

---

# Simulation numérique du soufflage et du thermoformage des plastiques

Mohamed Rachik — Jean-Marie Roelandt — Jean-Louis Batoz

*Laboratoire de génie mécanique pour les matériaux et les structures  
URA CNRS 1505, UTC / Division MNM  
BP 649  
60200 Compiègne*

---

*RÉSUMÉ. L'approche dynamique explicite couramment utilisée aujourd'hui pour traiter les problèmes d'emboutissage a été étendue à la modélisation de deux procédés de transformation des plastiques : le soufflage et le thermoformage. Le choix d'une loi constitutive capable de représenter le comportement du polymère à la température de mise en forme a été abordé. Deux modèles, hyperélastique et viscoélastique, ont été utilisés et comparés en termes de répartition d'épaisseur et de contraintes. L'approche proposée a été testée sur deux exemples de soufflage et de thermoformage et les résultats obtenus ont été comparés aux mesures.*

*ABSTRACT. The explicit dynamic algorithm commonly used to solve sheet metal forming problems, has been applied to solve two plastic transformation processes : blow molding and thermoforming. Constitutive laws which properly represent polymer at processing temperature have been considered. We have compared the thickness and stress distributions for hyperelastic and viscoelastic models. Two examples on blow molding and thermoforming have been studied and the numerical results have been compared with experimental data.*

*MOTS-CLÉS : thermoformage, soufflage des plastiques, grandes transformations, hyperélasticité, viscoélasticité, mise en forme, élément fini de coque, contact, schéma dynamique explicite.*

*KEY WORDS : thermoforming, blow molding, large deformations, hyperelasticity, viscoelasticity, forming process, shell finite element, contact, explicit dynamic scheme.*

---

## 1. Introduction

L'utilisation massive des polymères dans les domaines les plus variés (alimentaire, cosmétique, aéronautique, automobile...) a conduit au développement de nouveaux matériaux et de nouvelles techniques de mise en forme. Ceci a justifié différents travaux de recherche de type numérique et informatique qui ont pour objectifs la limitation d'essais de mise au point et l'optimisation de produits (forme, aspect, tenue...). Comparés à des procédés comme l'emboutissage des tôles, les procédés de mise en forme des plastiques ont fait l'objet d'un nombre limité de travaux de simulation numérique.

Dans le cas du soufflage, peu de logiciels de simulation sont disponibles bien que plusieurs équipes de recherche travaillent sur le sujet. Dans le but de contribuer à cet effort, nous avons entrepris des travaux de recherche pour la modélisation par éléments finis des phases de soufflage et de thermoformage.

### 1.1. Description des procédés

#### 1.1.1. Le soufflage

Le procédé de soufflage est utilisé pour fabriquer des corps creux. On produit une préforme de matière plastique appelée paraison. Cette préforme est ensuite déformée à chaud par un jet d'air et plaquée contre les parois d'un moule [CHR 86]. La paraison peut être fabriquée par extrusion (procédé d'extrusion soufflage) ou par injection (injection soufflage).

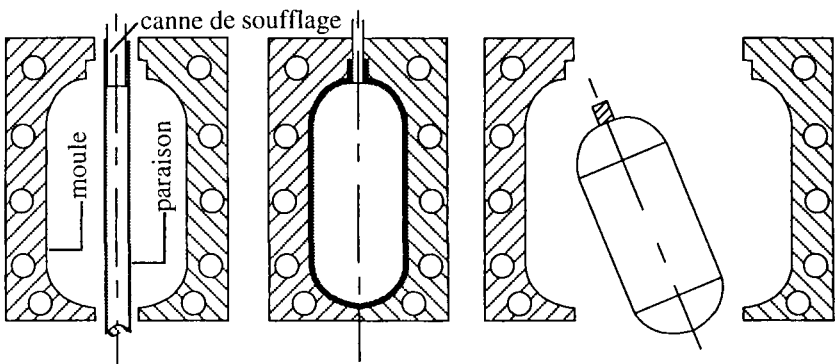


Figure 1. Etapes du procédé de soufflage.

Les étapes du procédé sont les suivantes (figure 1) :

- i/ Extrusion ou conditionnement de la paraison.
- ii/ Fermeture du moule permettant de fixer la paraison.

- iii/ Soufflage de la paraison de façon à appliquer celle-ci contre les parois du moule.
- iv/ Refroidissement puis éjection de la pièce.

### 1.1.2. Le thermoformage

Le thermoformage est utilisé pour la transformation de feuilles. Une plaque rigide est fixée sur ses bords à l'aide d'un cadre au dessus d'un moule. Cette plaque est ensuite chauffée jusqu'à ramollissement et l'air compris entre elle et le moule est évacué de façon à la plaquer contre les parois du moule.

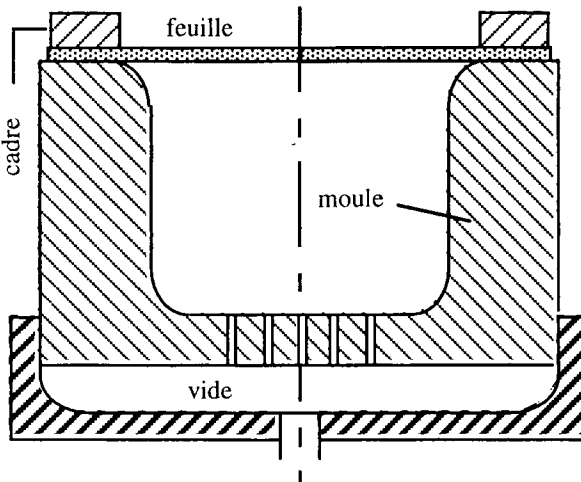


Figure 2. Thermoformage

### 1.2. Objectifs d'une modélisation

Les objectifs de la modélisation d'un procédé tel que le soufflage ou le thermoformage peuvent se situer à plusieurs niveaux :

- Prévoir la répartition de l'épaisseur pour une rhéologie et une géométrie données.
- Contrôler des phénomènes qui ont lieu lors de la mise en forme tels que l'orientation ou la cristallisation afin de les exploiter pour augmenter les performances du produit ou les éliminer le cas échéant.
- Evaluer les contraintes résiduelles afin d'en tenir compte lors de l'étude du comportement du produit en service (tenue et aspect).

- Optimiser les paramètres géométriques et mécaniques du processus et du produit tels que la répartition d'épaisseur de la paraison, la température et la pression de soufflage, le matériau et la géométrie du moule afin de minimiser la quantité de matière utilisée. Il faut noter que le coût de celle-ci varie entre 50 et 70% du coût total du produit [ROS 89].

## 2. Lois de comportement

Le comportement d'un polymère à la température de fusion peut être représenté par différents types de relations constitutives. En toute rigueur, les polymères fondus ont un comportement viscoélastique mais la majorité des auteurs qui traitent de la modélisation du soufflage utilisent une loi de comportement hyperélastique [DEL 91], [DEL 87], [WIL 70]. Cette hypothèse peut être justifiée par la rapidité du procédé. En effet, les grandes vitesses de déformations induites lors du soufflage sont appliquées pendant des temps courts par rapport au temps de relaxation du matériau; la composante élastique est alors prépondérante.

### 2.1. Modèle hyperélastique

Un milieu hyperélastique est caractérisé par l'existence d'un potentiel de déformations  $W$  fonction des invariants du tenseur de déformations [BAT 80], [MAL 69] qui prend la forme suivante :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \tag{2}$$

$\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont les élongations principales.

Dans le cas d'un milieu incompressible,  $I_3 = 1$ . Pour prendre en compte cette contrainte supplémentaire lors de la résolution numérique, la méthode la plus répandue est la méthode du multiplicateur de Lagrange [SUS 87]. Le potentiel de déformation prend la forme suivante :

$$W = \widehat{W}(I_1, I_2) - \frac{p}{2}(I_3 - 1) \tag{3}$$

$p$  est un multiplicateur de Lagrange s'identifiant à une contrainte hydrostatique.

Les lois de comportement en variables de Lagrange et en variables d'Euler prennent les formes suivantes :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1} \quad [4]$$

- S** : tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce.  
**C** : tenseur de déformations de Cauchy-Green droit.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \mathbf{B} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \mathbf{B}} - p \mathbf{I} \quad [5]$$

- $\boldsymbol{\sigma}$  : tenseur de contraintes de Cauchy.  
**B** : tenseur de déformations de Cauchy-Green gauche.

Pour la modélisation de la phase de soufflage, on utilise la théorie des structures minces. Les formes [4] et [5] de la loi de comportement sont bien adaptées pour les éléments finis de membrane. Elles peuvent être directement utilisées dans des formulations lagrangiennes totales pour [4] et des formulations lagrangiennes actualisées pour [5].

Pour prendre en compte correctement les déformations de flexion [SUS 87], il faut utiliser une formulation incrémentale qui nécessite une loi de comportement écrite sous forme différentielle. Dans ce qui suit, nous donnons les grandes lignes qui conduisent au développement d'une forme incrémentale en variables d'Euler de la loi de comportement [5]. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter les références [BOL 89], [DUF 83], [HUG 83], [SCH 91].

Il existe plusieurs manières d'écrire la loi de comportement [5] sous forme différentielle. La plus intuitive consiste à dériver la relation [4] par rapport au temps et la transporter sur la configuration courante. La loi de comportement hyperélastique différentielle prend les formes suivantes :

- en variables de Lagrange

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{H}^0 \dot{\mathbf{C}} - \dot{p} \mathbf{C}^{-1} \quad [6]$$

$\mathbf{H}^0$  est un tenseur constitutif lagrangien d'ordre 4 dépendant de l'état de déformations.

- en variables d'Euler

$$\dot{\sigma}^C = \mathbf{H}\mathbf{D} + 2p\mathbf{D} - \dot{p}\mathbf{I} \tag{7}$$

$\dot{\sigma}^C$  est la dérivée objective contravariante dite d'Oldroyd et qui pour  $\det(\mathbf{F})=1$  se confond avec la dérivée objective de Truesdell.

$\mathbf{D}$  est le tenseur taux de déformations.

$\mathbf{H}$  est le tenseur constitutif d'ordre 4 exprimé sur la configuration courante.  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}^0$  sont liés par la relation suivante :

$$\mathbf{H}_{ijkl} = \mathbf{F}_{ip} \mathbf{F}_{jq} \mathbf{F}_{kr} \mathbf{F}_{ls} \mathbf{H}^0_{pqrs} \tag{8}$$

$\mathbf{F}$  est le tenseur gradient de la transformation entre la configuration de référence et la configuration courante.

Potentiels de déformation.

Plusieurs potentiels de déformation ont été proposés pour la modélisation des élastomères [BOU 92]. Dans le cas des polymères, le modèle le plus utilisé est celui d'Ogden. Ce modèle général inclut en particulier les modèles de Mooney-Rivlin et néo-hookéen. Le potentiel de déformation d'Ogden est donné par :

$$W = \sum_{n=1}^m \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \tag{9}$$

$\mu_n$  et  $\alpha_n$  sont des constantes du matériau.

Pour  $m = 2$ ,  $\mu_1 = 2C_1$ ,  $\mu_2 = -2C_2$ ,  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = -2$  on obtient le modèle de Mooney-Rivlin :

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \tag{10}$$

Le modèle néo-hookéen est obtenu pour  $C_2 = 0$ .

Pour cette expression de  $W$ , les contraintes principales sont données par :

$$\sigma_i = -p + \sum_{n=1}^m \mu_n \lambda_i^{\alpha_n} \tag{11}$$

Dans le cas de la traction simple, la contrainte uniaxiale est donnée en fonction de l'élongation par :

$$\sigma = \sum_{n=1}^m \mu_n (\lambda^{\alpha_n} - \lambda^{-\alpha_n/2}) \quad [12]$$

$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^m \mu_n \alpha_n$  représente le module de rigidité de traction.

Dans le cas des polymères, on utilise en général un modèle d'Ogden à un terme que l'on écrira :

$$W = \frac{\mu}{\alpha} (\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha - 3) \quad [13]$$

## 2.2. Modèle viscoélastique

L'approximation hyperélastique s'avère suffisante pour estimer le champ de déformation après soufflage et accéder à la répartition d'épaisseur sur le produit fini mais elle ne permet pas d'évaluer correctement les contraintes à la fin du soufflage dont la connaissance est indispensable pour estimer les contraintes résiduelles.

L'abondance de la littérature sur la viscoélasticité rend difficile une étude bibliographique exhaustive du sujet. Néanmoins, on peut citer quelques références qui en constituent une bonne revue [BOY 88], [COH 91], [CRO 91], [LAR 83], [MAR 87], [PET 79]. Il existe trois familles de lois de comportement viscoélastique : les lois hiérarchiques, de type intégral et différentiel. Ces dernières sont les plus utilisées en simulation numérique. Dans le cadre de ce travail, nous avons utilisé un modèle de White-Metzner [TAN 91].

Le matériau étant incompressible, le tenseur de contraintes de Cauchy s'écrit sous la forme :

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau \quad [14]$$

$\sigma$  : tenseur de contraintes de Cauchy.

$p$  : pression.

$\tau$  : extra-contrainte.

La forme générale d'une loi de comportement différentielle est donnée par :

$$\lambda \dot{\tau}^{\text{obj}} + \mathcal{R} = 0 \quad [15]$$

$\dot{\tau}^{\text{obj}}$  : dérivée objective de l'extra contrainte.

R : une fonction de  $\tau$  et de  $\mathbf{D}$ . L'expression de R diffère selon les modèles.

$\lambda$  : temps de relaxation.

Le modèle de White-Metzner est un modèle de Maxwell dans lequel le temps de relaxation et la viscosité varient avec la vitesse de déformations :

$$\lambda(\Pi_D)\tau^C + \tau = 2 \eta(\Pi_D)\mathbf{D} \quad [16]$$

Plusieurs fonctions ont été proposées pour représenter la variation du temps de relaxation et de la viscosité en fonction de la vitesse de déformations. Elles prennent la forme générale suivante :

$$\eta(\Pi_D) = \frac{\eta_0}{(1+k_1\Pi_D)^n} \quad [17]$$

$$\lambda(\Pi_D) = \frac{\lambda_0}{1+k_2\Pi_D} \quad [18]$$

$$\eta_E = \frac{2\eta(\Pi_D)}{1 - \frac{2\lambda(\Pi_D)\Pi_D}{\sqrt{3}}} + \frac{2\eta(\Pi_D)}{1 + \frac{\lambda(\Pi_D)\Pi_D}{\sqrt{3}}} \quad [19]$$

$\Pi_D$  : deuxième invariant du tenseur taux de déformations  $\mathbf{D}$ .

$\eta_0$  : valeur limite de la viscosité pour de faibles vitesses de cisaillement.

$\lambda_0$  : valeur limite du temps de relaxation pour de faibles vitesses de cisaillement.

$\eta_E$  : viscosité élongationnelle.

$k_1, k_2$  et  $n$  sont des paramètres ajustables.

Barnes et Roberts [BAR 92] donnent une excellente étude expérimentale de ces fonctions et les paramètres ajustables pour différents matériaux et à différentes températures.

### 2.3. Influence de la température

Les propriétés mécaniques des polymères varient avec la température. Cette variation présente des discontinuités au voisinage des températures de transition vitreuse  $T_g$  pour les polymères amorphes et de fusion  $T_m$  pour les semi-cristallins.



Plusieurs modèles ont été proposés pour la corrélation entre la viscosité et la température. Le modèle le plus utilisé est celui de Williams-Landel-Ferry (WLF). Ce modèle est applicable aux polymères amorphes dans un intervalle de température compris entre  $T_g$  et  $T_g+100$  °C.

$$\log \left( \frac{\eta}{\eta_g} \right) = - \frac{C_1^g (T - T_g)}{C_2^g + (T - T_g)} \quad [20]$$

$$C_1^g = 17,44/^\circ\text{C} \quad , \quad C_2^g = 51,6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La relation [20] peut être utilisée en première approximation. Pour une meilleure corrélation, les constantes  $C_1^g$  et  $C_2^g$  sont déterminées pour chaque polymère [TAN91], [FER80].

Pour la température de référence, on peut prendre une température  $T_0$  différente de  $T_g$  :

$$\log \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right) = - \frac{C_1^0 (T - T_0)}{C_2^0 + (T - T_0)} \quad [21]$$

Pour des variations de température plus importantes, on peut utiliser la loi d'Andrade suivante :

$$\log \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{0,434E}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad [22]$$

T et  $T_0$  sont exprimées en Kelvin.

R : constante des gaz parfaits.

E : énergie d'activation.

Pour le modèle élastique, la variation des constantes du matériau avec la température n'est pas aussi bien établie (figure 3). Delorenzi et Nied [DEL 91] proposent une corrélation exponentielle du module de rigidité avec la température :

$$\frac{3}{2} \mu\alpha = C e^{-kT} \quad [23]$$

C et k sont des constantes.

T est la température.

Température (°C)	$\mu$ en MPa	$\alpha$	$\frac{3}{2}\mu\alpha$ en MPa
149	0,985	0,5	0,7387
168	2,264	0,1	0,3396
193	3,453	0,017	0,088

Figure 3. Constantes d'un polymère à différentes températures [DEL 91].

### 3. Modèle éléments finis

Pour schématiser la phase de soufflage (thermoformage), on considère un milieu déformable (paraison) dans la configuration courante  $C^t$  à l'instant  $t$ . Il occupe un volume  $V_t$  de contour  $S_t$ . Sur une partie  $S_{tu}$  de la frontière, on impose des déplacements  $\bar{u}$  tandis que sur la partie restante  $S_{tF}$ , on impose des efforts externes (pression de soufflage).

#### 3.1. Principe des travaux virtuels (PTV).

La formulation lagrangienne actualisée que nous avons utilisée est basée sur le principe des travaux virtuels suivant :

$$\int_{V_t} D^* : \sigma \, dv + \int_{V_t} \rho \langle u^* \rangle \{ \ddot{u} \} \, dv - \int_{S_{tF}} \langle u^* \rangle \{ F_t \} \, ds = 0 \quad [24]$$

- $\sigma$  : tenseur de contraintes de Cauchy
- $u^*$  : déplacement virtuel cinématiquement admissible
- $D^*$  : taux de déformations virtuelles
- $\rho$  : masse volumique
- $V_t, S_{tF}$  : volume de la structure et partie du contour où les efforts surfaciques sont imposés

Après discrétisation de [24] par éléments finis, on obtient l'équation d'équilibre sous forme algébrique :

$$\{ R ( \{ u \} ) \} = \{ F_{int} ( \{ u \} ) \} + \{ F_{inert} ( \{ u \} ) \} - \{ F_{ext} ( \{ u \} ) \} = 0 \quad [25]$$

$\{ R \}$  : résidu d'équilibre  
 $\{ F_{int} \}$ ,  $\{ F_{inert} \}$  et  $\{ F_{ext} \}$  proviennent de la discrétisation des trois termes de [24] et sont respectivement associés aux efforts internes, aux efforts d'inertie et aux efforts externes.

### 3.2. Schéma de résolution

Après la discrétisation spatiale par éléments finis du PTV, on obtient l'équation d'équilibre sous forme algébrique qui est fortement non linéaire. Pour résoudre cette équation, plusieurs algorithmes ont été proposés. Dans le cas des problèmes de mise en forme, l'approche classique consiste à considérer le processus quasi-statique et à résoudre l'équation d'équilibre, en négligeant les efforts d'inertie, par une méthode itérative de type Newton-Raphson. Cette approche se trouve souvent confrontée à des difficultés de convergence dues aux non linéarités importantes. Ceci a motivé le développement d'autres approches telles que les schémas de type dynamique explicite que nous avons utilisés dans le cadre de ce travail.

L'approche dynamique explicite consiste à discrétiser l'équation d'équilibre [25] dans le temps à l'aide d'un schéma de différences finies centré. Dans le cas du soufflage, pour pouvoir reproduire la solution statique du problème à l'aide de l'équation [25], il est nécessaire d'y introduire un terme d'amortissement. Après discrétisation dans l'espace, on obtient le système du deuxième ordre suivant :

$$\begin{aligned} & [M] \{ \ddot{u} \} + [C] \{ \dot{u} \} + \{ F_{int} \} - \{ F_{ext} \} = 0 \\ u(t=0) &= 0 \quad \dot{u}(t=0) = 0 \quad (\text{conditions initiales}) \end{aligned} \quad [26]$$

Les quantités  $\{ \dot{u} \}_n$  et  $\{ \ddot{u} \}_n$  sont discrétisées par le schéma de différences finies centré suivant :

$$\dot{u}_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t}, \quad \ddot{u}_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2} \quad [27]$$

En remplaçant [27] dans [26], on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\left( \frac{[M]}{\Delta t^2} + \frac{[C]}{2\Delta t} \right) \{ u_{n+1} \} = \{ F_{ext} \} - \{ F_{int} \} + \frac{2[M]}{\Delta t^2} \{ u_n \} - \left( \frac{[M]}{\Delta t^2} - \frac{[C]}{2\Delta t} \right) \{ u_{n-1} \} \quad [28]$$

Les vecteurs  $\{ F_{int} \}$  et  $\{ F_{ext} \}$  sont exprimés sur la configuration à l'instant  $t_n$ .

On établit ainsi une relation de récurrence qui permet d'obtenir la solution au pas de temps  $n + 1$  en fonction des solutions connues aux pas précédents.

Les schémas explicites étant conditionnellement stables, le pas de temps doit être inférieur à un pas de temps critique  $\Delta t_c = \frac{L}{c}$  où  $L$  est la taille de l'élément et  $c$  la vitesse de l'onde élastique dans le solide.

### 3.3. Éléments finis

Des tests numériques ont révélé que pour le procédé de soufflage et les matériaux considérés, les effets des déformations de flexion sont négligeables. Nous avons donc développé un élément de membrane à trois nœuds et trois ddl par nœud (CST) pour les problèmes tridimensionnels et un élément de membrane tronconique à deux nœuds et deux ddl par nœud pour les problèmes axisymétriques. Nous exposons dans la suite le calcul des vecteurs et matrices élémentaires associés à l'élément CST.

#### Élément CST

L'élément CST est utilisé avec une loi de comportement hyperélastique sous forme totale en variables d'Euler. Les différentes quantités sont exprimées sur la dernière configuration connue  $C^n$  (au pas de temps  $t_n$ ).

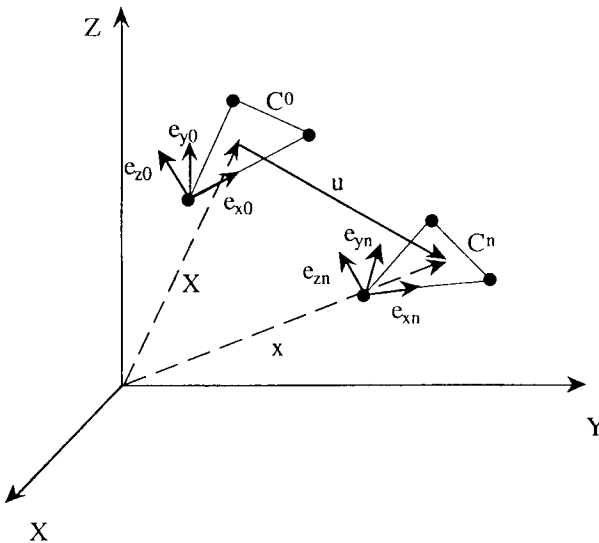


Figure 4. Configurations de l'élément au cours de sa transformation

Calcul des déformations.

On considère le cas d'une membrane mince, le champ de déplacements est celui de la surface moyenne. L'hypothèse des déformations de membrane implique que la normale au plan de l'élément reste normale après déformation. Dans ce cas, le tenseur gradient de la transformation est donné par :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1+u_{,X} & u_{,Y} & \lambda_z k_x \\ v_{,X} & 1+v_{,Y} & \lambda_z k_y \\ w_{,X} & w_{,Y} & \lambda_z k_z \end{bmatrix} \quad [29]$$

$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$  transformé de  $\vec{e}_{z0}$  vecteur normal à l'élément dans sa configuration initiale. On

en déduit la forme du tenseur de Cauchy-Green gauche défini par :

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_z^2} \end{bmatrix} \quad [30]$$

Les élongations  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  dans le plan de l'élément ainsi que la base modale du tenseur  $\mathbf{B}$  sont données par les valeurs propres et les vecteurs propres de  $[\mathbf{B}]^{-1}$ .

$$d = \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2} \quad [31]$$

$$\frac{1}{\lambda_x^2} = \frac{A+C}{2} + \frac{d}{2}, \quad \frac{1}{\lambda_y^2} = \frac{A+C}{2} - \frac{d}{2} \quad [32]$$

$$\cos 2\theta = \frac{A-C}{d}, \quad \sin 2\theta = -\frac{2B}{d} \quad [33]$$

L'élongation transversale  $\lambda_z$  est calculée *a posteriori* à partir de l'hypothèse d'incompressibilité.

$$\lambda_z = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y} \quad [34]$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{M}_b] \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} [\mathbf{M}_b]^T \quad [35]$$

$[\mathbf{M}_b]$  est la base modale de  $\mathbf{B}$ .

$$[\mathbf{M}_b] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [36]$$

Calcul des contraintes.

Dans le cas d'un comportement hyperélastique, on utilise un potentiel de déformations d'Ogden [9].

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  a la même base modale que  $\mathbf{B}$  et les contraintes principales sont données par :

$$\sigma_i = -p + \sum_{n=1}^m \mu_n \lambda_i^{\alpha_n} \quad (i = x, y \text{ ou } z) \quad [37]$$

Dans le cas d'une membrane mince, on fait l'hypothèse de contraintes planes, ce qui permet de déterminer  $p$  :

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow p = \sum_{n=1}^m \mu_n \lambda_z^{\alpha_n} \quad [38]$$

On élimine ensuite  $p$  dans l'expression [37] des contraintes.

Le tenseur des contraintes exprimé dans le repère lié à l'élément dans sa configuration  $C^n$  est donné par :

$$\sigma = [\mathbf{M}_b] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}_b]^T \quad [39]$$

D'où :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ s^2 & c^2 \\ -cs & cs \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \quad [40]$$

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta$$

$\theta$  étant l'angle entre  $\vec{e}_{xn}$  et  $\vec{n}_1$  premier vecteur propre de  $\sigma$

Dans le cas du comportement viscoélastique [14], les composantes de l'extra-contrainte  $\tau$  sont actualisées à chaque pas.

$$\{\tau\}_{n+1} = \{\tau\}_n + \{\Delta\tau\} \quad [41]$$

$\{\Delta\tau\}$  est évalué par intégration de la loi de comportement viscoélastique [16] dans le repère de fin de pas. La pression arbitraire  $p$  est déterminée à partir de l'hypothèse de contraintes planes.

Le vecteur des forces internes élémentaires est donné par :

$$\{F_{int}^c\} = \int_{V_R} [B]^T \{\sigma\} dv \quad [42]$$

[B] : opérateur classique de dérivation reliant les taux de déformations aux vitesses nodales.

#### Calcul des efforts externes.

Les forces externes résultent de la pression du soufflage. Elles varient donc avec le déplacement.

$$\{F_{ext}\} = \int_{S_n} [N]^T p_h \{e_{zn}\} ds \quad [43]$$

[N] : matrice des fonctions de forme

$p_h$  : pression de soufflage.

$\{e_{zn}\}$  : vecteur normal à l'élément dans sa configuration déformée.

Calcul de la matrice masse.

L'approche dynamique explicite permet une réduction considérable du temps calcul lorsqu'on utilise une matrice masse diagonale. Ceci permet d'éviter la triangularisation d'une matrice globale, très coûteuse, qui est nécessaire pour les schémas quasi-statiques.

La matrice masse diagonale élémentaire (constante) est donnée par :

$$[M_e] = \frac{m_e}{3} \text{diag} \{ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \}$$

$m_e$  : masse de l'élément

**3.4. *Prise en compte du contact***

Dans le cas d'un procédé de mise en forme tel que le soufflage ou le thermoformage, le moule est considéré rigide et le contact est traité comme un contact entre une structure déformable (paraison) et une paroi rigide. Pour les conditions de contact à l'interface, la majorité des auteurs qui ont travaillé sur le sujet admettent l'hypothèse d'un contact collant. Cette hypothèse peut être justifiée par l'augmentation brutale de la rigidité de la paraison au contact du moule.

Dans le cadre de ce travail, nous avons utilisé un schéma de résolution incrémentale. Il consiste à déterminer la configuration  $C_{n+1}$  à partir de la configuration connue  $C_n$ . La configuration  $C_{n+1}$  doit satisfaire les conditions de contact.

Lors de la résolution de l'équation [28], l'état de contact est vérifié à chaque pas de temps. Lorsqu'un nœud ne respecte pas les conditions de contact, son déplacement est corrigé (les déformations et les contraintes sont calculées à partir de cette correction) et une réaction de contact est imposée en ce nœud [BEN 90], [HAL 85], [KAN 88], [SON 91]. Cette réaction sera prise en compte pour la solution au pas de temps suivant. La correction de déplacement et la réaction de contact sont évaluées par la méthode de pénalisation. Les contacteurs sont discrétisés par facettes planes.



## 4. Applications

### 4.1. Soufflage d'un biberon

Nous avons traité l'exemple du soufflage d'un biberon axisymétrique dont la paraison initiale et le moule sont représentés par la figure 5. Cet exemple a été traité en utilisant un modèle hyperélastique et un modèle viscoélastique. Les deux modèles ont été comparés en terme de répartition d'épaisseur et les résultats ont été confrontés à des mesures. La paraison a été discrétisée à l'aide de 75 éléments tronconiques de membrane. Le schéma de résolution est un schéma dynamique explicite et le contact moule-paraison est supposé collant.

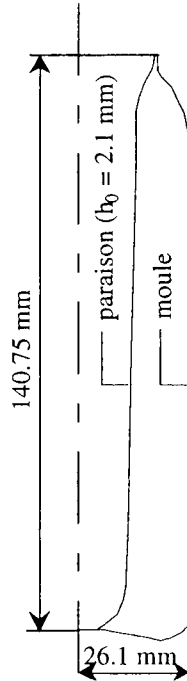


Figure 5. La paraison et le moule

Le matériau utilisé est un polyméthacrylate méthyle (PMMA). Nous avons choisi ce matériau car nous disposons de son identification pour un modèle hyperélastique [WIL 70] et pour un modèle viscoélastique de White-Metzner [BAR 92]. On considère que le matériau est sollicité à 190°C. Les constantes des deux modèles sont les suivantes :

- modèle hyperélastique :  $\mu_1 = 0.2385 \text{ MPa}$ ,  $\alpha_1 = 2$ .
- modèle viscoélastique :  $\eta_0 = 1.255 \text{ Pa s}$ ,  $\lambda_0 = 1.039 \text{ s}$ ,  
 $k_1 = 0.9088$ ,  $k_2 = 1.384$ ,  $n = 0.5776$ .

La pression a été maintenue constante au cours du soufflage.

Dans les deux cas de comportement considérés, les variations d'épaisseur sont très proches des mesures (figure 6). Notamment, les amincissements observés au contour du fond (entrant en contact à la fin du processus) sont bien reproduits.

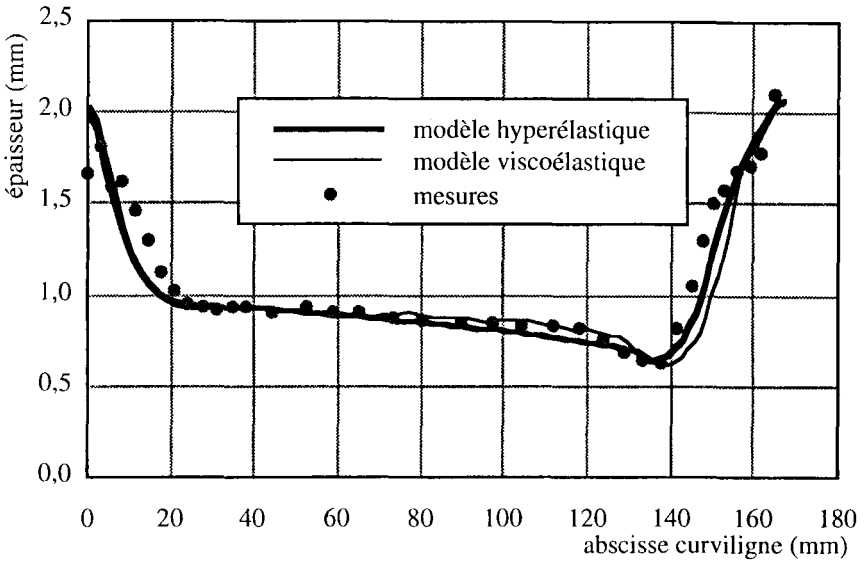


Figure 6. Répartitions d'épaisseur

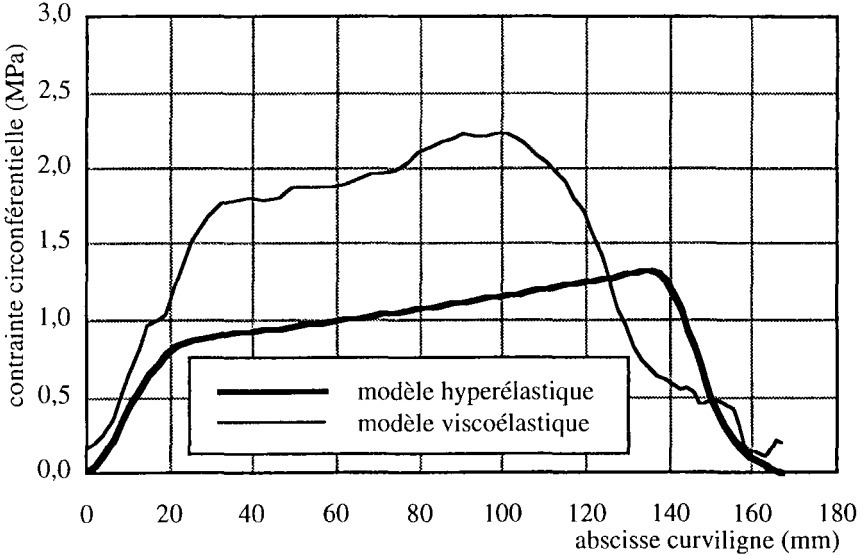


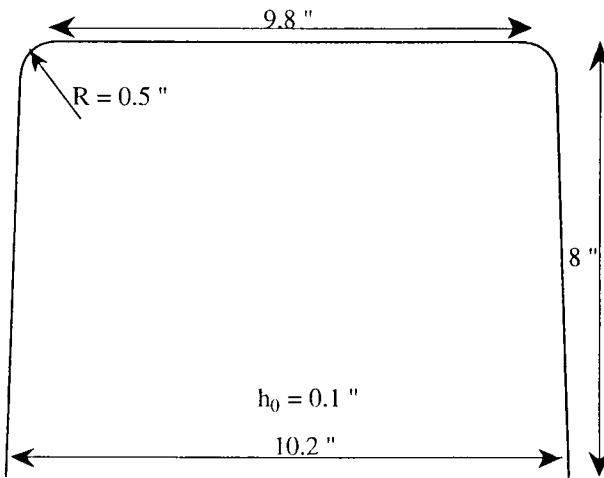
Figure 7. Répartitions de la contrainte circonférentielle

Les niveaux de contraintes obtenus à la fin du soufflage (à l'instant où la paraison est entièrement en contact avec le moule) sont sensiblement différents (figure 7), ce qui était prévisible.

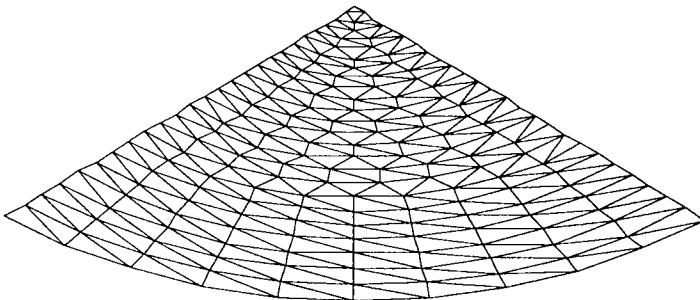
#### 4.2. Thermoformage d'un godet cylindrique

Le second problème que nous avons traité est celui du thermoformage d'un godet cylindrique (figure 8). Nous avons utilisé la loi de comportement et les constantes du matériau données par Schmidt et Carley [SCH 75]. Le potentiel de déformations est donné par :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)^2, \quad C_1 = 20.7 \text{ lb/in}^2, \quad C_2 = 3.2 \times 10^{-6} \text{ lb/in}^2$$



**Figure 8.** Thermoformage d'un godet



**Figure 9.** Maillage initial

En raison de la symétrie, seul le quart de la plaque a été discrétisé à l'aide de 328 éléments CST (figure 9).

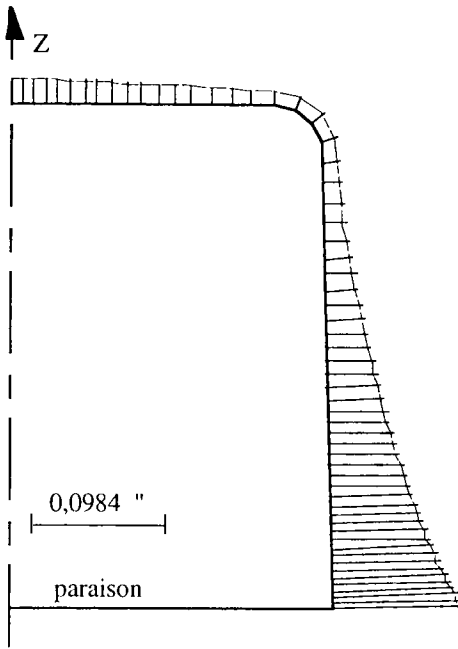


Figure 10. Répartition d'épaisseur le long de la paroi

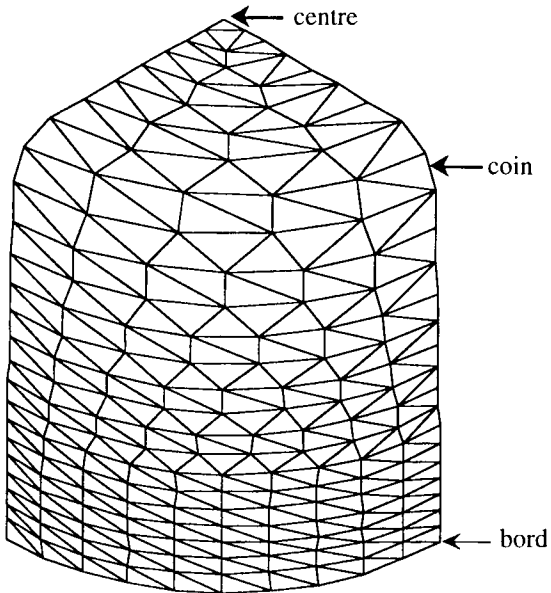


Figure 11. Maillage déformé

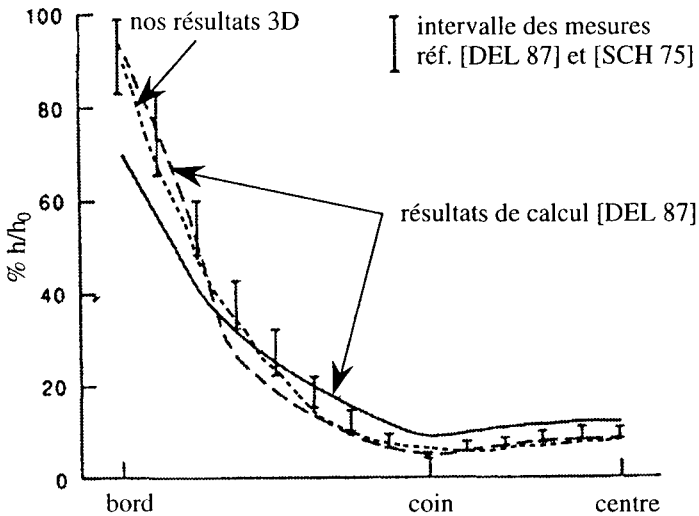


Figure 12. Répartitions d'épaisseur

La figure 10 représente la répartition d'épaisseur obtenue le long de la paroi. La figure 11 représente le maillage déformé (en fin de processus). Le maillage initial est légèrement affiné vers la pointe du quart de cercle (figure 9).

Nous avons comparé la répartition d'épaisseur obtenue par le calcul tridimensionnel à celle obtenue par Delorenzi et Nied [DEL 87] (figure 12) qui ont confronté leurs résultats aux mesures. Il est à noter que pour le modèle que nous utilisons, la température est supposée uniforme.

## 5. Conclusion

Nous avons développé un logiciel de calcul pour la simulation du soufflage et du thermoformage des plastiques.

Les lois de comportement introduites dans la formulation des éléments de coques tridimensionnelles et tronconiques de membrane permettent une bonne représentation des épaisseurs sur le produit final.

Des études en cours portent sur :

- la prise en compte effective de l'influence de la température sur le comportement permettant d'accéder aux contraintes résiduelles dont la connaissance est nécessaire à l'évaluation de la tenue du produit.
- le soufflage de produits industriels tels que les réservoirs à carburant.
- des techniques de remaillage permettant de représenter des détails géométriques sur des structures complexes.
- la prise en compte des effets de flexion pour éviter des problèmes d'instabilité numérique.

### **Remerciements.**

Nous tenons à remercier le MRE pour son soutien financier ainsi que la société La Précision Plastique pour les renseignements et les conseils dont nous avons bénéficié. Nous tenons également à remercier nos collègues du laboratoire et en particulier M S. Benchaabane pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et le temps qu'il nous a consacré pour en discuter.

### ***Bibliographie***

- [BAR 92] BARNES H.A. and ROBERTS G.P., "A simple empirical model describing the steady-state shear and extensional viscosities of polymers", *J. Of Non Newt. Flui. Mech.*, Vol. 44, pp. 113-126, 1992.
- [BAT 80] BATRA R.C., "Finite plane strain deformations of rubber like materials", *Int. J. Numer. Meth. Engin.*, Vol. 15, pp. 145-160, 1980.
- [BEN 90] BENSON D.J., HALLQUIST J.O., "A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures", *Comp. meth. In Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 78, pp. 141-163, 1990.
- [BOL 89] BOLZON G. and VITALIANI R. "Derivation of hyper elastic incompressible material constitutive tensor within a total lagrangian framework", *Computers & Structures*, Vol. 33, N° 1, pp. 221-227, 1989.

- [BOU 92] BOUKAMEL, DESBORDES, JAZZAR et BRUNET, "Un élément fini pseudo-axisymétrique pour les grandes déformations hyperélastiques", STRUCOME'92, Paris, 1992.
- [BOY 88] BOYCE M.C., PARKS D.M. and ARGON A.S., "Large inelastic deformation of glassy polymers. Part I : Rate dependant constitutive model", Mech. Of Mater., Vol. 7, pp. 15-33, 1988.
- [CHR 86] CHRETIEN G. et HATAT D., "Initiation aux plastiques et aux composites", TEC. et DOC. LAVOISIER, 1986.
- [COH 91] COHEN A. and SEITZ J.T., "Material and numerical aspects of mathematical modelling of blow molding", Intern. Polymer. Processing, Vol. 6, N° 1, 1991.
- [CRO 91] CROCHET M. "Viscoélasticité non linéaire : rhéologie et modélisation numérique", Ecoles CEA-EDF-INRIA, pp. 273-401, 1991.
- [DEL 91] DELORENZI H.G. and NIED H.F., "Modelling of polymer processing recent developments", pp. 117-171, HANSER PUBLISHERS, 1991.
- [DEL 87] DELORENZI H.G. and NIED H.F., "Blow molding and thermoforming of plastics : finite element modeling", Computers & Structures, Vol. 26 N° 1/2, pp. 197-206, 1987.
- [DUF 83] DUFFETT and REDDY, "The analysis of incompressible hyperelastic bodies by the finite element method", Comp. meth. In Appl. Mech. and Eng., Vol. 41, pp. 105-120, 1983.
- [FER 80] FERRY J. D., "Viscoelastic properties of polymers", John Wiley & Sons, 1980.
- [HAL 85] HALLQUIST J.O., GOUDREAU G.L. and BENSON D.J., "sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations", Comp. meth. In Appl. Mech. and Eng., Vol. 51, pp. 107-137, 1985.
- [HUG 83] HUGHES and CARNOY, "Non-linear finite element shell formulation accounting for large membrane strains", Comp. meth. In Appl. Mech. and Eng., Vol. 39, pp. 69-82, 1983.
- [KAN 88] KANTO Y. and YAGAMA G. "A dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method", Int. J. Numer. Meth. Engin., Vol. 29, pp. 755-774., 1988.

- [LAR 83] LARSON R.G., "Convection and diffusion of polymer network strands", J. of Non Newt. Flui. Mech., Vol. 13, pp. 279-308, 1983.
- [MAL 69] MALVERN L.E., "Introduction to the mechanics of continuous medium", PRENTICE-HALL, 1969.
- [MAR 87] MARKOVSKY A. and al, "Mathematical and computational aspects of a general viscoelastic theory", J. of Rheol., Vol. 31, N° 8, pp. 785-813, 1987.
- [PET 79] PETRIE C.J.S., "Measures of deformation and convected derivatives", J. of Non Newt. Flui. Mech., Vol. 5, pp. 147-176, 1979.
- [ROS 89] ROSATO D.V. and ROSATO D. V., "Blow molding handbook", HANSER PUBLISHER, 1989.
- [SAL 92] SALEEB A.F. and CHANG Y.P., "On the development of explicit robust schemes for implementation of a class of hyperelastic models in large-strain analysis of rubbers", Int. J. Numer. Meth. Engin., Vol. 30, pp. 1237-1249, 1992.
- [SCH 75] SCHMIDT L.R. and CARLEY J.F., "Biaxial stretching of heat softened plastic sheets using an inflation technique", Int. J. Engin. Sci., Vol. 13, pp. 563-578, 1975.
- [SCH 91] SCHWEIZERHOF K. and HALLQUIST J.O., "Explicit integration schemes and contact formulations for thin sheet metal forming", FE-Simulation of 3-D sheet metal forming processes in automotive industry, pp. 405-439, Zürich, 14-16 May 1991.
- [SON 91] SONG N.W., MIRZA F.A. and VLACHOPOULOS J., "Finite element analysis of inflation of an axisymmetric sheet of finite thickness", J. Rheol, Vol. 35, N° 1, pp. 93-111, 1991.
- [SUS 87] SUSSMAN T. and BATHE K.J., "A finite element formulation for non-linear incompressible elastic and inelastic analysis", Computers & Structures, Vol. 26, N° 1/2, pp. 357-409, 1987.
- [TAN 91] TANNER R.I., "Viscoélasticité non linéaire : rhéologie et modélisation numérique", Ecoles CEA-EDF-INRIA, pp. 1-220, 1991.
- [WIL 70] WILLIAMS J.G., "A method of calculation for thermoforming plastics sheets", J. of Strain Analysis, Vol. 5, N° 1, pp. 49-57, 1970.