE, simulant les processus d'érosion-dépôt générés par les courants et/ou par les houles, dans les domaines maritimes et fluviaux. Ce système prendra en compte les deux dimensions horizontales et, le cas échéant, la dimension verticale des problèmes à traiter. Les modules numériques reposeront sur la méthode des éléments finis (maillage non structuré). Les développements que nous présentons ci-après s'inscrivent dans la première phase de ce projet qui consiste en la conception d'un *modèle de transport de sédiments non-cohésifs à granulométrie homogène, par charriage ou par transport total.*

Dans ce qui va suivre, nous allons présenter la physique des phénomènes pris en compte, ainsi que le modèle mathématique utilisé pour étudier les évolutions des fonds soumis au transport saturé de sédiments. Nous nous intéresserons tout particulièrement à la modélisation numérique associée, pour laquelle nous avons comparé deux formulations différentes. Nous concluons enfin sur le choix du schéma numérique, au travers du passage d'un certain nombre de cas tests.

1. La physique des phénomènes

Le transport solide par charriage et en suspension sont des processus qui interviennent dans la dynamique générale des milieux marins et fluviaux. Les principales composantes, en termes de sollicitations et de processus d'évolution, sont les suivantes :

- le courant et la houle qui interviennent comme sollicitations,
- le transport par charriage qui regroupe les mouvements des particules qui se déplacent au voisinage du fond, dans une couche d'épaisseur très faible (quelques diamètres de particules), par roulement ou glissement sur le fond ou encore par petits sauts (saltation),
- le transport en suspension à l'intérieur de la masse du fluide qui s'étend depuis le niveau supérieur de la couche de charriage jusqu'à la surface de l'écoulement,
- les échanges éventuels entre charriage et suspension,
- l'évolution du fond du domaine considéré, engendré par les processus de dépôt-érosion, reliés au transport des particules.

Nous nous limiterons ici à l'étude du transport de sédiments non-cohésifs de type sable et nous n'envisagerons que le mode de transport dit saturé, qui se développe lorsque le transport effectif s'ajuste à la capacité de transport de l'écoulement. D'une manière générale, le transport saturé concerne le transport par charriage ou le transport total (charriage + suspension).

Faute de moyens d'investigation sophistiqués qui seuls permettraient de caractériser les processus physiques qui se développent à l'intérieur d'une couche de charriage d'épaisseur très faible, le transport par charriage a été jusqu'à présent étudié d'une manière empirique. Quand au transport total, il est évalué soit d'une manière globale [ENG 67], soit comme la sommation du transport par charriage et du transport en suspension [EIN 72] : étant entendu que ce dernier est saturé et que les interactions entre les deux processus sont prises en compte.

Par ailleurs, le transport de sédiments par les courants s'accompagne de phénomènes de dépôt et d'érosion, qui contribuent à modifier les fonds, lesquels, à leur tour, modifient la distribution des courants. Ces processus sont, en nature, totalement imbriqués et concomitants. Malgré cela, l'hydrodynamique et l'évolution des fonds ont, dans la plupart des cas, des constantes de temps différentes : les transformations des fonds ne sont perceptibles qu'à l'issue d'intervalles de temps assez grands, plusieurs marées en site maritime et quelques mois en site fluvial (hormis les crues où il y a interaction immédiate entre tous les processus). On peut alors procéder au couplage explicite des modèles hydrodynamiques et sédimentologiques : solution qui a été choisie dans cette étude. En outre, le transport de sédiments est extrêmement sensible au champ des vitesses (suivant les auteurs, son intensité varie en fonction d'une puissance 3 à 5 de la vitesse moyenne), ce qui rend toute variation de ce dernier très perceptible sur l'évolution des fonds. Sur le plan mathématique, ceci se traduit par une forte non-linéarité de l'équation des fonds.

La modélisation des fonds a été étudiée par plusieurs auteurs et de nombreux modèles numériques sont couramment utilisés pour simuler les transformations des fonds marins ou fluviaux. En France, des modèles monodimensionnels [RAH 89], [LEP 72], [GAI 85] ou bidimensionnels en différences finies [HAM 88], [LAT 89], [PEC 88], ont été développés. Ce n'est que depuis quelques années que ces formulations ont été étudiées avec la méthode des éléments finis [TAN 91], [PEL 91]. Cette expertise, qui recouvre à la fois les domaines physique et numérique, a été mise en commun dans le projet SISYPHE.

2. Modèle mathématique

La construction d'un modèle mathématique de l'évolution des fonds nécessite, au préalable, de procéder à quelques définitions :

- les paramètres physiques caractéristiques des processus à modéliser ;
- la loi de conservation du flux sédimentaire ;
- les lois de comportement empiriques utilisées pour quantifier le transport saturé de matériaux ;
- les hypothèses hydrodynamiques utilisées, ainsi que la prise en compte de l'interaction vitesses-fond.

Ce paragraphe a pour objet de présenter le modèle de l'évolution des fonds sous différentes formes : écriture forte (relation aux dérivées partielles) et écriture faible (modèle variationnel).

2.1. Paramètres hydrosédimentaires

Le schéma ci-dessous illustre les variables caractéristiques du domaine physique considéré, ainsi que la signification des notations utilisées.

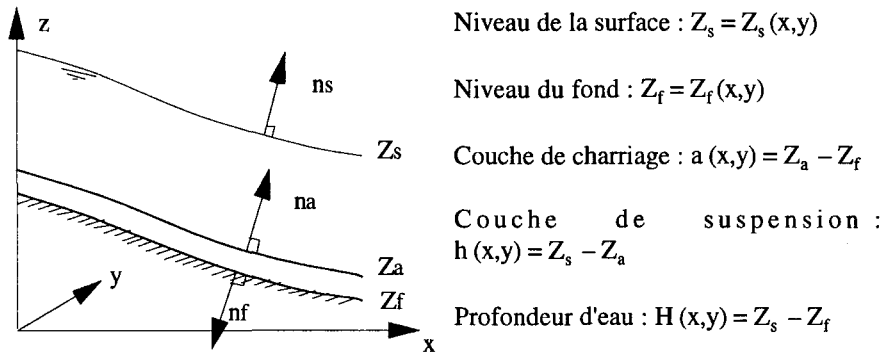


Figure 2.1. *Domaine physique*

Les différents paramètres hydrosédimentaires, utilisés dans cette étude sont les suivants :

- ρ_s, ρ : masse volumique des sédiments secs et du fluide (Kg/m^3)
- τ_b : contrainte hydrodynamique moyenne sur le fond (N/m^2)
- τ_{cr} : contrainte critique de mise en mouvement des particules (N/m^2)
- C_h, K_s : coefficient de Chézy ($\text{m}^{1/2}/\text{sec}$) ou de Strickler ($\text{m}^{1/3}/\text{sec}$)
- ν : viscosité cinématique du fluide (m^2/sec)
- d_{50} : diamètre médian des matériaux (m)
- q_s, q_{ft} : débit volumique de transport solide ($\text{m}^3/\text{m}\cdot\text{sec}$) et débit volumique du fluide ($\text{m}^3/\text{m}\cdot\text{sec}$) par unité de largeur.
- u, v : composantes de la vitesse moyenne du fluide sur la verticale (m/sec)

Dans ce qui suit, nous allons nous limiter à l'étude du transport saturé, qui est constitué soit du transport par charriage à l'intérieur de la couche d'épaisseur "a", soit par le transport total à l'intérieur de la couche d'épaisseur "H". Cette dernière hypothèse suppose que le transport en suspension est saturé.

2.2. Loi de conservation

La loi de conservation du flux sédimentaire de matériaux \vec{q} ($\text{m}^3/\text{m}^2 \cdot \text{sec}$) peut être exprimée sur un volume de contrôle élémentaire V^e avec sa surface S^e . Elle s'écrit :

$$\boxed{\text{Taux d'accumulation de masse dans } V^e} + \boxed{\text{Flux interfaciaux au travers de } S^e} = \boxed{\text{Taux de production / perte dans } V^e}$$

Dans le cas du transport saturé, les taux d'accumulation et de production/perte sont nuls. Il reste :

$$\int_{S^e} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{V^e} \text{div } \vec{q} \, dV = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{soit : } \text{div } \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

La loi de conservation, sous forme intégrée sur la verticale s'écrit, pour la couche de charriage :

$$\int_{Z_f(x,y)}^{Z_a(x,y)} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (2.3)$$

$Z_a(x,y)$ est remplacé par $Z_s(x,y)$ pour le transport total.

Nous pouvons écrire en utilisant la formule d'intégration de Leibnitz :

$$\int_{Z_f}^{Z_a} \text{div } \vec{q} \, dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_f}^{Z_a} q_x \, dz - q_x(Z_a) \frac{\partial Z_a}{\partial x} + q_x(Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_f}^{Z_a} q_y \, dz - q_y(Z_a) \frac{\partial Z_a}{\partial y} + q_y(Z_f) \frac{\partial Z_f}{\partial y} + q_z(Z_a) - q_z(Z_f) \tag{2.4}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} + \vec{q}(Z_a) \cdot \vec{n}_a J_a + \vec{q}(Z_f) \cdot \vec{n}_f J_f = 0 \tag{2.5}$$

avec :

$$q_{sx} = \int_{Z_f}^{Z_a} q_x \, dz ; q_{sy} = \int_{Z_f}^{Z_a} q_y \, dz$$

$$J_a = \left(1 + \frac{\partial Z_a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial Z_a^2}{\partial y^2} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad J_f = \left(1 + \frac{\partial Z_f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial Z_f^2}{\partial y^2} \right)^{1/2}$$

et $\vec{n}_a = \left\langle -\frac{\partial Z_a}{\partial x} ; -\frac{\partial Z_a}{\partial y} ; 1 \right\rangle / J_a$ et $\vec{n}_f = \left\langle \frac{\partial Z_f}{\partial x} ; \frac{\partial Z_f}{\partial y} ; -1 \right\rangle / J_f$

La relation (2.5) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} + q_{na}(x, y) + q_{nf}(x, y) = 0 \tag{2.6}$$

avec : $q_{na}(x, y) = \vec{q}(Z_a) \cdot \vec{n}_a J_a$ et $q_{nf}(x, y) = \vec{q}(Z_f) \cdot \vec{n}_f J_f$

$q_{sx}(x,y)$ et $q_{sy}(x,y)$ exprimés en (m³/m.sec) sont les composantes du flux sédimentaire total, s'exerçant sur la couche de charriage, suivant les deux directions horizontales.

$q_{na}(x,y)$ et $q_{nf}(x,y)$ exprimés en (m³/m².sec), sont les composantes du flux sédimentaire, s'exerçant dans le sens des normales (n_a et n_f) à la couche de charriage (Fig. 2.1).

q_{na} est le flux d'échange entre le charriage et la suspension ;

q_{nf} est le flux d'érosion ou de dépôt entre le fond et la couche de charriage.

Dans le cas du transport saturé, on suppose que $q_{na} = 0$.

Pour le transport total, la couche verticale est représentée par la profondeur d'eau : $H = Z_s - Z_f$, avec $q_{ns} = 0$.

Nous obtenons ainsi la loi de conservation bidimensionnelle :

$$\operatorname{div} \vec{q}_s + q_{nf}(x,y) = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{q}_s = \langle q_{sx}, q_{sy} \rangle \quad (2.7)$$

2.3. Flux interfaciaux

Le flux sédimentaire q_{nf} caractérise les processus de dépôt et d'érosion qui ont lieu avec le fond. Ces échanges entre la couche de charriage (ou la colonne d'eau pour le modèle de transport total) et le fond, provoquent la modification de celui-ci. Si l'on désigne par n la porosité de la couche du fond en contact avec la couche de charriage, la loi de conservation de la matière peut s'écrire sous la forme :

$$q_{nf}(x,y) = (1 - n) \frac{\partial Z_f}{\partial t} \quad (2.8)$$

En rapprochant les équations (2.7) et (2.8), nous retrouvons l'équation bien connue de l'évolution de la cote du fond :

$$(1 - n) \frac{\partial Z_f}{\partial y} + \operatorname{div} \vec{q}_s = 0 \quad (2.9)$$

Le flux de *charriage ou de transport total* q_s (exprimé en $m^3 / m^2 \cdot \text{sec}$) est évalué par une formule empirique.

Pour simplifier les écritures dans la suite de cet article, nous supposons que le facteur $(1 - n)$ est inclus dans Z_f .

2.3. Formules de transport saturé

L'évaluation du transport saturé se fait au moyen de formules empiriques, qui prennent en compte :

— des paramètres hydrodynamiques : u , v , Z_s calculés par un modèle d'écoulement hydrodynamique (u et v sont les composantes de la vitesse moyenne sur la verticale de l'écoulement suivant les directions x et y ; Z_s la cote de la surface libre).

— des paramètres sédimentaires : ρ_s , d_{50} qui représentent respectivement la masse volumique et le diamètre moyen du sédiment.

Nota : dans ce qui suit, nous désignerons par $\vec{\tau}_b = \rho g \frac{|\vec{u}|}{C_h^2} \vec{u}$ en (N/m^2) la contrainte hydrodynamique s'exerçant sur le fond, par $\tau_{*b} = \tau_b / (\rho_s - \rho) g d_{50}$ la contrainte adimensionnelle de cisaillement, par $u_* = \sqrt{\tau_b} / \rho$ en (m/s) la vitesse de cisaillement sur le fond et par $\tau_{*cr} = 0,047$ (Meyer-Peter) la contrainte critique adimensionnelle de début d'entraînement des matériaux sur le fond.

En règle générale, on dispose, pour les formules de transport :

- de formules à seuil

- Meyer-Peter et Müller pour le charriage ($0,4 \leq d_{50} \leq 30$ mm)

$$\begin{cases} \tau_{*b} > \tau_{*cr} & \vec{q}_s = 8 \sqrt{\Delta g d_{50}^3} (\tau_{*b} - \tau_{*cr})^{3/2} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \\ \tau_{*b} \leq \tau_{*cr} & \vec{q}_s = \vec{0} \end{cases} \quad (2.10)$$

- Englund-Hansen pour le transport total ($0,15 \leq d_{50} \leq 0,9$ mm)

$$\begin{cases} \tau_{*b} > \tau_{*cr} & \vec{q}_s = 0,053 \sqrt{\frac{\Delta d_{50}^3}{g}} C_h^2 \tau_{*b}^{5/2} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \\ \tau_{*b} \leq \tau_{*cr} & \vec{q}_s = \vec{0} \end{cases} \quad (2.11)$$

- de formules continues

- Einstein-Brown pour le transport par charriage ($0,3$ mm $\leq d_{50}$)

$$\vec{q}_s = 50,5 \sqrt{g} F \tau_{*b}^2 d_{50}^{3/2} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \quad (2.12)$$

avec :

$$F = \left[\frac{2}{3} + \frac{36 v^2}{g d_{50}^3 \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)} \right]^{1/2} - \left[\frac{36 v^2}{g d_{50}^3 \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)} \right] \quad (2.13)$$

- Ackers-White pour le transport total ($0,08 \leq d_{50} \leq 4$ mm)

$$\vec{q}_s = d_{35} u_* \left(\frac{C_h}{\sqrt{g}} \right)^{n+1} C \left(\sqrt{\frac{\tau_{*b}}{\tau_{*cr}}} - 1 \right)^m \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \quad (2.14)$$

	$1 \leq d_* \leq 60$	$d_* > 60$
C	$\log C = 2,86 \log d_* - (\log d_*)^2 - 3,53$	0,025
n	$1 - 0,56 \log d_*$	0
m	$9,66 / d_* + 1,34$	1,5

2.4. Couplage hydrodynamique-sédimentologie

La construction d'un modèle hydrosédimentaire nécessite de coupler les modèles hydrodynamiques et sédimentologiques. Nous présentons ci-dessous la méthodologie que nous préconisons.

Compte tenu des échelles de temps très différentes qui caractérisent l'hydrodynamique et les évolutions des fonds, nous pouvons dans un premier temps réaliser un couplage explicite entre les deux processus.

Pour chaque pas de temps t à $t + \Delta t$

- calcul hydrodynamique : Z_f fixe
 Résolution d'un modèle de type Saint-Venant (stationnaire ou instationnaire), pour obtenir le champ des vitesses moyennées : (u,v) et le niveau d'eau Z_s .
 ----> sortie : u,v, Z_s
- calcul sédimentologique : u,v, Z_s fixes
 Résolution du modèle d'évolution des fonds en calculant les valeurs du transport q_s obtenues par les formules appropriées de la littérature (cf.§2.3). On utilise un schéma de résolution explicite dans le temps.
 ----> sortie : Z_f
- mise à jour de la rugosité

Figure 2.2. *couplage hydrodynamique - sédimentologique standard*

Dans la pratique, cette stratégie est très inefficace, à cause du coût prohibitif de l'hydrodynamique. De plus, les modifications des fonds doivent être relativement importantes pour générer une variation sensible du champ des vitesses à l'échelle du domaine. Par contre, on peut enregistrer de petites variations locales des vitesses. Nous considérerons alors que ces faibles transformations ont lieu à débit liquide localement constant.

$$\bar{U} \cdot (Z_{s0} - Z_f) = \bar{U}_0 \cdot (Z_{s0} - Z_{f0}) = \bar{Q}_0 \quad \text{soit : } \bar{U} = \bar{Q}_0 / (Z_{s0} - Z_f)$$

Ainsi, après chaque calcul sédimentologique, nous procédons de la manière suivante :

- si l'évolution des fonds obtenue est jugée "suffisamment faible", nous procédons alors à une actualisation locale du champ des vitesses ;
- si l'évolution des fonds est jugée "importante", nous procédons au recalcul complet de l'hydrodynamique.

Remarque : Si l'échelle temporelle est relativement petite, par exemple dans le cas de tourbillons de Karman derrière une pile de pont, on peut maintenir l'organisation ci-dessus.

L'évaluation de "l'importance" des évolutions se fait au travers du critère d'évolution relative suivant : $EVR = \max [\Delta Z_f / (Z_s - Z_t)]_{\text{nombre de points}}$

L'organigramme précédent devient :

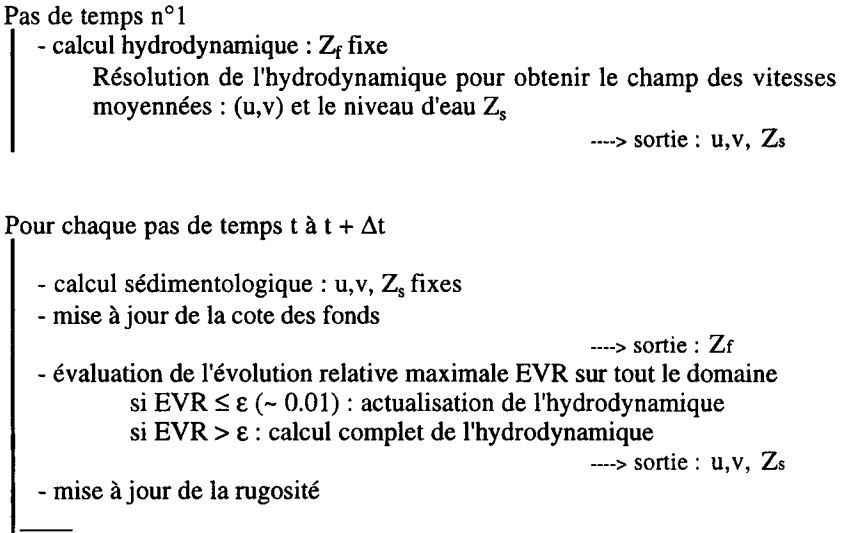


Figure 2.3. couplage hydrodynamique-sédimentologique à érosion relative donnée

3. Modèle numérique

Nous présentons ici l'approche que nous avons utilisée pour résoudre l'équation de conservation des fonds couplée à une formulation empirique du transport saturé (par charriage ou transport total).

3.1. Forme variationnelle

A l'équation (2.9), nous pouvons associer les formes variationnelles suivantes

Forme intégrale forte

$$W_I = \int_A \psi \left(\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \text{div} \bar{q}_s \right) dA = 0 \quad \forall \psi \tag{3.1}$$

Forme intégrale faible

$$W_{II} = \int_A \left[\psi \frac{\partial Z_f}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}} \psi \cdot \overrightarrow{q_s} \right] dA + \oint_S \psi q_n dS_q = 0 \tag{3.2}$$

où $y(x,y)$ est la fonction test, A le domaine considéré, S_q l'abscisse curviligne sur le contour S du domaine A , q_n le flux normal au travers de S .

3.2. Discrétisation par éléments finis

- On recherchera, dans une optique opérationnelle :
- à utiliser des schémas simples et robustes
 - à diminuer le temps de calcul.

Dans cette étude, nous nous limiterons à deux schémas : un schéma centré de type Lax-Wendroff et un schéma aux caractéristiques : notre objectif n'étant pas de présenter un bilan des différents schémas pour la résolution de problèmes non-linéaires de convection.

Les formes intégrales (3.1) et (3.2) sont discrétisées par éléments finis :

$$W_I = \sum_e W_I^e = 0 \quad W_{II} = \sum_e W_{II}^e = 0 \tag{3.3}$$

où l'indice "e" est relatif à l'élément

En utilisant la discrétisation temporelle de la forme :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} \Big|_{\tau} = \frac{Z_f^{t+\Delta t} - Z_f^t}{\Delta t} \quad \text{avec } t \leq \tau \leq t + \Delta t \tag{3.4}$$

la relation (3.2) s'écrit :

$$W_{II} = \int_A \left[\psi \left(Z_f^{t+\Delta t} - Z_f^t \right) - \Delta t \overrightarrow{\text{grad}} \psi \cdot \overrightarrow{q_s}(\tau) \right] dA + \Delta t \oint_{S_q} \psi q_n(\tau) dS = 0 \tag{3.5}$$

En utilisant l'approximation par éléments finis :

$$Z_f = \sum_i N_i Z_{fi} \quad ; \quad \psi = \sum_i N_i \psi_i \quad ; \quad N_i : \text{fonction d'interpolation}$$

nous obtenons le système suivant :

$$[M] \{ \Delta Z_f \} = \Delta t \{ R(\tau) \} \tag{3.6}$$

où [M] est la matrice masse et {R(t)} le résidu, qui représente les termes associés à :

$$\int_A \overrightarrow{\text{grad}} \psi \cdot \overrightarrow{q_s(\tau)} dA - \oint_S \psi q_n(\tau) dS_q$$

Le choix de τ est important pour obtenir un schéma robuste, stable et peu diffusif. Si on choisit $\tau = t$, le schéma est explicite et instable. Si on choisit $\tau = t + \Delta t$, le schéma est implicite et diffusif. Le schéma de Lax-Wendroff que nous présentons ci-après est associé à $\tau = t + \Delta t/2$.

Dans cette étude, nous utilisons un élément triangulaire à 3 nœuds T3 (Fig. 3.1.a)

3.3. Schéma de LAX-WENDROFF

L'adaptation du schéma de Lax-Wendroff à la méthode des éléments finis a été faite notamment par [ARG 89],[DHA 92],[DON 84]. DONEA *et al.* ont présenté le schéma de type Taylor-Galerkine, qui correspond au schéma de Lax-Wendroff pour les problèmes linéaires. Par contre, le schéma présenté ici est une adaptation du schéma de Richtmeyer-Lax-Wendroff pour les problèmes non-linéaires exprimés sous forme conservative.

Ce schéma est utilisé en deux étapes : une étape de prédiction et une étape de correction.

- **Etape de prédiction :**

Par le choix de ψ (constante pour l'élément T3), nous pouvons travailler au niveau de l'élément pour la résolution de (3.1). L'espace admissible de ψ est L^2 et de q_s est C^0 . Nous avons :

$$W_I = \sum_e W_I^e = 0 \Rightarrow W_I^e = 0 \tag{3.7}$$

soit en désignant par \bar{Z}_I la valeur moyenne sur l'élément de la cote du fond :

$$\bar{Z}_I^{t+\Delta t/2} = \bar{Z}_I^t - \frac{1}{A^e} \frac{\Delta t}{2} \int_{A^e} \text{div} \overrightarrow{q_s^t} dA = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{Z}_I^t = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} Z_I^t dA \tag{3.8}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{Z}_I^{t+\Delta t/2} = \bar{Z}_I^t - \frac{\Delta t}{2} \overline{\text{div} \overrightarrow{q_s^t}} \tag{3.9}$$

$\overline{\text{div} \overrightarrow{q_s^t}}$ est la valeur moyenne de la divergence sur l'élément, du vecteur transport, calculée par la formulation suivante :

$$\overline{\text{div } \bar{q}_s^t} = \frac{\partial q_{sx}^t}{\partial x} + \frac{\partial q_{sy}^t}{\partial y} = \langle N, x \rangle \{q_{sx}^t\} + \langle N, y \rangle \{q_{sy}^t\} \tag{3.10}$$

où $\{q_{sx}^t\}$ et $\{q_{sy}^t\}$ représentent les valeurs nodales du transport solide à l'instant t aux 3 sommets de l'élément et $\langle N, x \rangle$ et $\langle N, y \rangle$ les transposés des vecteurs dérivés des fonctions d'interpolation.

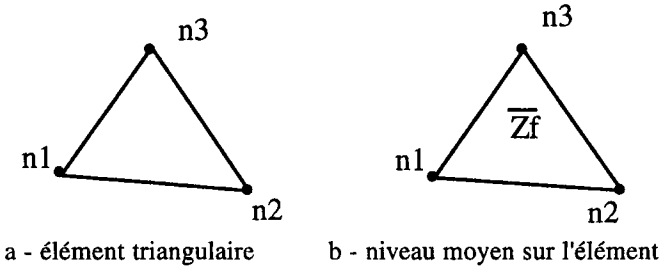


Figure 3.1. *Élément triangulaire à 3 nœuds*

A l'issue de cette première étape, nous sommes en mesure de calculer $\bar{q}_s^{t+\Delta t/2} = \langle \bar{q}_{sx}^{t+\Delta t/2}, \bar{q}_{sy}^{t+\Delta t/2} \rangle$ qui est la valeur moyenne du vecteur transport sur l'élément.

Il est important de noter que cette étape ne nécessite aucun assemblage de vecteur ni de résolution globale ; le calcul se fait élément par élément.

• **Etape de correction :**

Pour cette étape, on utilise la forme variationnelle faible (3.2). L'espace admissible de ψ et de Z_f est C^0 et de q_s est L^2 . Le résidu élémentaire se calcule par la relation :

$$\{r\} = \int_{A^e} [\langle N, x \rangle \bar{q}_{sx}^{t+\Delta t/2} + \langle N, y \rangle \bar{q}_{sy}^{t+\Delta t/2}] dA - \int_{S^e} \langle N \rangle \bar{q}_n^{t+\Delta t/2} dS_q \tag{3.11}$$

puis est assemblé sur le domaine pour obtenir $\{R(t + \Delta t/2)\}$. Les termes sur S^e ne sont calculés que sur les côtés des éléments frontières. Bien que la relation (3.6) puisse être résolue de multiples manières, nous avons choisi une méthode d'itérations de type Jacobi qui donne une bonne convergence :

$$\begin{cases} [M_D] \{\vartheta^i\} = \Delta t \{R(\tau)\} - [M] \{\Delta Z_f^{i-1}\} \\ \{\Delta Z_f^i\} = \{\Delta Z_f^{i-1}\} + \{\vartheta^i\} \end{cases} \tag{3.12}$$

où $[M_D]$ est la matrice masse sous forme diagonale et $[M]$ la matrice masse consistante. Trois ou quatre itérations suffisent pour obtenir la convergence souhaitée (remarquons que $[M]$ est définie positive).

Dans le cas d'un problème à une dimension, ce schéma à deux étapes de type Lax-Wendroff peut être représenté par le diagramme suivant :

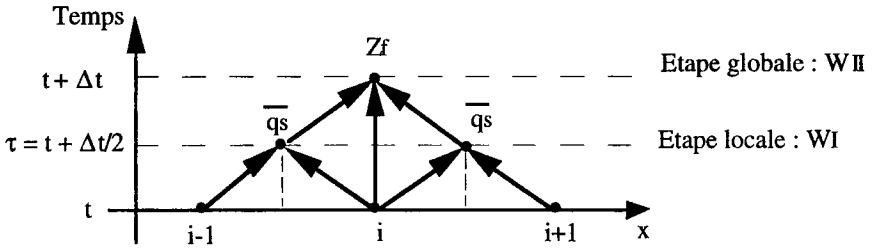


Figure 3.2. Diagramme espace-temps

L'algorithme de ce schéma est présenté ci-dessous :

Pour chaque pas de temps t à $t + \Delta t$

- étape locale
 - obtenir pour chaque élément $Z_f^{t+\Delta t/2}$ en utilisant (3.9)
 - calcul de $\{\bar{q}_s^{t+\Delta t/2}\}$ sur chaque élément.
- étape globale
 - calcul de $\{r(\tau = t + \Delta t)\}$ par (3.11) puis assemblage
 - résolution de (3.6) par itérations (3.12) pour obtenir $\{Z_f^{t+\Delta t}\}$

Figure 3.3. Algorithme du schéma de LAX-WENDROFF

Si l'on applique le schéma de Lax - Wendroff à 2 étapes (utilisé pour la résolution d'équations non linéaires), à la résolution d'une équation linéaire du type $\vec{q}_s = \vec{u}_f Z_f$, où \vec{u}_f peut être assimilé à la vitesse du flux sédimentaire. Il vient :

$$\begin{aligned}
 1^{\text{ère}} \text{ étape : } & Z_f^{t+\Delta t/2} = Z_f^t + \frac{\Delta t}{2} \operatorname{div}(\vec{u}_f Z_f^t) \\
 2^{\text{ème}} \text{ étape : } & Z_f^{t+\Delta t} = Z_f^t + \Delta t \operatorname{div}(\vec{u}_f Z_f^{t+\Delta t/2})
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Si nous substituons $Z_f^{t+\Delta t/2}$ obtenu dans la première équation, dans la seconde, nous obtenons :

$$Z_f^{t+\Delta t} = Z_f^t + \Delta t \operatorname{div}(\bar{u}_f Z_f^t) + \frac{\Delta t^2}{2} \operatorname{div}(\bar{u}_f \operatorname{div}(\bar{u}_f Z_f^t)) \quad (3.14)$$

Nous retrouvons le schéma de Taylor - Galerkin à l'ordre 2 dit TG2, qui est un schéma au second ordre en temps [DON 84].

Faute de pouvoir mener une étude théorique sur la détermination du critère de stabilité relié à l'équation non-linéaire (2.9), nous proposons de retenir le critère de stabilité déterminé par Selmin [SEL 86] :

$$\begin{aligned} \text{monodimensionnel: } c_x &= u_f \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} ; \\ \text{bidimensionnel: } c_x &= u_f \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{8}} ; c_y = v_f \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Remarque : la transposition de ces valeurs obtenues avec le schéma linéaire au schéma non-linéaire permet le choix d'un pas de temps acceptable.

3.4. Schéma aux caractéristiques

Nous allons faire l'hypothèse que le transport solide q_s ne dépend que du débit liquide $\bar{q}_\ell = \langle q_{\ell x}, q_{\ell y} \rangle$ et de la profondeur d'eau H .

$$\bar{q}_s = q_s(q_\ell, H) \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} \quad (3.16)$$

$$\text{soit : } q_{sx} = q_s \left(\frac{q_{\ell x}}{q_\ell} \right) \quad \text{et} \quad q_{sy} = q_s \left(\frac{q_{\ell y}}{q_\ell} \right) \quad (3.17)$$

On peut d'autre part écrire, puisque q_{sx} et q_{sy} sont des fonctions de $q_{\ell x}$, $q_{\ell y}$ et de H :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{sx}}{\partial x} &= \frac{\partial q_{sx}}{\partial q_{\ell x}} \frac{\partial q_{\ell x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sx}}{\partial q_{\ell y}} \frac{\partial q_{\ell y}}{\partial x} + \frac{\partial q_{sx}}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} &= \frac{\partial q_{sy}}{\partial q_{\ell x}} \frac{\partial q_{\ell x}}{\partial y} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial q_{\ell y}} \frac{\partial q_{\ell y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{sy}}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nous voyons apparaître des termes en $\partial H/\partial x$ et $\partial H/\partial y$. Si l'on ne conserve dans le premier membre que des termes en Z_f , l'équation (2.9) s'écrit :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} - \frac{\partial q_{sx}}{\partial H} \frac{\partial Z_f}{\partial x} - \frac{\partial q_{sy}}{\partial H} \frac{\partial Z_f}{\partial y} = S \tag{3.19}$$

avec :

$$S = - \frac{\partial q_{sx}}{\partial q_{tx}} \frac{\partial q_{tx}}{\partial x} - \frac{\partial q_{sx}}{\partial q_{ty}} \frac{\partial q_{ty}}{\partial x} - \frac{\partial q_{sx}}{\partial H} \frac{\partial Z_s}{\partial x} - \frac{\partial q_{sy}}{\partial q_{tx}} \frac{\partial q_{tx}}{\partial y} - \frac{\partial q_{sy}}{\partial q_{ty}} \frac{\partial q_{ty}}{\partial y} - \frac{\partial q_{sy}}{\partial H} \frac{\partial Z_s}{\partial y} \tag{3.20}$$

En exprimant les composantes du vecteur transport en fonction des variables indépendantes choisies, il vient finalement :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} - \left[\frac{q_{tx}}{q_t} \frac{\partial Z_f}{\partial x} + \frac{q_{ty}}{q_t} \frac{\partial Z_f}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial q_s}{\partial H} = S \tag{3.21}$$

soit
$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \vec{c}_f \bullet \overrightarrow{\text{grad}} Z_f = S \tag{3.22}$$

Cette équation traduit donc une propagation des formes du fond, avec déformation due au terme source S, dans la direction du courant, à la célérité c_f donnée par :

$$\vec{c}_f = - \frac{\partial q_s}{\partial H} \vec{t} \quad (> 0) \tag{3.23}$$

Ce schéma de résolution est un schéma de type prédicteur-correcteur qui se décompose en trois étapes [PEL 91] :

• **Étape de prédiction :**

Nous utilisons l'équation de convection (3.23), qui est traitée en deux pas :

• Convection sans terme source (calculée avec la méthode des caractéristiques [HER 86]), pour calculer une valeur approchée \widetilde{Z}_f^t

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + \vec{c}_f \bullet \overrightarrow{\text{grad}} Z_f = 0 \tag{3.24}$$

• Traitement du terme source :

$$\widetilde{Z}_f^{t+\Delta t} = \widetilde{Z}_f^t + \Delta t S^t \tag{3.25}$$

• **Etape de calcul de \vec{q}_s**

A partir de cette estimation du fond à l'instant $t + \Delta t$, on calcule le transport solide avec un θ -schéma :

$$\vec{q}_s^{t+\theta\Delta t} = \theta \vec{q}_s^{\tilde{t}+\Delta t} + (1 - \theta) \vec{q}_s^t \tag{3.26}$$

Avec : $\vec{q}_s^{\tilde{t}+\Delta t} = \vec{q}_s(\tilde{Z}_f^{t+\Delta t})$ et \vec{q}_s calculé explicitement au temps t

• **Etape de correction :**

Dans cette ultime phase, nous résolvons :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} = - \text{div} \left(\vec{q}_s^{t+\theta\Delta t} \right) \tag{3.27}$$

Cette étape est résolue par une méthode éléments finis qui conduit au système linéaire suivant :

$$[M] \{Z_f^{t+\Delta t}\} = [M] \{Z_f^t\} - \Delta t \{R\} \tag{3.27}$$

où $\{R\}$ est associé à $\text{div} \vec{q}_s$. Ce système est résolu en multipliant par l'inverse de la matrice de masse.

4. Description des cas tests

La comparaison des deux schémas a été réalisée sur cinq cas-tests de nature académique ou comportementale, en supposant un écoulement à plafond (surface libre fixe). Les conventions sont illustrées sur le schéma suivant :

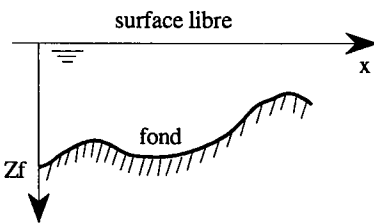


Figure 4.1. Conventions

L'équation (2.9) devient :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} - \text{div} \vec{q}_s = 0 \tag{4.1}$$

le signe négatif dans (4.1) est dû à l'axe des Z_f dirigé vers le bas.

Dans les exemples traités, les paramètres physiques ont les valeurs suivantes :

$$\rho_s = 2665 \text{ Kg/m}^3 ; d_{50} = 0,3 \text{ mm}$$

$$K_f = C_h H^{-1/6} = 80$$

- * **Transport linéaire** (Fig. 4.2) : le test consiste à analyser la convection sans déformation d'une dune en supposant la vitesse du fluide uniforme en tout point : $V_i = Q_0 / 0,3$. L'équation du fond à $t = 0$ est la suivante :

$$\begin{cases} Z_f = 0,3 - 0,1 \sin^2\left(\frac{\pi(x-2)}{8}\right) & \text{pour } x \in [2,10] \\ Z_f = 0,3 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

Pour les trois exemples suivants, nous utilisons l'expression (4.7) pour calculer l'évolution des fonds soumis au transport non-linéaire, évalué par la formule d'Engelund-Hansen.

- * **Dune dans un canal à plafond** (Fig. 4.3) : la dune précédente (4.2) est placée dans un champ de vitesse qui dépend de la profondeur d'eau. Le champ des vitesses est donné au nœud "i" par $V_i = Q_0 / B H_i$. Q_0 est le débit du canal de largeur B et de profondeur H_i au nœud i .
- * **Pente constante soumise à l'érosion** (Fig. 4.4) : le transport solide, non uniforme, conduit à des érosions du fond sur l'ensemble du bief, dont le profil tend vers l'horizontale. L'équation du fond à $t = 0$ est la suivante :

$$Z_f = 0,3 - 0,01 x \quad (4.3)$$

Le champ des vitesses est identique au précédent.

- * **Fosse** (Fig. 4.5) : il s'agit d'étudier l'amorce du processus de comblement d'une fosse, par apport continu de matériaux en transport saturé. Il se produit, comme attendu, un comblement sur la face amont de cette fosse et une érosion sur sa face aval. Les pentes de la fosse sont de 10 %.
- * **Rotation d'un cône dans un champ de vitesse rotationnel** (Fig. 4.6) : c'est le seul exemple vraiment bidimensionnel de cette série de tests. Il consiste à analyser le comportement d'une perturbation soumise à une convection pure. La solution analytique correspond à une convection sans déformation. Le cône, de rayon 6 m est centré en $x_0 = -3,5$, $y_0 = 0$ et a pour équation à $t = 0$:

$$Z_f = e^{-\lambda \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2}} \quad \text{avec } \lambda = 0,5 \quad (4.4)$$

Sa vitesse angulaire est de $\omega = 2 \pi / 32$ rad/sec.

Le tableau suivant dresse un inventaire des données relatives à chacun des cas tests étudiés.

	Dune transport linéaire	Dune canal à plafond	Pente soumise à l'érosion	Evolution d'une fosse	Rotation d'un cône
Géométrie					
Domaine	rectangle	rectangle	rectangle	rectangle	Carré
Dimension /Ox	12 m	12 m	12 m	12 m	25,2 m
Dimension /Oy	2 m	2 m	2 m	2 m	25,2 m
Profondeur d'eau	0,3 m	0,3 m	0,3 m	0,3 m	0,3 m
Maillage					
Nbre d'éléments	768	768	768	768	3528
Nbre de nœuds	441	441	441	441	1849
Type écoult	canal à plafond	canal à plafond	canal à plafond	canal à plafond	domaine à plafond
Débit amont	200 l/s	200 l/s	200 l/s	200 l/s	vitesse angulaire
Transport	Linéaire	Engelund-Hansen	Engelund-Hansen	Engelund-Hansen	Engelund-Hansen
Solution initiale	analytique	analytique	analytique	analytique	analytique
Pas de temps	360 s	1800 s	360 s	720 s	1 s
Temps de simul ⁿ	4 heures	4 heures	430 h	4heures	128 s
Solutions	Analytique	Analytique	Analytique	Analytique	Analytique

Les quatre premiers tests, de nature monodimensionnelle, possèdent une solution analytique qui peut être déterminée par la méthode des caractéristiques. Pour cela, il suffit de transformer l'équation (2.9) en explicitant la formule de transport solide utilisée, en fonction de la variable Z_t .

A cet effet, la formule de transport d'*Engelund-Hansen* (2.11) devient, en utilisant la formule de rugosité de Manning-Strickler pour calculer la contrainte de cisaillement hydrodynamique :

$$\bar{\tau} = \rho g \frac{|\bar{u}| \bar{u}}{K_f^2 H^{1/3}} = \rho g \frac{Q_0^2}{K_f^2 Z_t^{7/3}} \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} \quad (4.5)$$

les contraintes de cisaillement adimensionnelles sont données par :

$$\tau_{*b} = \tau_b / (\rho_s - \rho) g d \quad \text{et} \quad \tau_{*cr} = 0 \quad (4.6)$$

Avec ces diverses expressions, l'équation (4.1) se transforme en :

$$\frac{\partial Z_f}{\partial t} + c_f \frac{\partial Z_f}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} c_f = 1,5 \text{ m/h pour le transport linéaire} \\ c_f = 5,5 \alpha Z_f^{6,5} \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.7)$$

où $\alpha = 3,71 \cdot 10^{-10}$.

Nous obtenons la solution analytique de chacun de ces cas tests par la *méthode des caractéristiques*. Celle-ci nous donne la vitesse de déplacement horizontale de chaque point du domaine par l'expression :

$$\frac{dx}{dt} = 5,5 \alpha Z_f^{6,5} \quad (4.8)$$

Remarque : dans le cas du transport de la dune dans le canal à plafond, il se produit un **choc**, dont les coordonnées dans l'espace (t,x) sont :

$$t = 4 \text{ h } 30 \text{ mn et } x = 8,17 \text{ m}$$

Ce choc n'a pas d'existence réelle. Il correspondrait en nature à un écroulement de la face aval de la dune, qui ne se produit pas dans la réalité, à cause de l'effet diffusif de la turbulence.

5. Analyse des résultats - conclusion

Au vu des résultats obtenus, qui sont illustrés sur les figures ci-dessous, les premières conclusions que l'on peut tirer sont les suivantes :

- * Les réponses numériques sont confondues avec la solution analytique pour les cas **du transport linéaire** et de la **penne constante soumise à l'érosion**.
- * Les réponses sont très voisines pour les cas de **la dune dans un canal à plafond** et de **la fosse**, jusqu'au moment du choc. A noter que le schéma de Lax Wendroff continue de donner une réponse après le choc alors que le schéma aux caractéristiques diverge.
- * **La rotation du cône dans un champ rotationnel** fait par contre apparaître des comportements différents des deux schémas. Le caractère plus diffusif des caractéristiques apparaît d'une part dans la diminution du pic de la perturbation ($h_{\max} = 0,71$ pour Lax Wendroff contre $h_{\max} = 0,52$ pour les caractéristiques) et d'autre part dans l'allongement de la forme dans le sens de la rotation.

En conclusion, les deux schémas numériques donnent des résultats sensiblement comparables, excepté sur le cas du cône tournant où le schéma aux caractéristiques s'avère plus diffusif. Grâce à sa simplicité de mise en œuvre et à son efficacité numérique, c'est le schéma du type Lax-Wendroff qui a été retenu pour être implanté dans SISYPHE.

Remerciements

Nous rappelons que la mise en œuvre du projet SISYPHE est rendue possible grâce aux participations substantielles accordées par le Fonds d'Aide à la Recherche et à l'Innovation du Secrétariat d'Etat à la Mer, la Direction des Ports et de la Navigation Maritimes et la Direction des Transports Terrestres.

Nous remercions également les comités de lecture pour leurs remarques et suggestions.

Notations

a	épaisseur de la couche de charriage	(L)
C_h	coefficient de Chézy	($L^{1/2}T^{-1}$)
c_x	nombre de courant / Ox : $c_x = u \Delta t / \Delta x$	(-)
c_y	nombre de courant / Oy : $c_y = v \Delta t / \Delta y$	(-)
d	diamètre caractéristique du grain	(L)
d_{50}	diamètre médian de la courbe granulométrique (50% de passant au tamisage)	(L)
d_m	diamètre du grain : m % de passant au tamisage	(L)
d_*	diamètre sédimentologique $d_* = (\Delta g / v^2)^{1/3} d_m$	(L)
g	accélération de la pesanteur	(LT^{-2})
h	épaisseur de la couche de suspension $h = Z_s \cdot Z_a$	(L)
H	profondeur d'eau : $H = Z_s \cdot Z_f$	(L)
I	pente de la ligne d'énergie	(-)
n	porosité de la couche de fond	(-)
K_f	coefficient de Strickler $K_f = V/I^{1/2}H^{1/3}$	($L^{1/3}T^{-1}$)
\bar{q}_l	débit liquide par unité de largeur : $\bar{q}_l = \langle q_{lx}, q_{ly} \rangle$	(L^2T^{-1})
\bar{q}_s	débit solide par unité de largeur : $\bar{q}_s = \langle q_{sx}, q_{sy} \rangle$	(L^2T^{-1})
t	temps	(T)
\bar{u}	vitesse moyenne sur la verticale : $\bar{u} = \langle u, v \rangle$	(LT^{-1})
x,y	coordonnées horizontales	(L)
Z_a	niveau supérieur de la couche de charriage	(L)
Z_f	niveau du fond	(L)
Z_s	niveau de la surface libre	(L)
Δ	densité apparente du sédiment $\Delta = (\rho_s - \rho)$	(-)
ψ	fonction test de Galerkin	(-)
ρ	masse volumique de l'eau	(L^2T^{-1})
ρ_s	masse volumique de du grain	(L^2T^{-1})
τ_b	contrainte hydrodynamique moyenne sur le fond	($ML^{-1}T^{-2}$)
τ_{*b}	contrainte hydrodynamique adimensionnelle sur le fond	0
τ_{cr}	contrainte critique de mise en mouvement des particules	($ML^{-1}T^{-2}$)
τ_{*cr}	contrainte critique adimensionnelle de mise en mouvement	0
v	viscosité cinématique de l'eau $v \approx 1.10^{-6}$	(LT^{-2})

Bibliographie

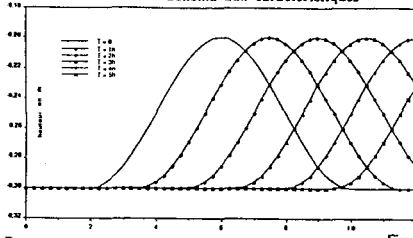
- [ACK 73] ACKERS P., WHITE W.R., "Sediment transport : New Approach and Analysis", *Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 99, n°HY11, pp 2041-2061, Nov. 1973.
- [ARG 89] J. ARGYRIS J., St. DOLTSINIS I. and FRIZ H.(1989), "Hermès space shuttle : exploration of reentry aerodynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989.
- [BEZ 90] BÉZIER F., "Problèmes de transport-diffusion par éléments finis", Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne, France, 1990.
- [DHA 81] DHATT G, TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A. éditeur Paris, 543 p., 1981.
- [DHA 92] DHATT G, GAO, VON KARMAN *lecture series*, May 1992.
- [DON 91] DONÉA J., "Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de convection-diffusion", *Revue européenne des éléments finis*, vol. 1 n°3, pp 225 - 252, 1992.
- [DON 84] DONÉA J., "A Taylor-Galerkin method for convective transport problems", *International Journal for Numerical in Engineering*, Vol. 20, 101-119, 1984.
- [EIN 72] EINSTEIN H.A. *Sedimentation in River Ecology and Man*, R. Oglesby ed., Academic Press, 1972.
- [ENG 67] ENGELUND F., HANSEN E., "A Monograph on Sediment Transport in Alluvial Streams", Teknik Vorlag, Denmark, 1967.
- [GAI 85] GAILLARD P., "Calcul de l'impact d'ouvrages côtiers sur l'évolution du littoral par une modélisation 1D", Note technique SOGREAH NT 2120, 1985.
- [HAM 88] HAMM L., "CYTENGEL program - User's guide", Rapport interne SOGREAH 5 2001 R5, 1988.
- [HAU 77] HAUGUEL A., "Utilisation de modèles mathématiques pour l'étude du transport solide", Rapport EDF n°HE 42/77.38, 36 pages, 1977.
- [HAU 79] HAUGUEL A., "Modélisation numérique du transport solide", Rapport n°3- rapport EDF HE-42/79.40, 1979.
- [HER 86] HERVOUET J.M., "CARAC, module de convection en éléments finis par la méthode des caractéristiques", Rapport EDF HE-41/86.21, 1986.
- [HIR 88] HIRSCH C., *Numerical computation of internal and external flows : Volume 1, Fundamentals of numerical discretization*, Ed. John Wiley et Son, 1988.
- [LAT 89] LATTEUX B., BENOÎT M., PELTIER E., "TRANSO : un modèle numérique d'évolution des fonds par charriage sous l'action des courants marins". Notice descriptive, limitations et quelques applications tests", Rapport EDF HE 42/89.30, 1989.
- [LAX 60] LAX P.D. and WENDROFF B., "Systems of conservation laws", *Communication on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, 217-237, 1960.
- [LAX 62] LAX P.D. and WENDROFF B., "On the stability of difference schemes", *Communication on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 15, 363-371, 1962.
- [LAX 64] LAX P.D. and WENDROFF B., "Difference schemes for hyperbolic equations with high-order of accuracy", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 17, 381-398, 1964.
- [LEP 72] LEPETIT J.P., GRAFF M., "Modèle mathématique de transport littoral - programme TRALI - Notice d'utilisation", Rapport EDF-LNH HE 42/72.51, 1972.
- [MOR 85] MORTON K.W., "Generalised Galerkin methods for hyperbolic problems", *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 52 , 847-871, 1985.
- [PEC 86] PÉCHON Ph., "Modélisation numérique du transport littoral et comparaison à des mesures expérimentales", Rapport EDF HE 42/87.12, 1986.
- [PEL 90] PELTIER E., DUPLEX J., "Code TSEF, note de principe", rapport EDF HE-42/90.44, 1990.
- [PEL 91] PELTIER E., DUPLEX J., LATTEUX B., PÉCHON P., CHAUSSON P., "Finite element model for bed-load transport and morphological evolution", *2nd International conference on Computer Modelling in Ocean Engineering*, Barcelona sept. 30th - October 4th 1991.
- [RAH 89] RAHUEL J.L., HOLLY F.M., CHOLLET J.P., BELLEUDY Ph, YANG G., "Modelling of river bed evolution for bed load sediment mixture", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 115, n°11, Nov. 1989.
- [RIC 67] RICHTMEYER and MORTON, *Difference methods for initial-value problems*, Interscience, New York, 1967.
- [SEL 86] SELMIN V., "Simulation par une méthode d'éléments finis de problèmes hyperboliques avec discontinuité", Thèse de doctorat en Sciences Appliquées, Université de Liège, 1986.
- [TAN 91] TANGUY J. M., "Modélisation du transport solide par les courants à l'aide de la méthode des éléments finis", Thèse de PH. D., Université Laval, Québec, 1991.

[VAN 84] VAN RIJN L.C., "Sediment transport, Part I : Bed Load Transport", *Journal of the Hydraulic Engineering*, Vol. 110, n°10, pp 1431-1456, 1984.

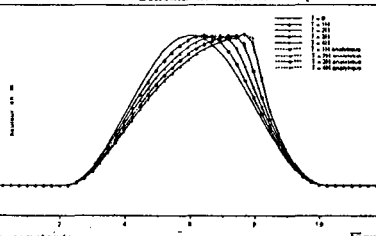
[VAN 89] VAN RIJN L.C., "Handbook - sediment transport by currents and waves", Delft Hydraulics Laboratory, Report H461., 1989.

[ZHA 92] ZHANG B, "Modélisation des écoulements à surface libre, avec fonds mobiles, par éléments finis", Thèse de doctorat., Université de Technologie de Compiègne, France, 1992.

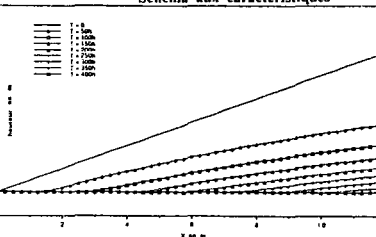
Transport linéaire Figure 4.2
Schéma de Lax-Wendroff
Schéma aux caractéristiques



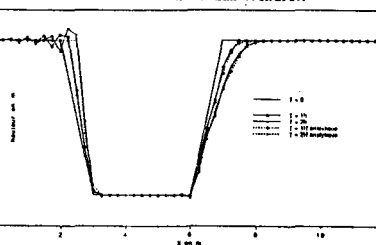
Dune Figure 4.3
Schéma de Lax-Wendroff
Schéma aux caractéristiques



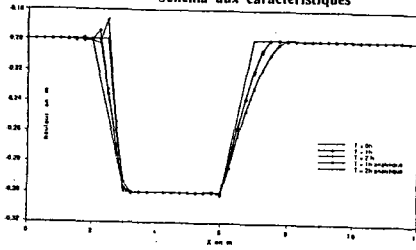
Pente constante Figure 4.4
Schéma de Lax-Wendroff
Schéma aux caractéristiques



Fosse Figure 4.5a
Schéma de Lax-Wendroff



Fosse Schéma aux caractéristiques Figure 4.5b



TEST DU CONE TOURNANT
($\lambda = 0,5$)

Rotation d'un cône Schéma de Lax-Wendroff Figure 4.6

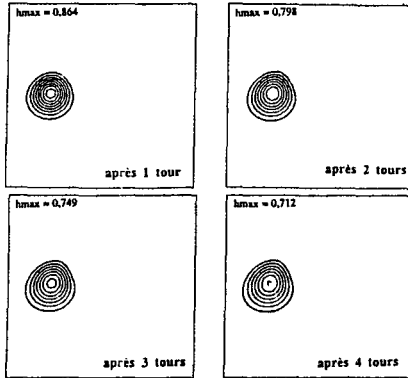


Schéma aux caractéristiques

