
Sur l'adaptativité des maillages à base de quadrilatères

Application à l'automatisation de calculs éléments finis en élasticité 2D

Patrice Coorevits — Jean-Pierre Pelle — Philippe Rougeot

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS de Cachan / CNRS / Université P. et M. Curie
61 avenue du Président Wilson
94235 Cachan Cedex

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous proposons une procédure d'adaptativité des maillages à base de quadrilatères. Cette procédure est basée sur une mesure d'erreur en relation de comportement, sur une technique de prédiction des maillages robuste qui prend automatiquement en compte les zones de concentration de contraintes et sur un mailleur automatique en quadrilatères. Nous proposons en application pour les structures élastiques 2D l'extension dans le cas d'éléments quadrilatéraux de l'automatisation des calculs éléments finis, que nous avons déjà développé pour les triangles. L'utilisateur décrit le problème mécanique et il donne le niveau de précision souhaité. La procédure d'automatisation fournit alors, pour un coût de calcul aussi réduit que possible, une solution approchée qui respecte la précision désirée. Des exemples d'application sont présentés pour des discrétisations utilisant des quadrilatères à 4 ou à 8 nœuds.

ABSTRACT. This paper gives a procedure of mesh adaptivity with quadrilateral elements. This procedure uses an error measure based on the constitutive relation, an efficient adaptive technique which automatically takes account of the singularities and the regions of stress concentration and a mesh generator of quadrilateral elements. We propose as application for 2D elastic structures the extension of automation of the finite element analysis which has been developed for triangular elements to the quadrilateral elements. The user describes the problem and the level of desired accuracy. The procedure then provides an approximate solution for a minimal computation cost with the respect of the desired accuracy. Examples are presented for discretizations using 4- or 8-node quadrilateral elements.

MOTS-CLÉS : erreur en relation de comportement, adaptativité, maillage en quadrilatères, automatisation.

KEY WORDS : error in constitutive relation, adaptivity, mesh with quadrilateral elements, automation.

1. Introduction

Depuis une quinzaine d'année, de nombreux estimateurs d'erreur pour les problèmes linéaires ont été proposés et étudiés par différents auteurs :

- indicateurs d'erreurs construits à partir des résidus des équations d'équilibre ([BAB 78], [GAG 83], [KEL 83]...),
- indicateurs d'erreurs obtenus en comparant la contrainte éléments finis et une contrainte obtenue par lissage ([ZIE 87], [ZIE 89], [ZIE 92]...).

Pour notre part, nous développons depuis 1975, une méthode générale de contrôle de la qualité des solutions éléments finis qui est basée sur la notion d'erreur en relation de comportement et sur des techniques adaptées de construction de champs admissibles ([LAD 75], [LAD 83], [LAD 86], [LAD 91], [LAD 92],...). En couplant cette mesure d'erreur et la h-génération de maillages, une procédure d'adaptation des maillages a été développée. Ces études ont été jusqu'ici effectuées uniquement avec des maillages triangulaires ([LAD 86], [COO 92a], [COO 92b], [COO 93a]). L'objet de cet article est de présenter l'extension de ces différentes méthodes aux éléments quadrilatéraux.

Au paragraphe 2, nous rappelons la notion d'erreur en relation de comportement et les grandes lignes de son utilisation dans le cadre des calculs éléments finis et nous développons en annexe la technique de construction des champs admissibles pour les quadrilatères.

Au paragraphe 3, nous rappelons le principe de la procédure d'adaptativité. Elle prend en compte automatiquement la présence de singularités et plus généralement la présence de zones de concentration de contraintes [COO 93a]. Le mailleur automatique capable de générer des maillages avec des mélanges d'éléments triangulaires et quadrilatéraux ou avec seulement des quadrilatères a été obtenu à partir du mailleur ARAIGNEE développée au LMT. Cette adaptation utilise les techniques de transformation de triangles en quadrilatères proposées dans [RAN 93]. Les exemples présentés en élasticité 2D prouvent l'efficacité de la méthode retenue. De plus, un exemple test [BEC 91] permet de mesurer la sensibilité de notre mesure d'erreur à la distorsion des éléments sur différents maillages et un autre de comparer les performances de éléments triangulaires et quadrilatéraux.

Au paragraphe 4, nous proposons en application l'extension aux quadrilatères de la technique d'automatisation des calculs que nous avons déjà développée pour les triangles [COO 93b]. L'objectif visé est de réduire les interventions de l'utilisateur à la description du problème à traiter (géométrie de la structure et données mécaniques) et au choix du niveau de précision désirée pour l'analyse éléments finis. Elle permet, même à un utilisateur non spécialiste en calcul des structures, de réaliser des analyses éléments finis avec une qualité fixée à l'avance pour un coût aussi réduit que possible. Les exemples présentés montrent que cette méthode fonctionne aussi bien pour les éléments quadrilatéraux que pour les triangles.

2. Erreur en relation de comportement

Nous considérons ici le problème du calcul d'une structure en élasticité 2D (contraintes planes ou déformations planes). Mais toutes les notions qui vont être introduites s'étendent sans difficultés au cas axisymétrique.

2.1. Notations

Nous supposons que la structure occupe un domaine Ω . Sur une partie $\partial_1\Omega$ du bord $\partial\Omega$, le champ de déplacement est imposé :

$$U = U_d$$

Sur la partie complémentaire :

$$\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$$

on impose une densité d'efforts F_d . D'autre part, Ω est soumis à une densité d'efforts f_d et l'opérateur d'élasticité du matériau (opérateur de HOOKE) est noté K . Le problème élastostatique peut être formulé de la façon suivante :

Trouver un champ de déplacement U et un champ de contrainte σ tels que :

- U vérifie les liaisons cinématiques :

$$U = U_d \text{ (+ régularité)} \tag{1a}$$

- σ vérifie les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} &\forall U^* \text{ (régulier) tel que } U^* = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega \\ &\int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon(U^*) d\Omega = \int_{\Omega} f_d^T U^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_d^T U^* dS \end{aligned} \tag{1b}$$

- σ et la déformation $\varepsilon(U)$ vérifient la relation de comportement élastique :

$$\sigma = K \varepsilon(U) \tag{1c}$$

Nous supposons que ce problème est résolu de façon approchée par la méthode classique des éléments finis en déplacement. Le champ de déplacement approché est noté U_h et le champ de contrainte σ_h .

2.2. Mesure des erreurs de discrétisation

Pour mesurer les erreurs de discrétisation, nous utilisons la notion d'erreur en relation de comportement introduite par LADEVEZE [LAD 75]. Les idées de base

de la méthode, ainsi que les procédures de mise en œuvre ([LAD 83], [LAD 86], [LAD 91]), sont brièvement rappelées ci-dessous.

2.2.1. *Définition et mesure de l'erreur*

Soit \hat{U} un champ de déplacement cinématiquement admissible, c'est-à-dire un champ de déplacement qui vérifie [1a] et $\hat{\sigma}$ un champ de contrainte statiquement admissible, c'est-à-dire un champ de contrainte qui vérifie [1b]. La quantité :

$$\hat{e} = \hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U}) \tag{2}$$

est appelée *erreur en relation de comportement* associée au couple $(\hat{U}, \hat{\sigma})$. Si \hat{e} est nul, alors $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ est la solution du problème [1]. Sinon, \hat{e} permet d'apprécier la qualité de $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ en tant que solution approchée du problème [1]. Pour mesurer cette erreur \hat{e} , on utilise classiquement la norme en énergie sur la structure :

$$e = \|\hat{e}\|_{\Omega} = \|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\Omega} \tag{3}$$

avec :

$$\|\sigma\|_{\Omega} = \left[\int_{\Omega} \sigma^T K^{-1} \sigma d\Omega \right]^{1/2} \tag{4}$$

A cette erreur absolue, on associe l'erreur relative globale :

$$\varepsilon = \frac{\|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\Omega}}{\|\hat{\sigma} + K\varepsilon(\hat{U})\|_{\Omega}} \tag{5}$$

ainsi que la contribution à cette erreur d'une partie E de Ω (en pratique E sera un élément quelconque du maillage) :

$$\varepsilon_E = \frac{\|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_E}{\|\hat{\sigma} + K\varepsilon(\hat{U})\|_{\Omega}} \tag{6}$$

avec :

$$\|\sigma\|_E = \left[\int_E \sigma^T K^{-1} \sigma dE \right]^{1/2} \tag{7}$$

La mesure globale ε permet de quantifier la qualité globale de l'approximation $(\hat{U}, \hat{\sigma})$ et les contributions locales ε_E permettent de localiser les erreurs sur la structure. Bien entendu, on a :

$$\varepsilon^2 = \sum_E \varepsilon_E^2 \tag{8}$$

2.2.2. Construction des champs admissibles

Pour pouvoir appliquer cette démarche, il est nécessaire de faire un post-traitement de la solution E.F. (U_h, σ_h) de façon à construire, à partir des données du problème de référence [1] et de cette solution E.F. (U_h, σ_h) , un couple déplacement-contrainte $(\hat{U}_h, \hat{\sigma}_h)$ admissible. Dans le cadre de la méthode des éléments finis en déplacement de type conforme, on sait que le champ de déplacement U_h est cinématiquement admissible. En conséquence, par simplicité, on choisit généralement :

$$\hat{U}_h = U_h \tag{9}$$

Par contre, la contrainte σ_h calculée n'est pas statiquement admissible. Il est donc nécessaire de construire un champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ qui vérifie rigoureusement les équations d'équilibre. Pour effectuer cette construction, on impose à $\hat{\sigma}_h$ d'être relié à σ_h par les conditions de prolongement :

$$\int_E (\hat{\sigma}_h - \sigma_h)^T \varepsilon(\varphi_i) dE = 0 \tag{10}$$

qui doivent être vérifiées pour toute fonction de base φ_i associée à la discrétisation éléments finis utilisée et pour tout élément E du maillage.

Dans une première étape, en utilisant [10], on détermine sur les faces des éléments, uniquement par des calculs locaux nœuds par nœuds des densités d'effort \hat{F} telles que :

$$\int_E f_d^T U^* dE + \int_{\partial_2 E} \eta_E \hat{F}^T U^* dS = 0 \tag{11}$$

pour tout U^* , champ de déplacement de solide sur l'élément E . Dans [11], $\eta_E = \pm 1$ et η_E est constant sur chaque face de E . De plus, sur une face commune à deux éléments E_1 et E_2 , on a :

$$\eta_{E_1} + \eta_{E_2} = 0 \tag{12}$$

Dans une deuxième étape, le champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ est construit sur chaque élément E en déterminant une solution simple des équations d'équilibre :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\sigma}_h + f_d &= 0 \quad \text{dans } E \\ \hat{\sigma}_h n &= \eta_E \hat{F} \quad \text{sur } \partial E \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

où n est, sur ∂E , le vecteur normal unité extérieur (voir annexe). En effet, la condition [11] montre que les équations [13] admettent des solutions. Il est à noter que [11] est encore vérifiée, si l'on remplace, sur une face Γ , la densité \hat{F} construite par $\hat{F} + \hat{H}$ où \hat{H} est une densité d'effort à résultante nulle et à moment nul sur Γ . Par exemple pour les quadrilatères à quatre nœuds, \hat{H} est construit affine sur chaque côté Γ :

$$\hat{F} = A + (\lambda_1 - \lambda_2)B \tag{14}$$

avec : A et B vecteurs constants et λ_1 et λ_2 coordonnées barycentriques sur le côté Γ . En prenant :

$$\hat{H} = (B^T t)(\lambda_2 - \lambda_1)t \tag{15}$$

où t est un vecteur unitaire porté par Γ , on obtient des champs $\hat{\sigma}_h$ qui conduisent à une mesure d'erreur de meilleure qualité [COO 92c].

3. Détermination de maillages optimisés

Nous utilisons ici la h -version qui est la procédure d'adaptativité des maillages actuellement la plus utilisée : on modifie la taille et la topologie des éléments mais le degré des polynômes d'interpolation est conservé pour les différents maillages. D'autre procédures telle que la p -version où l'on conserve le maillage et où l'on modifie le degré des polynômes d'interpolation ont également été introduites ([ODE 89], [SZA 86]). Mais actuellement, cette méthode est peu utilisée car les codes industriels comportent rarement des éléments de degré supérieur à 2.

3.1. Procédure d'adaptativité

3.1.1. Définition d'un maillage optimal

L'objectif de toute procédure d'adaptativité est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision ϵ_0 tout en minimisant les coûts de calcul. Nous utilisons le critère d'optimalité introduit par LADEVEZE et coll. ([LAD 86], [LAD 91]); un maillage T^* est optimal relativement à une mesure d'erreur ϵ si :

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon^* = \epsilon_0 \text{ précision demandée} \\ N^* \text{ nombre d'éléments minimum} \end{array} \right\} \tag{16}$$

Ce critère d'optimisation conduit naturellement à minimiser les coûts de calcul. Pour résoudre le problème [16], on utilise la procédure suivante :

- (i) on effectue un premier calcul sur un maillage T relativement grossier

(ii) on calcule l'erreur globale ϵ et les contributions locales ϵ_E

(iii) on détermine les caractéristiques du maillage optimal \mathbf{T}^* .

La méthode qui permet de résoudre le point (iii) est décrite brièvement au paragraphe suivant. Ensuite, on construit le maillage \mathbf{T}^* à l'aide d'un mailleur automatique et l'on effectue un second calcul éléments finis.

3.1.2. Calcul des tailles optimales

Pour déterminer les caractéristiques du maillage optimal \mathbf{T}^* , la méthode consiste schématiquement à calculer sur chaque élément E du maillage \mathbf{T} un coefficient de modification de taille :

$$r_E = \frac{h_E^*}{h_E} \tag{17}$$

où h_E est la taille de l'élément E et h_E^* la taille qu'il faut imposer aux éléments de \mathbf{T}^* dans la zone de E pour assurer l'optimalité. Le calcul des coefficients r_E est basé sur le taux de convergence des contributions à l'erreur :

$$\epsilon_E = C h^{p_E} \tag{18}$$

où p_E est un coefficient de convergence qui dépend du type d'éléments utilisé mais aussi de la régularité de la solution. Ces coefficients sont calculés de la façon suivante ([COO 92a], [COO 92b], [COO 93a]) :

- (i) détection automatique des nœuds singuliers et évaluation numérique du coefficient p_E pour les éléments connectés aux nœuds singuliers,
- (ii) pour les autres éléments, on fixe : $p_E = p$, degré du type d'éléments utilisé.

Le nombre d'éléments de \mathbf{T}^* peut être évalué par :

$$N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^2} \tag{19}$$

Le problème [16] devient :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^2} \quad \text{avec } \sum_E r_E^{2p_E} \epsilon_E^2 = \epsilon_0^2 \tag{20}$$

La résolution numérique de [20] permet de calculer les coefficients r_E et d'obtenir ainsi une carte des tailles optimales.

3.2. Construction du maillage

Une fois les tailles optimales déterminées, le maillage optimisé T^* est construit. Pour cela, il faut utiliser un mailleur automatique capable de respecter correctement une carte de taille. Plusieurs mailleurs de ce type ont été réalisés par différents auteurs [GEO 91] et certains de ces mailleurs commencent à être commercialisés. Pour les exemples que nous présentons ci-dessous, nous avons utilisé le mailleur ARAIGNEE développé au LMT. Ce mailleur générant uniquement des éléments triangulaires, nous utilisons pour transformer les triangles en quadrilatères la méthode développée par RANK et coll. dans [RAN 93].

Cette méthode consiste à combiner deux triangles voisins en un quadrilatère. Evidemment cette stratégie ne peut créer un maillage constitué uniquement de quadrilatères pour un nombre impair de triangles. Même dans le cas d'un nombre pair, il peut rester des triangles isolés. Une seconde stratégie permet de résoudre ces difficultés : les triangles sont combinés en quatre quadrilatères (figure 1) et les triangles isolés en trois quadrilatères (figure 2). Toute géométrie peut ainsi être maillée en n'utilisant que des éléments quadrilatéraux. Bien sûr, le changement de tailles des éléments est pris en compte dans la procédure de calcul des coefficients r_e de façon que la taille finale des quadrilatères soit la taille désirée.

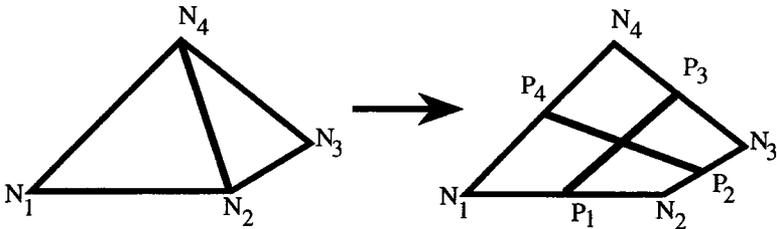


Figure 1. Quadrilatères créés par combinaison de deux triangles

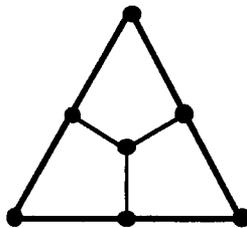


Figure 2. Triangle décomposé en trois quadrilatères

3.3. Contrôle de l'optimalité

Un nouveau calcul éléments finis est ensuite effectué sur ce maillage. Pour juger de l'efficacité des différentes procédures utilisées, il convient de contrôler l'optimalité du maillage T^* . Une première vérification consiste simplement à calculer l'erreur ε^* de discrétisation sur ce maillage. Si cette erreur n'est pas voisine de la précision désirée ε_0 , il est certain que le maillage n'est pas optimal. Par contre, même si ε^* est proche de ε_0 , cela ne suffit pas à prouver l'optimalité de T^* .

Pour contrôler l'optimalité une méthode simple consiste à déterminer à nouveau une carte de tailles optimales pour une précision demandée égale à la précision obtenue ε^* . Si le maillage construit est parfaitement optimal, la procédure doit donner des coefficients de modification de taille uniformes et égaux à 1. Sur tous les exemples, nous présenterons ces cartes de coefficients r_e , appelée cartes d'optimalité, qui permettent d'apprécier la qualité du maillage optimisé obtenu. En pratique, on considère que les tailles demandées sont correctement respectées si :

$$0,75 \leq r_e \leq 1,25 \quad [21]$$

3.4. Indice d'effectivité

Il est souhaitable qu'une mesure d'erreur e se comporte comme l'erreur vraie e_h lorsque la taille h des éléments tend vers 0 ([ODE 89], [STR 92a], [STR 92b]). De façon précise, si l'on a :

$$\|e_h\| = O(h^p) \quad [22]$$

où $\|e_h\|$ est une norme adéquate de l'erreur vraie, on souhaite avoir également :

$$e = O(h^p) \quad [23]$$

Cette propriété est vérifiée s'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que, lorsque la taille h des éléments tend vers 0 :

$$C_1 e \leq \|e_h\| \leq C_2 e \quad [24]$$

La qualité d'une mesure d'erreur est aussi évaluée au moyen de l'indice d'effectivité :

$$\gamma = \frac{e}{\|e_h\|} \quad [25]$$

Cet indice d'effectivité doit être aussi proche de 1 que possible.

Dans une procédure d'automatisation, il nous semble également important d'imposer à la mesure d'erreur e d'être conservative, c'est-à-dire de toujours majorer l'erreur vraie :

$$\gamma \geq 1 \quad [26]$$

Cette condition est en effet indispensable pour garantir le respect de la qualité demandée par l'utilisateur.

Il est à noter que, pour la plupart des indicateurs d'erreurs proposés dans la littérature, cette condition n'est pas vérifiée ([ZIE 87], [ODE 89], [STR 92a], [STR 92b]); seuls les indicateurs basés sur la dualité [STR 92a] vérifient cette propriété. Notre méthode permet de construire une mesure d'erreur e qui est conservative et qui se comporte comme l'erreur vraie lorsque h tend vers 0; elle vérifie en effet les inégalités [24] avec $C_2 = 1$.

4. Exemples

4.1. Exemples d'optimisation en quadrilatères

L'ensemble des procédures décrites ci-dessus ont été programmées dans le code d'estimation d'erreur ESTEREF ([LAD 91], [LAD 92]) que nous développons depuis plusieurs années. Il s'agit d'un post-processeur qui peut être interfacé avec tout code éléments finis et tout mailleur automatique capable de respecter une carte de taille. Actuellement, ESTEREF est interfacé avec CASTEM 2000 (qui a été utilisé pour les exemples présentés) et avec ABAQUS. Nous présentons ci-dessous trois exemples de construction de maillages optimisés sur des problèmes 2D utilisant des quadrilatères à 4 nœuds ou 8 nœuds.

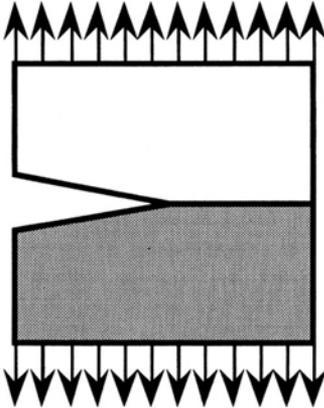
Le premier exemple (figure 3) est une plaque fissurée traitée en contrainte plane avec un mélange de quadrilatères à 8 nœuds et de triangles à 6 nœuds. L'erreur imposée est de 2%. Le second exemple est une console traitée en contraintes planes avec un mélange de quadrilatères à 4 nœuds et de triangles à 3 nœuds (figure 4). L'erreur imposée est de 5%.

Pour chacun d'eux, nous donnons : (a) le problème mécanique, (b) le maillage initial, (c) le maillage optimisé, (d) la carte d'optimalité.

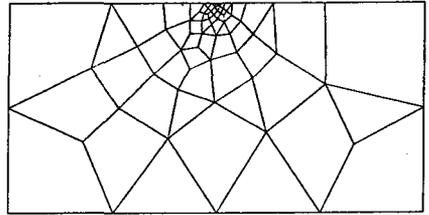
Pour le second exemple, nous avons calculé sur un maillage très fin optimisé pour 1% une solution que l'on peut considérer comme solution de référence. Ceci nous permet de calculer l'indice d'effectivité γ de l'erreur en relation de comportement. Ainsi, nous avons obtenu $\gamma = 1,30$ sur le maillage initial et $\gamma = 1,34$ sur le maillage optimisé.

Le troisième exemple est un cas test comportant à la fois des singularités et des zones de concentration de contraintes qui permet de vérifier que la procédure automatique proposée fonctionne correctement. Le calcul est effectué en contrainte plane avec des quadrilatères à 8 nœuds et l'erreur désirée est de 5%. Sur la figure 5, nous donnons : (a) le problème mécanique, (b) le maillage initial, (c) la carte des contributions locales ϵ_E , (d) la carte des coefficients de convergence p_E , (e) le maillage optimisé, (f) la carte d'optimalité.

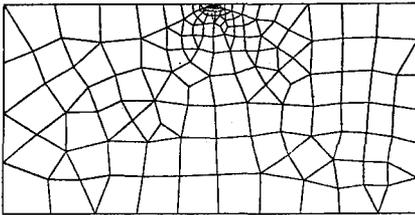
Pour chacun des exemples l'erreur demandée est bien respectée et les cartes d'optimalité prouvent l'efficacité des méthodes utilisées. Sur ces exemples, il est à noter que le maillage optimisé a été obtenu en une seule itération. Au vu des nombreux exemples traités, nous avons constaté qu'une seule itération suffit chaque fois que l'erreur sur le maillage initial n'excède pas de l'ordre de 3 à 4 fois l'erreur demandée. Bien entendu, pour des maillages initiaux très grossiers deux ou trois itérations peuvent être nécessaires.



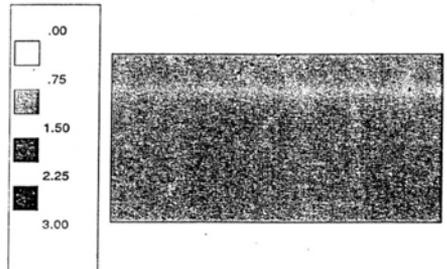
(a) Problème mécanique
 Quadrilatères huit nœuds
 Triangles à six nœuds



(b) Maillage initial
 70 éléments - 219 nœuds $\epsilon = 9.7\%$

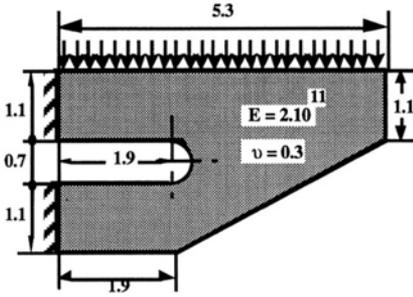


(c) Maillage optimisé
 370 éléments - 1091 nœuds $\epsilon = 1.4\%$

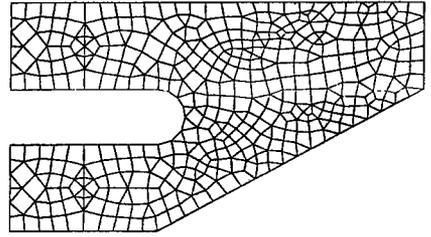


(d) Carte d'optimalité

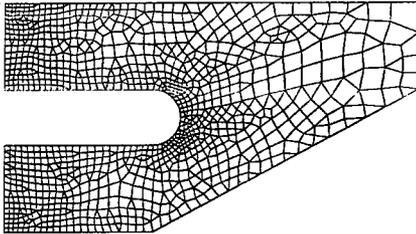
Figure 3. Plaque fissurée- Erreur souhaitée $\epsilon_0 = 2\%$



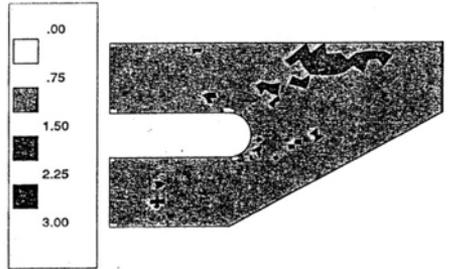
(a) Problème mécanique
 Quadrilatères à quatre nœuds
 Triangles à trois nœuds



(b) Maillage initial
 437 éléments - 437 nœuds
 $\epsilon = 11.7 \%$

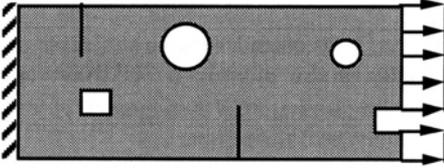


(c) Maillage optimisé
 1090 éléments - 1096 nœuds $\epsilon = 4.5 \%$

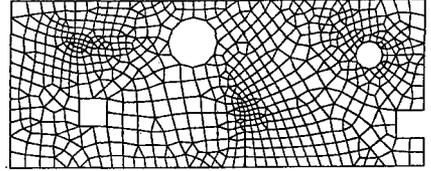


(d) Carte d'optimalité

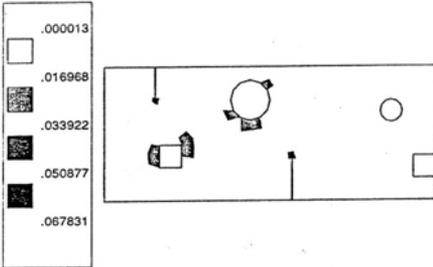
Figure 4. Console test - Erreur souhaitée $\epsilon_0 = 5\%$



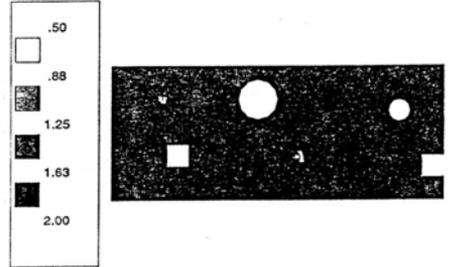
(a) Problème mécanique
 Quadrilatères à huit nœuds
 Triangles à six nœuds



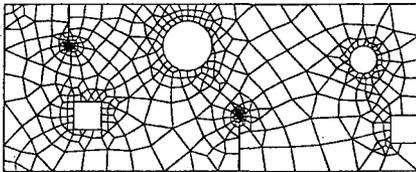
(b) Maillage initial
 730 éléments - 2220 nœuds $\epsilon = 13.4\%$



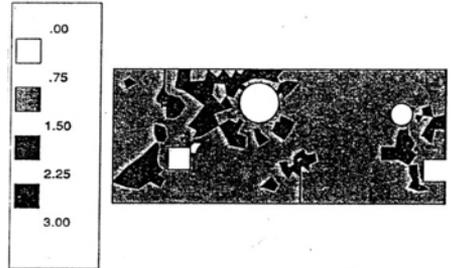
(c) Carte des ϵ_E



(d) Carte des p_E



(e) Maillage optimisé
 605 éléments - 1839 nœuds $\epsilon = 5.4\%$



(f) Carte d'optimalité

Figure 5. Cas test en traction - Erreur souhaitée $\epsilon_0 = 5\%$

4.2. Cas tests

Pour tester la qualité de notre mesure d'erreur, nous considérons un problème de flexion pure d'une poutre en élasticité (figure 6). Le module d'YOUNG vaut $E = 10^5$, le coefficient de POISSON $\nu = 0.0$, la longueur $L = 20$ et la hauteur $H = 4$. La solution exacte de ce problème peut être obtenue analytiquement :

$$u = \frac{1}{E} \left(-x + \frac{1}{2} xy \right) \text{ et } v = \frac{-1}{4E} x^2 \quad [27]$$

Afin d'étudier l'influence de la distorsion des éléments, six maillages différents sont utilisés (figure 7). Les résultats des mesures d'erreur sont regroupés dans les tableaux 1 à 3 pour des quadrilatères à 4 nœuds.

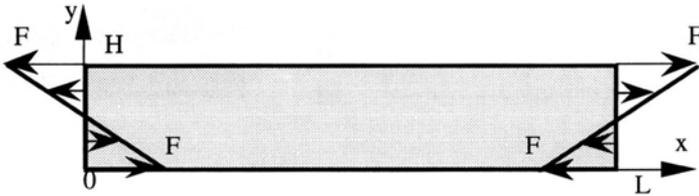


Figure 6. Flexion pure sur une poutre en élasticité

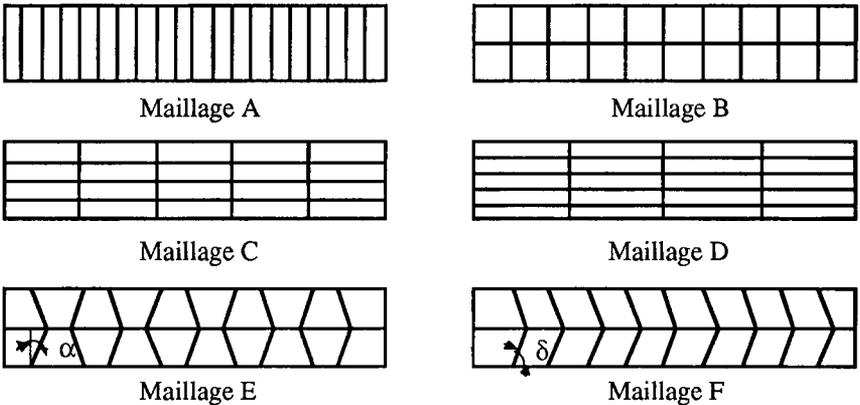


Figure 7. Maillages avec différentes mesures de distorsion des éléments

Maillage	ε (%)	γ
A	8.80	1.00
B	17.69	1.02
C	39.41	1.22
D	48.78	1.28

Tableau 1. Influence de l'allongement

α	ε (%)	γ
0°	17.69	1.02
10°	19.25	1.04
20°	22.09	1.08
30°	25.86	1.12
40°	31.86	1.17

Tableau 2. Influence de α

δ	ε (%)	γ
90°	17.69	1.02
80°	21.20	1.13
70°	31.84	1.43
60°	49.93	1.87
50°	72.36	2.50

Tableau 3. Influence de δ

Ce test a déjà été utilisé pour plusieurs indicateurs d'erreur par BECKERS et ZHONG [BEC 91]. Ces résultats montrent que notre mesure d'erreur est bien moins sensible à l'allongement et à l'angle α que les indicateurs testés mais qu'elle est plus sensible à l'angle δ .

4.3. Comparaison des éléments triangles et quadrilatères

Nous considérons le problème de flexion parabolique d'une poutre en contrainte plane (figure 8). La solution exacte de ce problème qui ne présente pas de singularités est connue :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{E}(2y - H)\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + \frac{2 + 3\nu}{E}\left(\frac{y^3}{3} - H\frac{y^2}{2} + \frac{H^2}{6}y\right) \\
 v &= \frac{-\nu}{E}(y^2 - Hy)(x - L) + \frac{1}{E}\left(-\frac{x^3}{3} + Lx^2\right) - \frac{1 + 2\nu}{E}\frac{H^2}{6}x
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Le module d'YOUNG vaut $E = 2.10^5$, le coefficient de POISSON $\nu = 0.3$, la longueur $L = 2.4$ et la hauteur $H = 0.8$. La figure 9 donne l'évolution de l'erreur ε en

fonction du temps de calcul éléments finis sur une station HP735 pour des triangles et des quadrilatères à approximation linéaire. Les deux premiers maillages sont constitués respectivement de 12 quadrilatères de côté 0.2 et de 24 triangles, les maillages suivants sont créés par subdivision successive. Cet exemple montre l'avantage des éléments quadrilatéraux sur des maillages réguliers, mais il est important de noter que les quadrilatères sont sensibles à la distorsion. Le tableau 4 regroupe les indices d'effectivité obtenus sur les différents maillages utilisés.

	N° 1	N°2	N°3	N°4	N°5
Triangles	1.31	1.31	1.28	1.20	1.14
Quadrilatères	1.13	1.09	1.08	1.08	1.07

Tableau 4. Indices d'effectivité γ

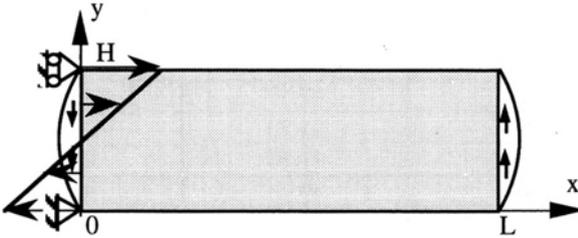


Figure 8. Flexion parabolique sur une poutre en élasticité

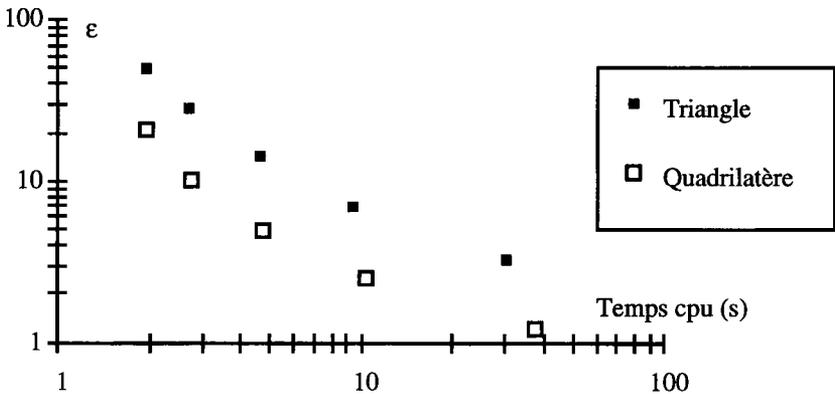


Figure 9. Evolution de l'erreur ϵ en fonction du temps de calcul pour les éléments linéaires

Le même exemple est repris pour des triangles et des quadrilatères à approximation quadratique (figure 10). On constate encore l'avantage des éléments quadrilatéraux sur des maillages réguliers.

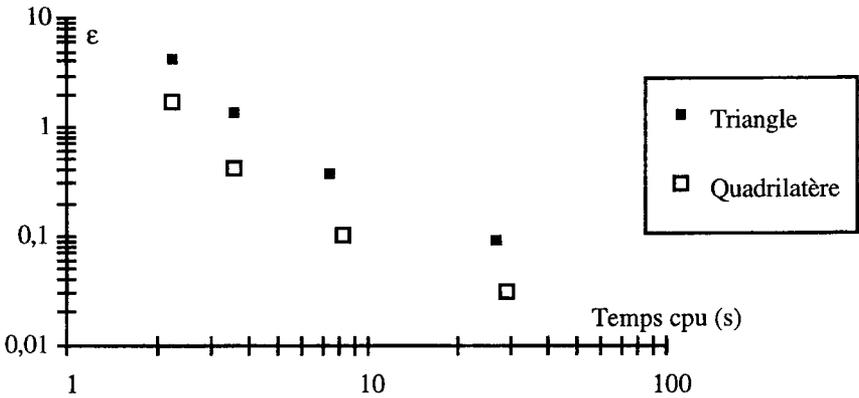


Figure 10. Evolution de l'erreur ε en fonction du temps de calcul pour les éléments quadratiques

5. Automatisation des calculs 2D

5.1. Algorithme d'automatisation

L'objectif est de minimiser les interventions de l'utilisateur dans la phase de calcul proprement dite. De façon précise, cette intervention doit se limiter aux opérations suivantes :

1. description de la géométrie
2. description des données mécaniques (déplacements imposés, charges appliquées, coefficients d'élasticité des matériaux)
3. indication de la précision ε_0 désirée.

A partir d'un premier maillage T_0 , l'algorithme décrit sur la figure 11 permet d'obtenir en quelques itérations un maillage optimisé pour la précision ε_0 . Pour le choix du maillage initial T_0 , deux procédures peuvent être utilisées :

Choix (1) : l'utilisateur décrit la géométrie de la structure par des super-triangles et des super-quadrilatères qui constituent alors le maillage initial T_0 ;

Choix (2) : l'utilisateur peut aussi préciser le nombre d'éléments approximatif qu'il désire sur ce maillage (ce qui revient à fixer le coût de la première analyse E.F.). Dans ce cas, on en déduit, à partir de la surface de la structure, la taille moyenne utile et le maillage construit, avec cette consigne, un maillage initial T_0 quasi-uniforme.

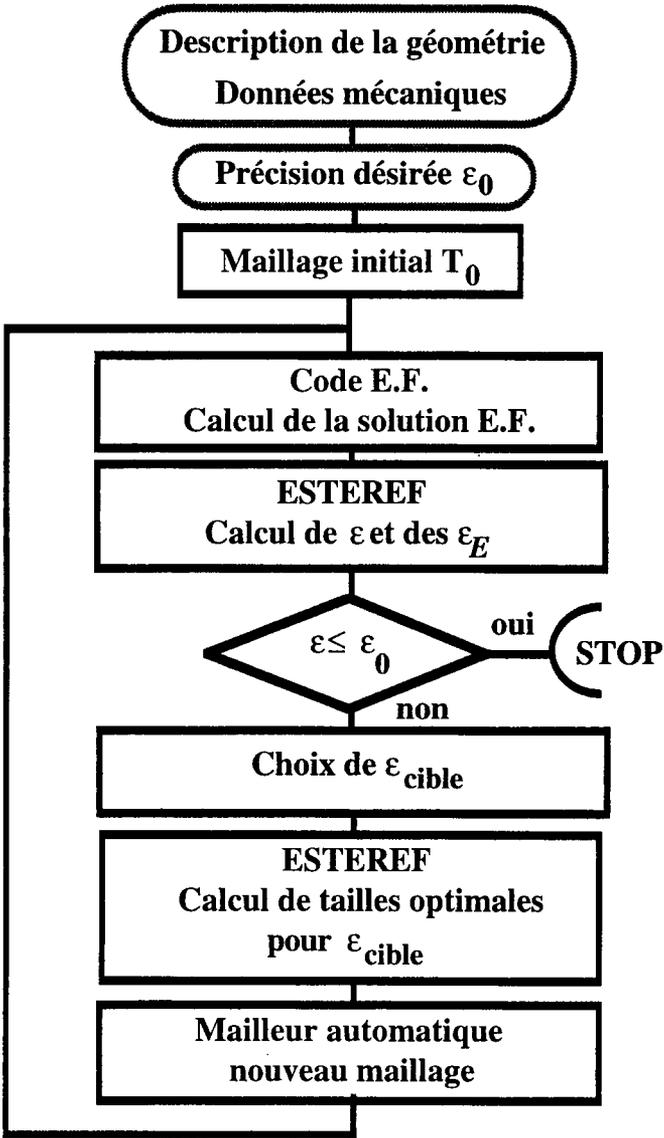


Figure 11. Automatisation des calculs

Le premier maillage grossier étant construit, on effectue une première analyse E.F. dont on détermine la précision ε avec le post-processeur ESTEREF. On compare alors cette précision à la précision désirée ε_0 . Comme le maillage T_0 est grossier, on a généralement $\varepsilon > \varepsilon_0$. Il faut donc faire au moins une itération d'optimisation pour atteindre la précision ε_0 . Si ε n'est pas trop grand devant ε_0 , en pratique si :

$$\varepsilon \leq \theta \varepsilon_0 \quad [29]$$

où θ est un coefficient, on choisit comme valeur cible :

$$\varepsilon_{\text{cible}} = \varepsilon_0 \quad [30]$$

Dans le cas contraire, on fixe la valeur cible par :

$$\varepsilon_{\text{cible}} = \varepsilon / d \quad [31]$$

où d est un coefficient. Expérimentalement, nous avons constaté que les valeurs :

$$\theta = 4 \quad \text{et} \quad d = 3 \quad [32]$$

donnent de bons résultats pour les calculs 2D que l'on utilise des quadrilatères à 4 nœuds ou à 8 nœuds et des triangles à 3 ou 6 nœuds. Une carte de taille est calculée par ESTEREF, en prenant $\varepsilon_{\text{cible}}$ comme précision imposée. Le nouveau maillage est construit à l'aide d'un mailleur automatique et l'on recommence une itération en effectuant une nouvelle analyse E.F. En quelques itérations (de 1 à 4 selon le maillage initial), la précision désirée est atteinte. En pratique, une tolérance est mise sur le test d'arrêt : $\varepsilon \leq (1 + t)\varepsilon_0$ avec $t = 1.2$.

5.2. Exemples

5.2.1. Exemple 1

L'exemple de la console est traité avec un mélange de quadrilatères à 4 nœuds et de triangles à 3 nœuds (figure 12) en contrainte plane en utilisant un maillage initial très grossier (choix (1)). En trois étapes une précision de 4.9 % est atteinte, pour une précision demandée de 5%. Il est à noter que le maillage obtenu par cette procédure est voisin de celui obtenu en une étape à partir d'un maillage initial plus fin (figure 9). Sur cet exemple, nous avons aussi calculé les indices d'effectivité (tableau 5).

Nombre d'éléments	5	72	476	851
Indice d'effectivité γ	1.65	1.23	1.33	1.32

Tableau 5. Indices d'effectivité γ

Cet exemple est repris avec des quadrilatères à 8 nœuds et des triangles à 6 nœuds avec les deux types d'initialisation : choix (1) (maillage à 5 éléments) et choix (2) (maillage à 37 éléments) (figure 13). La précision demandée est de 2%. Là encore, on constate que les maillages optimisés obtenus à partir de maillages initiaux différents sont très voisins.

Pour tester la robustesse de la procédure nous avons construit un maillage initial régulier très fin comportant 2319 éléments ce qui conduit à une erreur de 3.2%. (figure 14) En une itération, un maillage optimisé et beaucoup moins fin est obtenu. Il comporte 412 éléments pour une précision de 2.0%.

Enfin à titre indicatif, pour le maillage initial à 2319 éléments, le temps CPU (sur station HP735) nécessaire à la réalisation du maillage, au calcul éléments finis et à l'évaluation des erreurs est de 199s (dont 33s pour l'évaluation d'erreurs et 42s pour le maillage). En comparaison, le temps CPU total nécessaire à la procédure automatique (figure 12) est de 35s (dont 13s pour les évaluations d'erreurs et 5s pour les maillages) avec le choix (1) et de 32s (dont 12s pour les évaluations d'erreurs et 5s pour les maillages) avec le choix (2). On constate ainsi un gain d'un facteur d'environ 6, ce qui avait déjà été constaté pour les triangles [COO 93b].

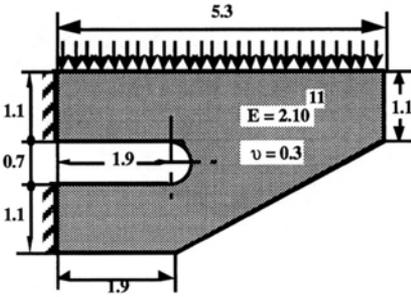
5.2.2. Exemple 2

Nous prenons ici l'exemple d'une dent d'engrenage (figure 15). En initialisant la procédure avec un maillage très grossier, la précision demandée de 2% est atteinte en 4 itérations avec une précision finale de 1.7 %.

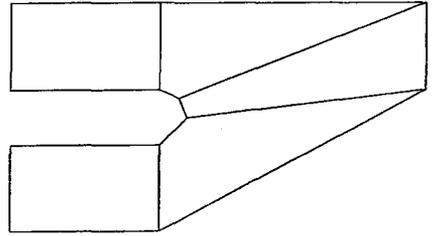
5.2.3. Exemple 3

L'exemple d'un barrage constitué de deux matériaux (béton et roche) est traité en n'utilisant que des quadrilatères à 4 nœuds (figure 16). En initialisant la procédure avec un maillage grossier, la précision demandée de 5% est atteinte en 3 itérations avec une précision finale de 4.2 %.

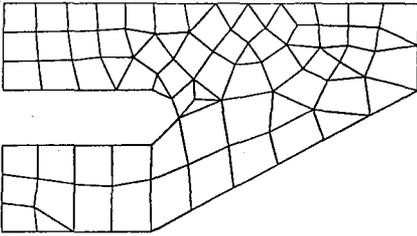
La carte d'optimalité montre que le maillage n'est pas aussi optimal que lorsqu'on mélange des triangles et des quadrilatères. Ceci est dû au fait que les éléments étant subdivisés en quatre, les tailles optimales calculées doivent être multipliées par deux pour générer le maillage en triangles, le mailleur automatique a alors plus de difficultés pour respecter les tailles souhaitées.



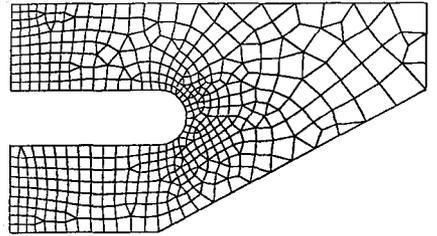
a) Triangles à trois nœuds
Quadrilatères à quatre nœuds



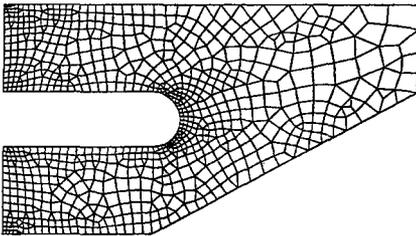
b) Maillage initial
5 éléments - 12 nœuds $\epsilon = 53.1\%$



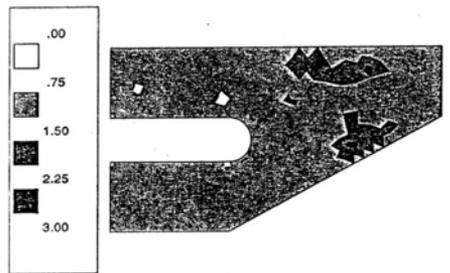
c) Etape 1
72 éléments - 85 nœuds $\epsilon = 22.7\%$



d) Etape 2
476 éléments - 498 nœuds $\epsilon = 6.8\%$

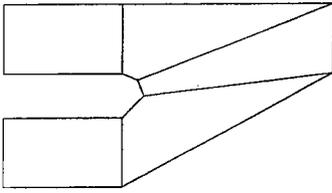


e) Maillage optimisé
851 éléments - 876 nœuds $\epsilon = 4.9\%$

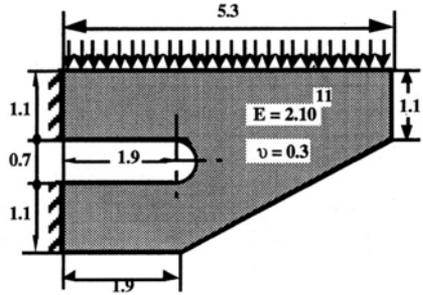


f) Carte d'optimalité

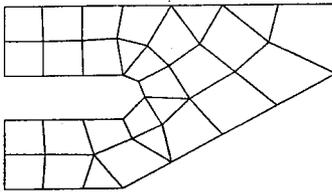
Figure 12. Console test- Erreur souhaitée $\epsilon_0 = 5\%$



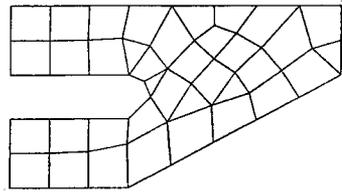
a) Initial : 5 éléments - 28 nœuds $\epsilon = 59.1\%$



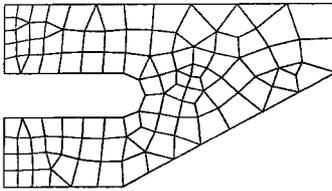
b) Quadrilatères à huit nœuds
Triangles à six nœuds



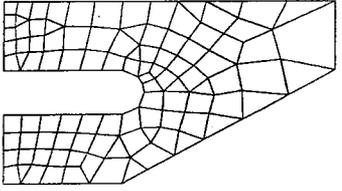
c) Etape 1 : 29 éléments - 110 nœuds $\epsilon = 19.0\%$



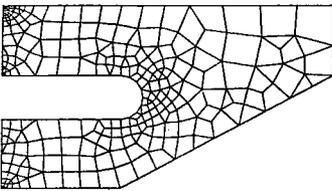
d) Initial : 37 éléments - 138 nœuds $\epsilon = 19.3\%$



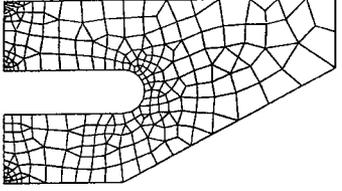
e) Etape 2 : 108 éléments - 357 nœuds $\epsilon = 10.1\%$



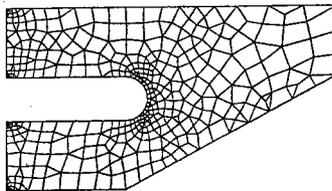
f) Etape 1 : 101 éléments - 336 nœuds $\epsilon = 10.2\%$



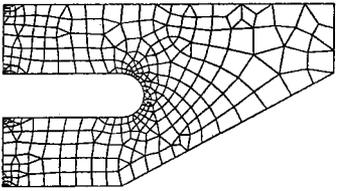
h) Etape 3 : 267 éléments - 844 nœuds $\epsilon = 4.1\%$



i) Etape 2 : 298 éléments - 939 nœuds $\epsilon = 3.1\%$

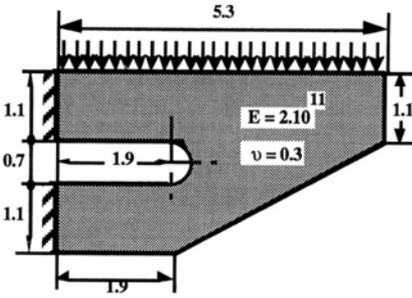


j) Optimisé : 453 éléments - 1386 nœuds $\epsilon = 1.7\%$

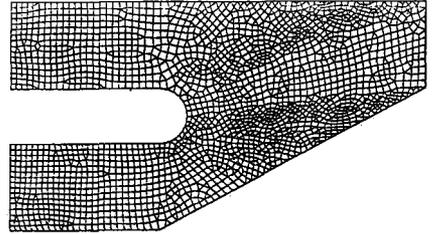


k) Optimisé : 366 éléments - 1145 nœuds $\epsilon = 2.0\%$

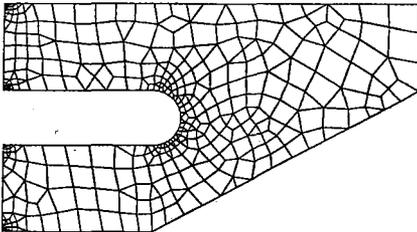
Figure 13. Console test- Erreur souhaitée $\epsilon_0 = 2\%$



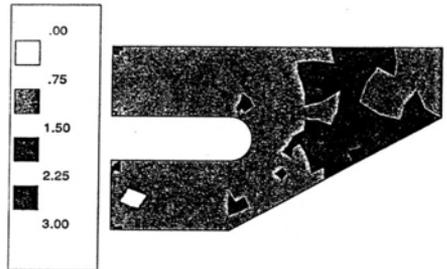
a) Problème mécanique



b) Maillage initial
2319 éléments - 6866 nœuds $\epsilon = 3.2\%$

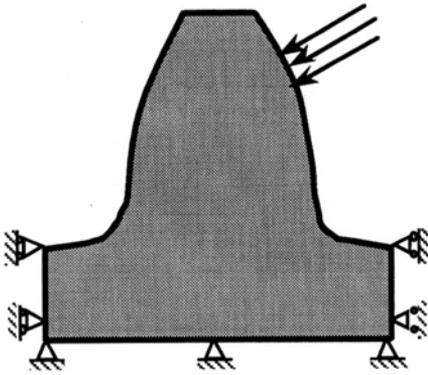


c) Maillage optimisé
412 éléments 1297 nœuds $\epsilon = 2.0\%$

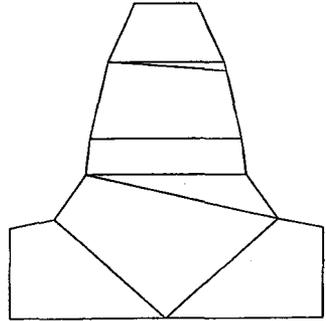


d) Carte d'optimalité

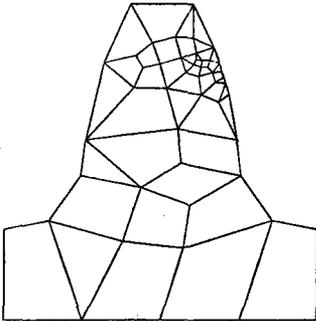
Figure 14. Console test- Erreur souhaitée $\epsilon_0 = 2\%$



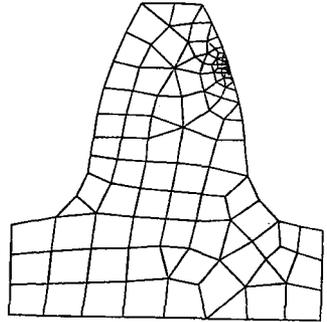
a) *Quadrilatères à huit nœuds
Triangles à six nœuds*



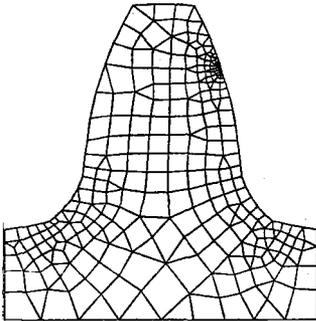
b) *Maillage initial
8 éléments - 39 nœuds $\epsilon = 89.3\%$*



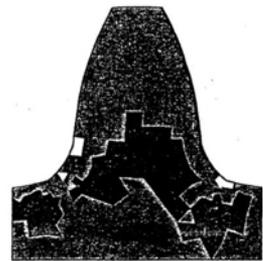
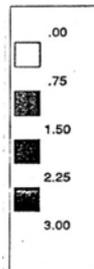
c) *Etape 1
45 éléments - 150 nœuds $\epsilon = 26.2\%$*



d) *Etape 2
146 éléments - 463 nœuds $\epsilon = 5.9\%$*

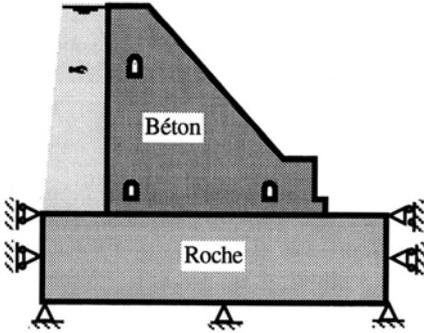


e) *Maillage optimisé
304 éléments - 929 nœuds $\epsilon = 1.7\%$*

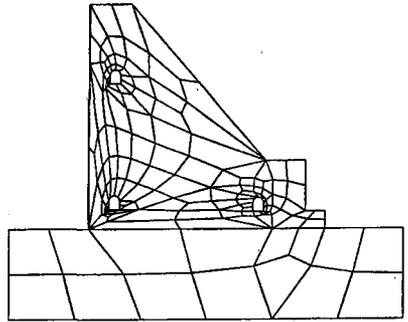


f) *Carte d'optimalité*

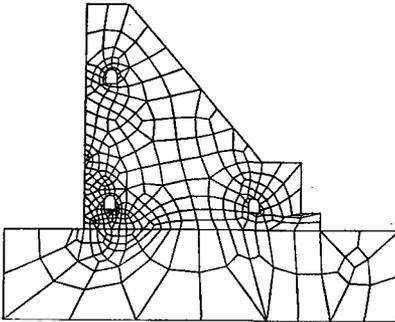
Figure 15. Dent d'engrenage- erreur souhaitée $\epsilon_0 = 2\%$



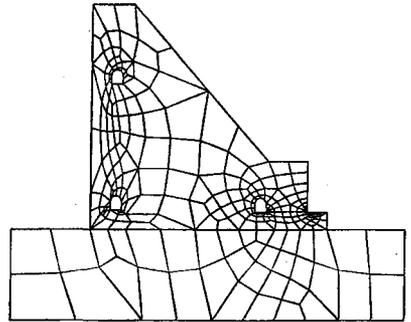
a) Problème mécanique
Quadrilatères à quatre nœuds



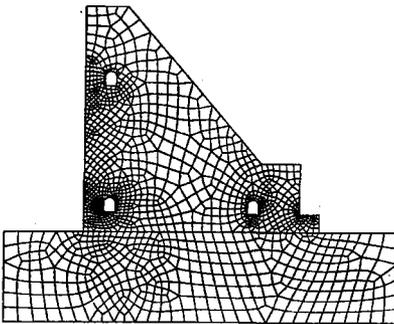
b) Maillage initial
146 éléments - 174 nœuds $\epsilon = 79.5\%$



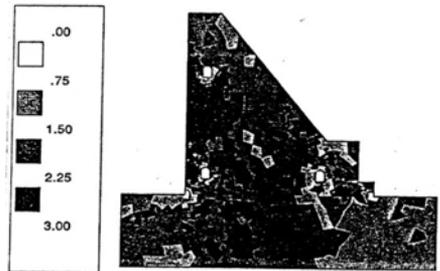
c) Etape 1
375 éléments - 418 nœuds $\epsilon = 52.7\%$



d) Etape 2
305 éléments - 350 nœuds $\epsilon = 14.5\%$



e) Maillage optimisé
1542 éléments - 1662 nœuds $\epsilon = 4.2\%$



f) Carte d'optimalité

Figure 16. Barrage bi-matériaux - erreur souhaitée $\epsilon_0 = 5\%$

6. Conclusion

Une procédure d'adaptativité pour les calculs élastiques 2D utilisant des quadrilatères à 4 ou 8 nœuds a été proposée. Les exemples présentés prouvent son efficacité aussi bien sur des problèmes réguliers que sur des problèmes présentant des concentrations de contraintes ou même des singularités.

A partir de cette procédure, la technique d'automatisation des calculs éléments finis en élasticité 2D, mise au point avec ces éléments triangulaires, a été étendue aux éléments quadrilatéraux. Pour une précision désirée de l'ordre de 2 à 5%, elle nécessite très peu d'itérations. Avec une telle procédure, il est possible d'envisager de faire effectuer les analyses éléments finis même par des utilisateurs non spécialistes. En effet, le choix du maillage initial, les différentes étapes et la construction des maillages intermédiaires nécessaires pour atteindre la qualité désirée sont effectuées sans aucune intervention de l'utilisateur. En particulier, l'utilisateur n'a pas à savoir reconnaître a priori les zones qui nécessitent d'être plus finement maillées.

Dans le principe, toutes ces méthodes peuvent être étendues à des éléments tridimensionnels [GAS 92]. Mais, l'adaptation et plus encore l'automatisation de calculs élastiques 3D est actuellement hors de portée; en effet si des mailleurs automatiques 3D commencent à être réalisées [GEO 91], ces mailleurs ne sont pas encore capables de respecter correctement une carte de tailles.

7. Bibliographie

- [BAB 78] BABUSKA I., RHEINBOLDT W.C., "Error estimates for adaptive finite element computation", *SIAM J. Num. Anal.*, Vol 15, n° 4, pp 736-754, 1978.
- [BEC 91] BECKERS P., ZHONG H.G., "Influence of element distortions on the reliability of some a-posteriori error estimators", *Proc. of European Conference on New Advances in computational Structural Mechanics*, Giens, France, 1991.
- [COO 92a] COOREVITS P., LADEVEZE P., PELLE J.P., ROUGEOT P., *Some new applications of a method for the control and optimization of finite element computations*, New Advances in Computational Structural Mechanics, Elsevier, Edited by P. Ladeveze and O.C. Zienkiewicz, pp. 205-217, 1992.
- [COO 92b] COOREVITS P., PELLE J.P., "A post-processor for adaptive mesh of problems with steep gradient areas", Post-conference book, Edited by J.M. Proth & F. Vernadat, *Proc. of 8th Int. Conference CAD/CAM, Robotics and Factories of the Future*, Metz, 1992.
- [COO 92c] COOREVITS P., LADEVEZE P., PELLE J.P., "Anisotropic adaptive mesh : application to transient problems", *Proceeding of the first European Conference on Numerical methods in Engineering* (Brussels), pp. 209-215, 1992.
- [COO 93a] COOREVITS P., LADEVEZE P., PELLE J.P., "Mesh optimization for problems with steep gradients", à paraître dans *Engng. Computations*, 1993.

- [COO 93b] COOREVITS P., LADEVEZE P., PELLE J.P., "An automatic procedure for finite element analysis in 2D elasticity with a control of accuracy", à paraître dans *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 1993.
- [GAG 83] GAGO J.P., KELLY D.W., ZIENKIEWICZ O.C., BABUSKA I., "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : part II - Adaptive mesh refinement", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol 19, pp 1621-1656, 1983.
- [GAS 92] GASTINE J.L., LADEVEZE P., MARIN P., PELLE J.P., "Accuracy and Optimal Meshes in Finite Element Computation for nearly incompressible Materials", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, pp. 303-315, 1992.
- [GEO 91] GEORGE P.L., *Génération automatique de maillages : Applications aux méthodes d'éléments finis*, Collection Recherches en Mathématiques appliquées, Masson Ed, Paris, 1991.
- [KEL 83] KELLY D.W., GAGO J.P., ZIENKIEWICZ O.C., BABUSKA I., "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : part I - Error analysis", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol 19, pp 1593-1619, 1983.
- [LAD 75] LADEVEZE P., Comparaison de modèles de milieux continus, Thèse d'Etat, Université P. et M. Curie, Paris, 1975.
- [LAD 83] LADEVEZE P., LEGUILLON D., "Error estimate procedure in the finite element method and applications", *SIAM J. Num. Anal.*, Vol 20, n°3, pp 485-509, 1983.
- [LAD 86] LADEVEZE P., COFFIGNAL G., PELLE J.P., *Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis*, Accuracy estimates and adaptivity for finite elements, chap 10, pp 181-203, Babuska, Zienkiewicz, Gago, Oliveira (Editors), J. Wiley 1986.
- [LAD 91] LADEVEZE P., PELLE J.P., ROUGEOT P., "Error estimation and mesh optimization for classical Finite Elements", *Engng. Computation*, Vol. 8, pp. 69-80, 1991.
- [LAD 92] LADEVEZE P., "La maîtrise des modèles en mécanique des structures", *Revue Européenne des éléments finis*, Vol. 1, pp. 9-30, 1992.
- [ODE 89] ODEN J.T., DEMKOWICZ L., RACHOWICZ W. WESTERMANN T.A., "Toward a universal h-p adaptive finite element strategy : part 2 - A posteriori error estimation", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 77, pp. 113-180, 1989.
- [RAN 93] RANK E., SCHWEINGRUBER M., SOMMER M., "Adaptive mesh generation and transformation of triangular to quadrilateral meshes", *Comm. in Num. Meth. in Engng.*, Vol. 9, pp. 121-129, 1993.
- [ROU 89] ROUGEOT Ph., "Sur le contrôle de la qualité des maillages éléments finis", Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [STR 92a] STROUBOULIS T., HAQUE K., "Recent experiences with error estimator and adaptivity, Part I: Review of error estimators for scalar elliptic problems", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 97, pp. 399-436, 1992.
- [STR 92b] STROUBOULIS T., HAQUE K., "Recent experiences with error estimator and adaptivity, Part II: Error estimation for h-adaptive approximations on grid of triangles and quadrilaterals", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 100, pp. 359-430, 1992.

[SZA 86] SZABO B.A., "Mesh design for the p-version of the finite element method", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. 55, pp. 181-197, 1986.

[ZIE 87] ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol 24, pp 337-357, 1987.

[ZIE 89] ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., GONG N.G., "Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method", *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol. 28, 879-891, 1989.

[ZIE 92] ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates: part I - The recovery technique, *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol 33, pp 1331-1364, 1992.

Annexe : Construction du champ de contrainte admissible

Comme nous l'avons mentionné au paragraphe 2, la construction du champ admissible $\hat{\sigma}_h$ se fait en deux étapes.

Première étape : construction de densités de forces \hat{F} sur les faces des éléments.

On note E_k tout élément triangulaire ou quadrilatéral du maillage. En utilisant [12], la densité d'effort sur l'élément E_k est noté $\eta_k \hat{F}$. Un champ $\hat{\sigma}_h$ est statiquement admissible si :

$$\forall U^* \text{ tel que } U^* = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega$$

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}_h^T \epsilon(U^*) d\Omega = \int_{\Omega} f_d^T U^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} F_d^T U^* dS \tag{33}$$

A partir de [33] et de la condition de prolongement [10] on montre que :

$$\int_{\partial E_k} \eta_k \hat{F} \varphi_i d\Gamma = Q_k(i) \tag{34}$$

où :

$$Q_k(i) = \int_{E_k} \sigma_h \text{grad } \varphi_i dE - \int_{E_k} f_d \varphi_i dE \tag{35}$$

pour toutes les fonctions de base φ_i et chaque élément E_k . La quantité $Q_k(i)$ est explicitement définie en fonction des données et de la solution éléments finis σ_h . De la relation [35] écrite pour tous les éléments E_k connectés à un nœud donné i , on obtient un petit système linéaire d'équations entre les projections :

$$\int_{\Gamma} \eta_k \hat{F} \varphi_i d\Gamma \tag{36}$$

pour tous les côtés Γ connectés au nœud i . Par exemple, considérons un sommet interne i (figure 17). On pose :

$$b_j = \int_{\Gamma_j} \eta_j \hat{F} \varphi_i d\Gamma \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n \tag{37}$$

De [34], on obtient :

$$\begin{cases} b_1 - b_2 = Q_1(i) \\ b_2 - b_3 = Q_2(i) \\ \dots\dots\dots \\ b_n - b_1 = Q_n(i) \end{cases} \tag{38}$$

Comme σ_h est en équilibre au sens des éléments finis, nous avons :

$$\int_{\Omega} \sigma_h^T \varepsilon(\varphi_i) d\Omega = \int_{\Omega} f_d^T \varphi_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} F_d^T \varphi_i dS \tag{39}$$

Ce qui implique pour un nœud interne i :

$$\sum_{k=1}^n Q_k(i) = 0 \tag{40}$$

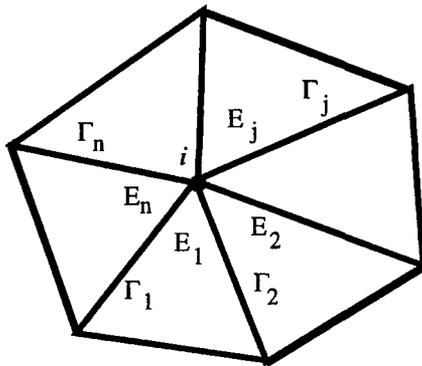


Figure 17. Eléments connectés au nœud i

[40] admet au moins une solution qui n'est pas unique. En pratique, les b_j sont choisis afin de minimiser :

$$\sum_{j=1}^n \frac{(b_j - b_j^m)^2}{L_j^2} \tag{41}$$

où : $L_j = \text{mes}(\Gamma_j)$ et $b_j^m = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_j} (\sigma_{h_j} n_j - \sigma_{h_{j-1}} n_{j-1}) \varphi_j d\Gamma$.

Les autres cas, correspondant aux différentes localisations du nœud i sont résolus de manière similaire ([LAD 83], [LAD 86]). Ainsi, pour chaque arête Γ du maillage, cette méthode donne les projections [37] pour chaque fonction de base associée au nœud i de Γ .

Pour les éléments linéaires, on dispose de 2 projections sur chaque côté :

$$\beta_r(1) = \int_{\Gamma} \eta \hat{F} \lambda_1 d\Gamma \text{ et } \beta_r(2) = \int_{\Gamma} \eta \hat{F} \lambda_2 d\Gamma \tag{42}$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux coordonnées barycentriques sur Γ . On peut alors exprimer \hat{F} sous la forme :

$$\eta \hat{F} = \frac{2}{L} [(2\beta_r(1) - \beta_r(2))\lambda_1 + (2\beta_r(2) - \beta_r(1))\lambda_2] \tag{43}$$

où : $L = \text{mes}(\Gamma)$.

Pour les éléments quadratiques, on dispose dans ce cas de 3 projections :

$$\begin{cases} \beta_r(1) = \int_{\Gamma} \eta \hat{F} \varphi_1 d\Gamma \\ \beta_r(2) = \int_{\Gamma} \eta \hat{F} \varphi_2 d\Gamma \\ \beta_r(3) = \int_{\Gamma} \eta \hat{F} \varphi_3 d\Gamma \end{cases} \text{ où } \begin{cases} \varphi_1 = (2\lambda_1 - 1)\lambda_1 \\ \varphi_2 = (2\lambda_2 - 1)\lambda_2 \\ \varphi_3 = 4\lambda_1\lambda_2 \end{cases} \tag{44}$$

On peut alors exprimer facilement la densité \hat{F} sur les φ_i sous la forme :

$$\eta \hat{F} = \frac{3}{4L} [(12\beta_r(1) + 4\beta_r(2) - 2\beta_r(3))\varphi_1 + (4\beta_r(1) + 12\beta_r(2) - 2\beta_r(3))\varphi_2 + (3\beta_r(3) - 2\beta_r(1) - 2\beta_r(2))\varphi_3] \tag{45}$$

En utilisant [39], il est facile de montrer que les densités de force \hat{F} satisfont à l'équilibre global de chaque élément.

Deuxième étape: construction de $\hat{\sigma}_h$ élément par élément

Le problème consiste à construire un champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ sur chaque élément tel que :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \hat{\sigma}_h + f_d = 0 \text{ dans } E_k \\ \hat{\sigma}_h n_k = \eta_k \hat{F} \quad \text{sur } \partial E_k \end{array} \right\} \quad [46]$$

La seconde équation [46] et la définition de η_k assure la continuité des vecteurs contrainte à travers les côtés des éléments adjacents. Une solution simple de [44] est obtenue de la façon suivante :

- chaque élément est découpé en quatre sous-triangles pour les quadrilatères et en trois sous-triangles pour les triangles (figure 18)
- sur chaque sous-triangle, nous faisons l'hypothèse que le champ de contrainte est linéaire pour les éléments linéaires et quadratique pour les éléments quadratiques.

Ainsi, la construction est explicite et elle ne nécessite pas un coût numérique important.

Ces techniques de construction sont détaillées dans [ROU 89].

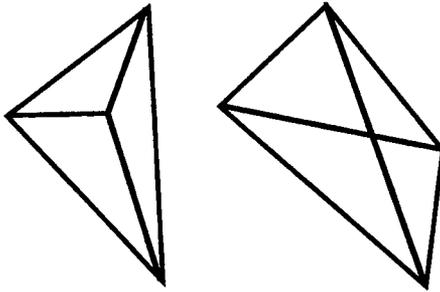


Figure 18. *Découpage utilisé pour les triangles et les quadrilatères*