
Une méthode d'éléments finis pour le calcul des écoulements compressibles utilisant les variables conservatives et la méthode SUPG

Azzeddine Soulaïmani* — Nacer-Eddine Elkadri Elyamani**
Claire Deschênes***

* *Ecole de technologie supérieure*
Université du Québec, département de génie mécanique
4750 avenue Henri-Julien
Montréal, H2T 2C8, Canada

** *Université Laval, département de génie mécanique*
Ecole de technologie supérieure, département de génie mécanique

*** *Université Laval, département de génie mécanique*
Ste-Foye, G1K 7P4, Canada

RÉSUMÉ. Dans cet article, une méthode d'éléments finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes et d'Euler est proposée. Ces équations sont résolues sous la forme conservative faisant intervenir comme inconnues les variables conservatives (i.e. : densité, quantité de mouvement par unité de volume et énergie totale par unité de volume). La formulation variationnelle, ainsi que les discrétisations spatio-temporelles sont discutées. Afin de traiter des écoulements à nombres de Reynolds élevés ou en présence de forts gradients, la formulation variationnelle est stabilisée en utilisant la méthode SUPG avec un opérateur de capture des chocs. Nous discutons particulièrement de la mise en œuvre de cette méthode ainsi que de l'algorithme de résolution du système discret. Quelques tests numériques sont menés afin de valider le code de calcul. Celui-ci est utilisé pour modéliser l'écoulement dans un système d'admission d'un moteur de voiture.

ABSTRACT. The Navier-Stokes and Euler equations are solved in a conservative form and using the conservation variables. The variational formulation and the corresponding finite element approximations are discussed. For high speed flows, the numerical model has to be stabilized. We used a SUPG method along with a shock capturing operator. The stabilization techniques and the solution algorithm are described. Some numerical tests are carried out to validate the code. This model is employed to simulate the flow in an engine intake.

KEY WORDS : *Navier-Stokes and Euler equations, conservation variables, SUPG, shock capturing, engine intake.*

MOTS-CLÉS : *équations de Navier-Stokes et d'Euler, variables conservatives, SUPG, capture de choc, système d'admission.*

1. Introduction

Durant les dernières années, les numériciens, sans aucun doute stimulés par les grands projets de l'aérospatiale, ont investi des efforts considérables pour la simulation des écoulements de fluides compressibles. Ces écoulements sont caractérisés par la présence de grandes vitesses, de chocs et de couches limites/internes à forts gradients. Le traitement de tels phénomènes pose de sérieuses difficultés pour les méthodes numériques. Il est vrai aussi que ces efforts ont poussé les possibilités d'application du calcul numérique à des niveaux de complexité élevés.

Les équations de Navier-Stokes (resp. d'Euler) constituent un système multidimensionnel d'équations non-linéaires de type transport-diffusion (resp. de transport pur). Il est connu que la formulation d'éléments finis standard de type Galerkin conduit souvent à des oscillations dans la solution et ultimement à la divergence de cette dernière lorsque la viscosité du fluide est faible. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, diverses directions peuvent être empruntées pour éviter ces instabilités. Dans une première approche, une viscosité artificielle est tout simplement ajoutée à la viscosité du fluide. Dans d'autres, la formulation variationnelle est modifiée de telle façon que la stabilité soit améliorée pour n'importe quel nombre de Reynolds, comme dans le cas des méthodes: *SUPG* (Streamline Upwind Petrov-Galerkin, Hughes-Tezduyar [1]), *GLS* (Galerkin Least Squares, Hughes et al. [2]) et la méthode des caractéristiques (Pironneau [3]). Il est aussi possible de choisir une discrétisation temporelle qui introduit implicitement une dissipation comme dans les schémas de type Taylor-Galerkin (Donea [4]).

La méthode *SUPG* a été utilisée avec succès pour résoudre les équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles (Brooks et Hughes [5]). D'autre part (Hughes et al. [2]) l'ont généralisée pour résoudre les systèmes multidimensionnels linéaires symétriques de type transport-diffusion, ce qui a conduit au développement de la méthode *GLS*. Les équations de Navier-Stokes ont été résolues avec *SUPG* et *GLS* pour les fluides compressibles après une symétrisation en utilisant de nouvelles variables dites entropiques. L'utilisation de la méthode *SUPG* en adoptant directement les variables conservatives suscite de l'intérêt depuis les trois dernières années (Bristeau et al. [6], Elkadri [7], Soulaïmani-Fortin [8], Fortin et al. [9], Le Beau et al. [10]). Cette approche a, a priori, l'avantage d'être relativement plus simple à mettre en oeuvre qu'une

méthode utilisant les variables entropiques, car elle nécessite moins de calculs et permet d'appliquer facilement les conditions aux limites physiques. Le succès d'une telle méthode repose sur une formulation variationnelle naturellement stable au moins pour les faibles nombres de Reynolds, sur le choix d'une matrice $\underline{\tau}$ dite de stabilisation et sur l'utilisation d'un algorithme de résolution des systèmes d'équations fortement non-linéaires.

Cet article propose des éléments de réponse à ces points. Il est structuré comme suit. Dans la section 2, les équations de base sont rappelées. La troisième section est consacrée à la formulation variationnelle standard de Galerkin et à la discrétisation correspondante. Il est montré que cette formulation est naturellement stable pour de faibles nombres de Reynolds. Le cas des écoulements rapides nécessite l'introduction de méthodes de stabilisation. Dans la section 4, une méthode *SUPG* est proposée avec un opérateur de capture de chocs. L'accent est mis sur les étapes de sa mise en oeuvre. Dans la section 5, nous présentons l'algorithme détaillé pour résoudre le système discret résultant. Dans la dernière section, quelques tests numériques d'écoulements transsoniques autour d'un profil *NACA0012* et d'un écoulement supersonique autour d'un demi cylindre sont présentés. Finalement le code de calcul sera utilisé pour modéliser l'écoulement dans un système d'admission d'un moteur de voiture .

2. Equations de Navier-Stokes en variables conservatives

Nous rappelons dans cette section les équations de la dynamique des fluides compressibles et visqueux. Ces équations expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

En identifiant les variables conservatives, à savoir la densité ρ , la quantité de mouvement par unité de volume \underline{U} et l'énergie totale par unité de volume E comme étant les variables indépendantes, les équations de Navier-Stokes, sous la forme conservative et adimensionnelles, s'écrivent:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{U} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\nabla}(\underline{u} \otimes \underline{U}) + \underline{\nabla} p - \underline{\nabla} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{f} \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot [(E + p)\underline{u}] - \underline{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u}) + \underline{\nabla} \cdot \underline{q} = r + \underline{f} \cdot \underline{U} \quad (2.1c)$$

où \tilde{u} , \tilde{p} , \tilde{q} , \tilde{r} , \tilde{f} et $\underline{\underline{\sigma}}$ représentent respectivement: la vitesse, la pression, le flux de chaleur, la source d'énergie, la force extérieure et le tenseur des contraintes visqueuses.

Le flux de chaleur et la pression s'expriment, sous forme non-dimensionnelle, en fonction de la température et de la densité par la loi de Fourier et l'équation des gaz parfaits respectivement:

$$\tilde{q} = -\frac{\gamma}{R_e P_r} \nabla T; \tag{2.2}$$

et

$$p = (\gamma - 1)\rho T, \tag{2.3}$$

où R_e , P_r , γ et T sont respectivement le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl, le rapport des chaleurs spécifiques et la température.

D'autre part, le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\sigma}}$ est donné par la relation:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\tilde{u}) = \frac{1}{R_e} [\nabla \tilde{u} + (\nabla \tilde{u})^t - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \tilde{u}) \underline{\underline{I}}]. \tag{2.4}$$

où $\underline{\underline{I}}$ est la matrice identité.

La température et la vitesse sont reliées en fonction des variables conservatives par les relations suivantes:

$$E = \rho(T + \frac{|u|^2}{2}); \tag{2.5}$$

et

$$\tilde{u} = \frac{U}{\rho}. \tag{2.6}$$

La substitution de l'équation (2.6) dans l'équation (2.4) décompose le tenseur des contraintes visqueuses sous la forme suivante:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\tilde{u}) = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}}(U) + \underline{\underline{\sigma}}^* \tag{2.7}$$

où

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = -\frac{1}{R_e \rho^2} \{ [U \cdot (\nabla \rho)^t + (\nabla \rho) \cdot U^t] - \frac{2}{3} (U^t \cdot \nabla \rho) \underline{\underline{I}} \}.$$

D'autre part, la substitution des équations (2.5) et (2.6) dans les équations (2.2) et (2.3) permet d'exprimer, en fonction des variables conservatives ρ , $\underline{\underline{U}}$ et E , le flux de chaleur et la pression respectivement par les relations suivantes:

$$\tilde{q} = -\frac{\gamma}{Re Pr} \nabla \left(\frac{E}{\rho} - \frac{|U|^2}{2\rho^2} \right); \quad (2.8)$$

et

$$p = (\gamma - 1) \left[E - \frac{|U|^2}{2\rho} \right]. \quad (2.9)$$

Remarque 1:

Les équations (2.1) sont fortement non-linéaires, leur étude mathématique constitue un grand défi et leur résolution numérique n'est pas aisée. La formulation variationnelle ainsi que les approximations par éléments finis à établir doivent respecter, entre autres, la condition implicite que la température, la pression et la densité doivent être positives. ■

Remarque 2:

En désignant par \mathbf{V} le vecteur des variables conservatives, c'est-à-dire:

$$\mathbf{V} = (\rho, U, E)^t,$$

le système d'équations (2.1) peut s'écrire sous la forme vectorielle:

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{\text{conv}}(\mathbf{V}) - \mathbf{F}_{i,i}^{\text{diff}}(\mathbf{V}) = \mathbf{F} \quad (2.10)$$

où $\mathbf{F}_{i,i}^{\text{conv}}(\mathbf{V})$ et $\mathbf{F}_{i,i}^{\text{diff}}(\mathbf{V})$ sont respectivement les flux de convection et de diffusion dans la direction i et \mathbf{F} le vecteur source.

Il est intéressant aussi d'écrire le système (2.1) sous la forme quasi-linéaire:

$$\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{V}_{,i} - (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i} = \mathbf{F} \quad (2.11)$$

avec \mathbf{A}_i les matrices jacobiennes des flux de convection telles que $\mathbf{A}_i = \mathbf{F}_{i,\mathbf{V}}^{\text{conv}}$ et \mathbf{K}_{ij} les matrices de diffusion telles que $\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j} = \mathbf{F}_i^{\text{diff}}$. ■

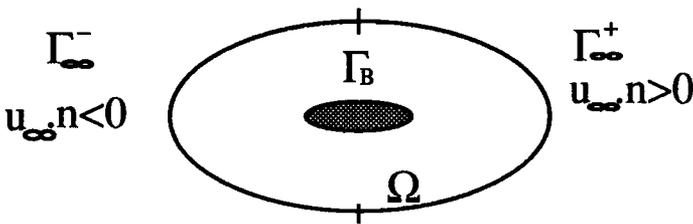
Remarque 3 :

Les équations d'Euler se retrouvent dans le cas où on enlève les termes visqueux.

Afin de bien poser le problème mathématique, il faut ajouter aux équations (2.10) ou (2.11) des conditions aux limites et des conditions initiales appropriées.

2.1 Conditions aux limites

On considère des écoulements externes et internes, le domaine de calcul est noté Ω de frontière Γ . Un exemple d'une configuration bidimensionnelle est décrit par la figure suivante:



Sur la frontière rentrante du domaine Γ_{∞}^- :

L'écoulement est considéré uniforme :

$$\rho = \rho_{\infty} = 1,$$

$$\vec{U}_{\infty} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

où β est l'angle d'attaque,

$$E_{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \frac{1}{M_{\infty}^2}$$

où M_{∞} est le nombre de Mach à l'infini.

Sur la paroi du corps Γ_B :

On impose la condition d'adhérence ($\vec{U} = 0$) dans le cas des écoulements visqueux et une condition de glissement ($\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$) dans le cas de fluides non visqueux.

De plus on impose soit une condition naturelle de type Neuman sur la température (paroi adiabatique): $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$, soit une répartition uniforme de la

température T_B afin de représenter une condition d'équilibre thermique à la paroi; ce qui revient à imposer la condition de Dirichlet: $E = \rho T_B$.

Dans le cas d'une répartition uniforme de la température, pour des nombres de Mach inférieurs à 3, nous prenons T_B égale à la température d'arrêt:

$$T_B = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{M_\infty^2}\right)$$

Etant donné que ρ est inconnue a priori, la condition aux limites $E = \rho T_B$ est de type non-linéaire. Au cours de la résolution, il faut donc mettre à jour continuellement la valeur de l'énergie à la paroi en fonction de la densité.

Sur la frontière sortante Γ_∞^+ :

Il faut distinguer deux cas:

- si le nombre de Mach local est inférieur à l'unité, soit en régime subsonique; il faut alors au moins une condition aux limites de Dirichlet (sur la densité ou sur la pression ou sur l'énergie totale);

- si le nombre de Mach local est supérieur à l'unité, aucune condition aux limites n'est alors nécessaire.

Enfin, les conditions initiales correspondent à la donnée des champs:

$$\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0(\underline{x}), \quad U(\underline{x}, 0) = U_0(\underline{x}) \quad \text{et} \quad E(\underline{x}, 0) = E_0(\underline{x}).$$

3. Formulation par éléments finis

Dans cette section, une méthode de discrétisation par éléments finis du système d'équations (2.1) est présentée.

3.1. Formulation variationnelle

Soit Ω un borné de l'espace euclidien \mathcal{R}^n , de frontière Γ . Afin de déterminer numériquement une solution, on annule la projection du système d'équations (2.1) sur un ensemble de fonctions de pondération suivant la méthode de Galerkin. Les fonctions de pondération des variables conservatives ρ , U et E sont dénotées respectivement par ϕ^ρ , ϕ^U et ϕ^E , et multiplient tour à tour les équations (2.1):

$$(\phi^\rho, \frac{\partial \rho}{\partial t}) + (\phi^\rho, \nabla_{\sim} U) = 0 \tag{3.1a}$$

$$\begin{aligned} (\phi^U, \frac{\partial U}{\partial t}) + (\phi^U, \nabla_{\sim} (\frac{U \otimes U}{\rho})) + (\phi^U, \nabla_{\sim} p) + (\phi^U, U, \rho) \\ = (\phi^U, f) + \langle \phi^U, \underline{\underline{\sigma}} \rangle \end{aligned} \tag{3.1b}$$

$$\begin{aligned} (\phi^E, \frac{\partial E}{\partial t}) + (\phi^E, \nabla_{\sim} [(E + p)u]) + (\nabla_{\sim} \phi^E, \underline{\underline{\sigma}} \cdot u) - (\nabla_{\sim} \phi^E, q) \\ = (\phi^E, r + f \cdot U) - \langle \phi^E, q \rangle + \langle \phi^E, \underline{\underline{\sigma}} \cdot u \rangle \end{aligned} \tag{3.1c}$$

où (,) dénote le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et:

$$\begin{aligned} (\phi^U, U, \rho) &= \int_{\Omega} \nabla_{\sim} \phi^U : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \\ \langle \phi^U, \underline{\underline{\sigma}} \rangle &= \int_{\Gamma} \phi^U (\underline{\underline{\sigma}} \cdot n) d\Gamma \\ \langle \phi^E, q \rangle &= \int_{\Gamma} \phi^E q \cdot n d\Gamma \end{aligned}$$

L'intégration par parties des termes de diffusion permet de réduire l'ordre de dérivation de deux à un. L'apparition d'intégrales de contour peut servir à imposer les conditions aux limites naturelles, telles les conditions d'adiabaticité et de glissement.

Remarque 4:

En utilisant la notation vectorielle (2.10), le problème variationnel (3.1) peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\mathbf{W} \cdot (\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{conv} - \mathbf{F}) + \mathbf{W}_{,i} \mathbf{F}_i^{diff}] d\Omega \\ - \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{F}_i^{diff} \mathbf{n}_i) d\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec $\mathbf{W} = (\phi^\rho, \phi^U, \phi^E)^t$ le vecteur des fonctions de pondération.

Aussi, en utilisant la forme quasi linéaire (2.11), on peut établir le problème variationnel suivant:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{W} \cdot (\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{V}_{,i} - \mathbf{F}) + \mathbf{W}_{,i} (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j})] d\Omega \quad (3.3)$$

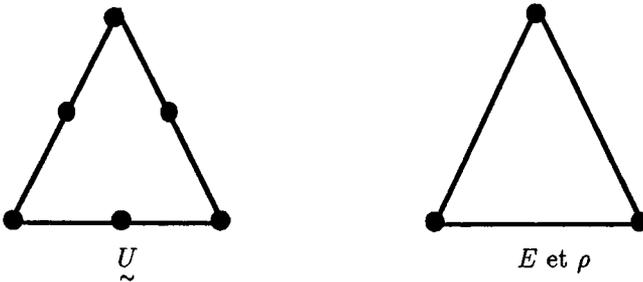
$$- \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{F}_i^{\text{diff}} \mathbf{n}_i) d\Gamma = 0$$

Les solutions exactes des problèmes variationnels continus (3.2) et (3.3) sont évidemment identiques. Leurs discrétisations peuvent cependant amener à des solutions différentes. En effet, les variables conservatives sont forcément les variables à discrétiser (par des approximations polynômiales par élément) dans la formulation quasi-linéaire (3.3). Alors que la formulation (3.2), qui est parfaitement équivalente à la formulation (3.1), permet de discrétiser par des polynômes toute autre combinaison de variables, telle la pression. ■

3.2. Discrétisation spatio-temporelle

Si on approche les trois variables conservatives ρ , \tilde{U} et E par des polynômes de même ordre, on observe expérimentalement les mêmes types d'oscillations que celles mises en évidence pour les écoulements incompressibles, ou encore pour d'autres problèmes simplifiés d'écoulements compressibles (Bristeau et al. [11], Pironneau-Rapaz [12], Fortin-Soulaimani [13]). On remédie à cette situation en choisissant un sous-espace d'approximation moins riche pour la densité et l'énergie. D'autre part, les relations (2.3), (2.5) et (2.6) permettent de calculer la pression, la température et la vitesse en fonction des variables conservatives.

En respectant ce critère de stabilité spatiale, l'élément choisi est un triangle à six noeuds, avec une approximation quadratique (six noeuds) pour les composantes de la quantité de mouvement, et une approximation linéaire (trois noeuds) pour la densité et l'énergie totale par unité de volume.



D'autre part, il est possible aussi de choisir des approximations moins riches pour la quantité de mouvement tout en assurant la stabilité. L'élément Mini (Arnold et al.[14], Soulaïmani et al. [15] et Brezzi et al. [16]) est l'élément le plus simple possible qui est constitué, essentiellement, d'approximations linéaires continues et qui respecte la condition de stabilité, cet élément est surtout intéressant pour les simulations tridimensionnelles (Soulaïmani [17]).

En substituant directement les approximations polynomiales de ρ , \tilde{U} et E dans ces relations, comme déjà retrouvées dans les équations (2.8) et (2.9), les variables auxiliaires \tilde{u} , T et p seront alors approchées, au niveau de chaque élément, par des fractions rationnelles. Or, pour respecter la condition de stabilité sur la pression, celle-ci doit être approchée linéairement sur l'élément. Il y a en principe plusieurs méthodes permettant d'obtenir cette approximation; celle que nous utilisons consiste à calculer la température et la pression en chaque sommet (i) du triangle considéré par :

$$T(i) = \frac{E(i)}{\rho(i)} - \frac{|\tilde{U}(i)|^2}{2\rho(i)^2},$$

$$p(i) = (\gamma - 1)\left[E(i) - \frac{|\tilde{U}(i)|^2}{2\rho(i)}\right],$$

et par la suite, on définit p et T à l'intérieur de l'élément par:

$$p = \sum_i p(i)\phi^p(i),$$

et

$$T = \sum_i T(i)\phi^p(i).$$

Les dérivées temporelles sont approximées à l'aide du schéma implicite de Gear du second ordre, la dérivée temporelle de toute fonction $f(t)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \simeq \frac{3f(t + \delta t) - 4f(t) + f(t - \delta t)}{2\delta t} \quad (3.4)$$

4. Méthodes de stabilisation

Les méthodes de stabilisation que nous utilisons sont décrites dans les paragraphes suivants.

4.1. Viscosité artificielle

La méthode de viscosité artificielle utilisée consiste à remplacer la viscosité dynamique μ par:

$$\mu^* = \mu + \mu_{art}$$

où μ_{art} est définie d'une manière similaire à la diffusion artificielle très utilisée dans les schémas aux différences finis:

$$\mu_{art} = \frac{\|u\|h}{2} \zeta(R_h) C_a \quad (4.1)$$

où h est la taille de l'élément, C_a le coefficient de pondération de la viscosité et R_h le nombre de Reynolds local $R_h = \frac{\|u\|h}{2\mu}$.

La fonction $\zeta(R_h)$ est particulièrement sensible aux zones à forte convection; elle est définie comme suit:

$$\zeta(R_h) = \min\left(\frac{R_h}{3}, 1\right)$$

Ainsi, le système d'équations modifié comporte un terme de viscosité artificielle dont l'importance dépend de la fonction $\zeta(R_h)$ et du coefficient de pondération C_a .

Par expérience, il faut augmenter la viscosité dans les zones à forte convection où le nombre de Reynolds local est grand. L'effet de cette viscosité est de créer de la dissipation d'énergie supplémentaire, garantissant ainsi la positivité de la température, de la densité et de la pression absolue. Cette méthode a l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre et ne requiert pas de calculs supplémentaires, cependant elle a l'inconvénient de contenir un coefficient arbitraire C_a dont la valeur influence la qualité de la solution. Nous utilisons *essentiellement cette méthode pour obtenir rapidement une solution, quoique diffusive, proche de la solution finale*. Cette solution sert par la suite à initialiser la formulation stabilisée par la méthode *SUPG* que nous décrivons dans la section suivante.

4.2. Méthode de décentrage: SUPG

La méthode de décentrage amont basée sur une formulation de Petrov-Galerkin (désignée sous l'acronyme SUPG) est devenue très populaire pour la résolution des équations de transport. Lorsque la convection domine, l'utilisation de la méthode de Galerkin engendre en effet des oscillations non physiques qu'on ne peut supprimer qu'en raffinant considérablement le maillage, ou en réduisant fortement le pas de temps dans le cas transitoire. La méthode SUPG consiste à ajouter un terme de perturbation supplémentaire à la formulation standard de Galerkin. Le fait d'utiliser la formulation de Petrov-Galerkin revient d'autre part à modifier les fonctions de pondération de type Galerkin par des fonctions de pondération ayant plus de poids en amont qu'en aval, introduisant ainsi de la diffusion artificielle dans le sens de l'écoulement.

4.2.1 Principe de la méthode SUPG

Pour comprendre la méthode SUPG, considérons d'abord, comme modèle simple, la version stationnaire unidimensionnelle de l'équation de convection-diffusion avec des conditions aux limites de Dirichlet sur les bornes du segment $x = 0$ et $x = L$

$$u\phi_{,x} - k\phi_{,xx} = f \quad (4.2)$$

où la vitesse de l'écoulement u et le coefficient de diffusion k sont supposés positifs.

La formulation variationnelle faible suivant la méthode de Galerkin peut s'écrire:

$$\int_0^L (wu\phi_{,x} + w_{,x}k\phi_{,x} - wf)dx = 0 \quad (4.3)$$

où w est la fonction de pondération.

La formulation variationnelle selon la méthode SUPG s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} & \int_0^L (wu\phi_{,x} + w_{,x}k\phi_{,x} - wf)dx \\ & + \sum_A \int_{x_{A-1}}^{x_A} (uw_{,x})\tau(u\phi_{,x} - k\phi_{,xx} - f)dx = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le paramètre τ est défini par: $\tau = \frac{h}{2\|u\|} \zeta(R_h)$

Ainsi, le deuxième terme de cette formulation constitue une perturbation ajoutée à la formulation de Galerkin. Ce terme correspond à l'intégration de l'équation de convection-diffusion à l'intérieur des éléments (i.e. $]x_{A-1}, x_A[$). La stabilité se trouve améliorée grâce au terme diffusif:

$$\sum_A \int_{x_{A-1}}^{x_A} \tau u w_{,x} \cdot u \phi_{,x} dx. \tag{4.5}$$

4.2.2. Méthode SUPG en variables conservatives

De manière similaire à (4.2.1), la formulation variationnelle (3.2) est modifiée comme suit:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\mathbf{W} \cdot (\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{\text{conv}} - \mathbf{F}) + \mathbf{W}_{,i} (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j})] d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot \mathbf{F}_i^{\text{diff}} \mathbf{n}_i d\Gamma \tag{4.6} \\ + \sum_e \int_{K^e} (\mathbf{A}_i^t \cdot \mathbf{W}_{,i}) \underline{\tau} (\mathbf{V}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{\text{conv}} - (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i} - \mathbf{F}) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

où K^e est un élément de la triangulation de Ω .

La matrice $\underline{\tau}$ que nous utilisons prend la forme suivante:

$$\underline{\tau} = \left(\sum_i |\mathbf{c}_{ij} \mathbf{A}_j| \right)^{-1} \zeta(\mathbf{R}_n) \tag{4.7}$$

La justification d'un tel choix est détaillée dans un récent article (Soulaïmani-Fortin [8]). Nous nous intéressons ici à présenter une méthode simple pour la mise en oeuvre de (4.7).

Dans l'équation (4.7), les coefficients \mathbf{c}_{ij} représentent les éléments de la matrice jacobienne de la transformation géométrique de l'élément réel à l'élément de référence. L'opérateur $| \cdot |$ appliqué à une matrice B définit sa valeur absolue $|B|$ par: $|B| = S|\Lambda|S^{-1}$, où S et Λ sont respectivement les matrices des vecteurs propres et des valeurs propres de B .

Afin de calculer $\underline{\tau}$ à partir de l'équation (4.7) nous devons obtenir les valeurs absolues des $\mathbf{B}_i = \mathbf{c}_{ij} \mathbf{A}_j$. La définition de la matrice $\underline{\tau}$ requiert donc la résolution d'un problème aux valeurs propres. Il convient aussi de rappeler que les matrices jacobiniennes \mathbf{A}_i et $\tilde{\mathbf{A}}_i$, du flux de convection dans la direction i par rapport aux variables conservatives et non conservatives respectivement sont reliées par la relation suivante:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{A}}_i\mathbf{M}^{-1},$$

avec

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tilde{\mathbf{V}}}.$$

En deux dimensions les vecteurs des variables conservatives et non conservatives sont respectivement:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ E \end{bmatrix};$$

et

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ p \end{bmatrix}.$$

On peut obtenir analytiquement les matrices \mathbf{M} et \mathbf{M}^{-1} dans le cas bidimensionnel:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u_1 & \rho u_2 & 1/(\gamma - 1) \end{pmatrix};$$

et

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 \\ -u_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2}u^2 & (1-\gamma)u_1 & (1-\gamma)u_2 & (\gamma-1) \end{pmatrix}.$$

avec $u^2 = u_1^2 + u_2^2$.

Les expressions de $\tilde{\mathbf{A}}_1$ et $\tilde{\mathbf{A}}_2$ sont données dans le cas bidimensionnel par:

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho c^2 & u_2 \end{pmatrix}$$

où $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ est la vitesse du son.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= c_{ij} \mathbf{A}_j \\ &= \mathbf{M}(c_{ij} \tilde{\mathbf{A}}_j) \mathbf{M}^{-1} \\ &= \mathbf{M} \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{M}^{-1} \end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathbf{B}}_i = c_{ij} \tilde{\mathbf{A}}_j$.

Comme les matrices $\tilde{\mathbf{A}}_i$ sont diagonalisables, il en est de même pour les matrices $\tilde{\mathbf{B}}_i$. Il existe donc des matrices diagonales $\tilde{\Lambda}_i$ et des matrices inversibles $\tilde{\mathbf{T}}_i$ telles que $\tilde{\mathbf{B}}_i = \tilde{\mathbf{T}}_i \tilde{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{T}}_i^{-1}$ (pas de sommation sur l'indice i). Il s'en suit que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \mathbf{M} \tilde{\mathbf{T}}_i \tilde{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{T}}_i^{-1} \mathbf{M}^{-1} \\ &= \mathbf{T}_i \Lambda_i \mathbf{T}_i^{-1} \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{T}}_i, \quad \mathbf{T}_i^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}_i^{-1} \mathbf{M}^{-1}, \quad \text{et} \quad \Lambda_i = \tilde{\Lambda}_i$$

d'où

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_i| &= |\mathbf{T}_i \Lambda_i \mathbf{T}_i^{-1}| \\ &= \mathbf{T}_i |\Lambda_i| \mathbf{T}_i^{-1} \\ &= (\mathbf{M} \tilde{\mathbf{T}}_i) |\tilde{\Lambda}_i| (\tilde{\mathbf{T}}_i^{-1} \mathbf{M}^{-1}) \end{aligned}$$

Il est, en effet, facile d'obtenir analytiquement les valeurs propres des matrices $\tilde{\mathbf{B}}_i = c_{ij} \tilde{\mathbf{A}}_j$, elles sont:

$$\lambda_{i1} = \lambda_{i2} = c_{i1} u_1 + c_{i2} u_2$$

$$\lambda_{i3} = c_{i1} u_1 + c_{i2} u_2 + c$$

$$\lambda_{i4} = c_{i1} u_1 + c_{i2} u_2 - c$$

d'où:

$$\tilde{\Lambda}_i = \text{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}, \lambda_{i4})$$

Les expressions des matrices $\tilde{\mathbf{T}}_i$ et $\tilde{\mathbf{T}}_i^{-1}$ sont:

$$\tilde{\mathbf{T}}_i = \begin{pmatrix} c_{i1}^2 & c_{i2}^2 & \frac{\rho}{c\sqrt{2}} & \frac{\rho}{c\sqrt{2}} \\ -c_{i2} & c_{i2} & \frac{c_{i1}}{\sqrt{2}} & \frac{-c_{i1}}{\sqrt{2}} \\ c_{i1} & -c_{i1} & \frac{c_{i2}}{\sqrt{2}} & \frac{-c_{i2}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\rho c}{\sqrt{2}} & \frac{\rho c}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{T}_i^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_{11}^2+c_{12}^2} & \frac{-c_{12}^3}{(c_{11}^2+c_{12}^2)^2} & \frac{c_{11}c_{12}^2}{(c_{11}^2+c_{12}^2)} & \frac{-1}{c^2(c_{11}^2+c_{12}^2)^2} \\ \frac{1}{c_{11}^2+c_{12}^2} & \frac{c_{11}^2c_{12}}{(c_{11}^2+c_{12}^2)^2} & \frac{-c_{11}^3}{(c_{11}^2+c_{12}^2)^2} & \frac{-1}{c^2(c_{11}^2+c_{12}^2)} \\ 0 & \frac{c_{11}}{\sqrt{2}(c_{11}^2+c_{12}^2)} & \frac{c_{12}}{\sqrt{2}(c_{11}^2+c_{12}^2)} & \frac{-1}{\rho c\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-c_{11}}{\sqrt{2}(c_{11}^2+c_{12}^2)} & \frac{-c_{12}}{\sqrt{2}(c_{11}^2+c_{12}^2)} & \frac{1}{\sqrt{2}\rho c} \end{pmatrix}$$

Le calcul des produits $(M\tilde{T}_i)$, $(\tilde{T}_i^{-1}M^{-1})$ et $(M\tilde{T}_i)|\tilde{\Delta}|(\tilde{T}_i^{-1}M^{-1})$ peut se faire par la suite numériquement, ainsi que l'inverse de $(\sum_i |B_i|)$.

4.2.3 Opérateur de capture des chocs

Les méthodes de stabilisation présentées aux sections précédentes sont destinées à amortir les oscillations qui peuvent être générées lorsque les nombres de Reynolds ou de Peclet locaux dépassent une certaine valeur, qui dépend de la taille et de la forme de l'élément en question. Ces méthodes sont efficaces pour des solutions suffisamment régulières alors qu'elles sont déficientes lorsqu'il y a de forts gradients comme dans les chocs. Les méthodes de capture de chocs consistent à rajouter un autre amortissement artificiel bien localisé en ces zones. Diverses méthodes sont proposées dans la littérature, surtout pour les méthodes des différences et des volumes finis. En éléments finis, nous citons à titre d'exemple les méthodes proposées par (Lohner et al. [18], Mallet [19], Shakib [20], Le Beau et al. [10]). La méthode que nous proposons consiste à rajouter à la viscosité physique une viscosité artificielle de capture de chocs notée μ_{cc} qui dépend des gradients des flux de convection. Elle est formulée comme suit:

$$\mu_{cc} = \min(C_k \|\tau F_{i,i}^{conv}\| \frac{h}{2}, h \|u\|/2) \zeta(R_h) \tag{4.8}$$

avec C_k un paramètre à ajuster.

Cette viscosité apporte une dissipation supplémentaire de la quantité de mouvement et de l'énergie, sans pour autant modifier l'équation de continuité. Elle est donc élevée aux zones de chocs et pratiquement nulle lorsque la solution est lisse. D' autre part, il est intéressant de voir le comportement asymptotique de μ_{cc} lorsque u tend vers zéro. En effet, $\mu_{cc} < uh^2/(12\mu)$ lorsque $R_h < 3$ et $\mu_{cc} < uh/2$ lorsque $R_h > 3$.

5. Algorithme de résolution

La discrétisation spatio-temporelle du problème variationnel (4.6) conduit à la résolution d'un système d'équations algébriques de la forme:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{V})]\{\mathbf{V}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (5.1)$$

avec $[\mathbf{K}(\mathbf{V})]$ la matrice de rigidité globale (incluant la matrice masse), $\{\mathbf{V}\}$ le vecteur des degrés de liberté et $\{\mathbf{F}\}$ le vecteur source global.

Ce système d'équations comporte plusieurs types de non-linéarités. Certaines sont dues aux termes de convection, d'autres sont reliées à la compressibilité du fluide, alors que des non-linéarités additionnelles sont introduites par la méthode de décentrage utilisée. Dans le cas où on applique la méthode *SUPG*, ou l'opérateur de capture de choc, ces non linéarités sont très sévères si bien qu'il est crucial de bien les résoudre pour espérer une solution stable et qui converge rapidement.

Compte tenu de ses propriétés de convergence, l'algorithme de Newton-Raphson couplé au schéma temporel implicite choisi, peut être efficace pour résoudre ce problème. Cependant dans la présente situation, la mise en oeuvre de la méthode de Newton-Raphson nécessite le calcul des premières variations de toutes les fonctionnelles présentes dans la formulation. Ces expressions analytiques exactes sont ardues à obtenir, spécialement en présence d'une méthode de décentrage. Pour ce faire, nous utilisons une variante de l'algorithme GMRES (Saad-Schultz [21]). La convergence de l'algorithme GMRES est accélérée en utilisant les techniques de préconditionnement.

5.1. Algorithme GMRES non-linéaire

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative, basée sur le développement en série de Taylor du résidu.

Soit à l'itération \mathbf{i} , le vecteur résidu :

$$\mathbf{R}(\mathbf{V}^i) = \{\mathbf{F}\} - [\mathbf{K}(\mathbf{V}^i)]\{\mathbf{V}^i\} \neq 0$$

Nous cherchons $\mathbf{V}^{i+1} = \mathbf{V}^i - \delta\mathbf{V}$ tel que le résidu soit nul à l'itération " $\mathbf{i} + 1$ ". Cette condition amène à la résolution du problème linéaire:

$$[\mathcal{J}(\mathbf{V}^i)]\{\delta\mathbf{V}\} = \mathbf{R}(\mathbf{V}^i) \quad (5.2)$$

où $\mathcal{J} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{V}}$ est la matrice Jacobienne du résidu.

Nous cherchons donc à résoudre le système linéaire (5.2) à chaque itération de l'algorithme et ceci jusqu'à convergence.

L'algorithme Newton-Raphson classique est plutôt coûteux en temps de calcul et encombrant en terme de mémoire requise, puisqu'il exige l'assemblage et la triangularisation de la matrice Jacobienne \mathcal{J} à chaque itération. Pour éviter cet inconvénient, le système linéaire résultant (5.2) est résolu itérativement dans un sous-espace de Krylov. Si on construit l'espace de Krylov, on constate qu'il n'est pas nécessaire de connaître explicitement la matrice \mathcal{J} mais uniquement le résultat de l'action de cette matrice sur des directions \mathbf{Z} . Ainsi le produit $[\mathcal{J}(\mathbf{V})]\{\mathbf{Z}\}$ peut être calculé numériquement par:

$$[\mathcal{J}(\mathbf{V})]\{\mathbf{Z}\} = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{V} + \varepsilon\mathbf{Z}) - \mathbf{R}(\mathbf{V})}{\varepsilon} \tag{5.3}$$

Le coefficient ε doit être choisi judicieusement de manière à fournir une bonne approximation de la dérivée directionnelle tout en évitant les instabilités numériques.

En s'inspirant des travaux de (Johan et al. [22]), nous proposons la définition suivante pour ε :

$$\varepsilon = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\|\mathbf{D}\mathcal{J}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V}\|}} \tag{5.4}$$

avec

$$\mathbf{D}\mathcal{J}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{V} + \sigma\mathbf{V}) - 2\mathbf{R}(\mathbf{V}) + \mathbf{R}(\mathbf{V} - \sigma\mathbf{V})}{\sigma}$$

et $\sigma = 10^{-4}$.

.Calcul du produit $[\mathcal{J}(\mathbf{V})]\{\mathbf{Z}\}$
 Données \mathbf{V} et \mathbf{Z}
 Calculer: ε par l'équation (5.4)
 Calculer: $\mathbf{V} + \varepsilon\mathbf{Z}$
 Calculer: $\mathbf{R}(\mathbf{V} + \varepsilon\mathbf{Z})$
 Calculer: $\mathbf{R}(\mathbf{V})$
 Calculer: $[\mathcal{J}(\mathbf{V})]\{\mathbf{Z}\}$ par l'équation (5.3)

Pour améliorer le taux de convergence de la résolution itérative, nous utilisons une technique classique de préconditionnement où le système (5.2) est transformé sous la forme:

$$(\mathbf{D}_-^{-\frac{1}{2}} \mathcal{J} \mathbf{D}_+^{-\frac{1}{2}}) \mathbf{D}_+^{\frac{1}{2}} \delta \mathbf{V} = \mathbf{D}_-^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}$$

avec \mathbf{D} la diagonale de la matrice $\mathcal{J}(\mathbf{V})$, $\mathbf{D}_+^{\frac{1}{2}} = |\mathbf{D}|^{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{D}_-^{\frac{1}{2}} = \text{sign}(\mathbf{D})|\mathbf{D}|^{\frac{1}{2}}$.
On note:

$$\tilde{\mathcal{J}} = \mathbf{D}_-^{-1/2} \mathcal{J} \mathbf{D}_+^{-1/2}$$

et

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{D}_-^{-1/2} \mathbf{R}$$

Organigramme détaillé de l'algorithme de résolution

Algorithme de résolution de problèmes non-linéaires,

- 1- Pour chaque pas de temps: $t = t + \delta t$
- 2- Choix d'une solution initiale V_0
 - Calcul du préconditionnement et des matrices $\underline{\tau}$ avec $\mathbf{V} = V_0$
 - Évaluation du paramètre ε par la relation (5.4)
- 3- Itération de Newton-Raphson: $\mathbf{i} = \mathbf{i} + 1$
 - Calcul et assemblage du résidu $\mathbf{R}(\mathbf{V}^{\mathbf{i}})$
 - Résolution du système linéaire (5.2)
 - résolution du système $[\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{V})]\{\delta\mathbf{V}\} = \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{V})$
par l'algorithme GMRES.
 - actualisation de la solution: $\mathbf{V}_{t+\delta t}^{\mathbf{i}+1} = \mathbf{V}_{t+\delta t}^{\mathbf{i}} - \delta\mathbf{V}$
 - calcul des normes de convergence
- 4- Si la norme de convergence globale est atteinte, retour au point 1.
Sinon retour au point 3

Remarquons que dans cet algorithme, le calcul du préconditionnement et des matrices de stabilisation $\underline{\tau}$ se fait une seule fois au début de chaque pas de temps. Ceci permet d'économiser le temps de calcul, sans pour autant affecter la convergence. En général, une seule itération de Newton-Raphson est nécessaire.

6. Résultats numériques

Une première série de tests numériques concernant des écoulements externes de fluides visqueux et non-visqueux autour d'un profil *NACA0012* a été menée pour valider les méthodes décrites précédemment. Le maillage utilisé comporte 8150 éléments. Ce maillage est illustré à la *figure 1*, avec un agrandissement autour du profil *NACA0012* à la *figure 2*.

Écoulement visqueux:

Le premier problème présenté est un écoulement visqueux à $M_\infty = 0.85$ et $Re = 2000$ avec un angle d'incidence nul. La solution initiale utilisée est un champ uniforme, à l'exception de la paroi. La stratégie de résolution consiste à fixer les nombres de Reynolds et de Mach à leurs valeurs maximales et de résoudre le problème sur 200 pas de temps ($\delta t = 0.1$) avec une viscosité artificielle ($C_a = 1$). La solution obtenue sert de champ initial pour la suite des calculs où on annule la viscosité artificielle, en imposant ($C_a = 0$), et on applique la méthode SUPG jusqu'à convergence du schéma temporel. Les courbes d'iso-Mach et d'iso-densité sont présentées aux *figures 3a* et *3b*. Les coefficients de pression ($C_p = 2(p - p_\infty)/(\rho u_\infty^2)$) sur le profil sont comparés à la *figure 3c* avec ceux obtenus par une méthode d'éléments finis utilisant les variables non conservatives (Fortin et al. [9] et Cambier [23]). D'autres tests grands nombres de Reynolds sont présentés dans (Soulaïmani-Fortin [8]).

Écoulement non visqueux

Les équations d'Euler sont maintenant résolues pour $M_\infty = 0.80$ et pour un angle d'incidence de 1.25 degré, ces conditions sont similaires à celles définies dans le (GAMM Workshop [24]). La solution initiale utilisée est un champ uniforme sauf à la paroi où on impose la composante normale de la vitesse à zéro. La stratégie de résolution consiste à utiliser la méthode SUPG et l'opérateur de capture de choc dès le début de la résolution jusqu'à la convergence en temps. Le paramètre C_k a été fixé à 10. Le maillage est identique à celui présenté précédemment. Les courbes d'iso-Mach et d'iso-pression sont présentées aux *figures 4a* et *4b*. On note la présence de deux zones de basse pression suivies de chocs normaux, comme on peut s'y attendre classiquement en écoulement transsonique. La *figure 4c* montre l'évolution du coefficient de pression le long du profil, ces résultats sont comparés à ceux obtenus par (Fortin [25], Barth [26]) avec des schémas de Roe en volumes finis. On note que pour nos résultats les chocs sont bien définis à l'intrados comme à l'extrados. Évidemment, la résolution des chocs peut être encore améliorée en utilisant les méthodes d'adaptation des maillages. Le même problème est en suite traité pour un angle d'attaque de 8.34 degré. Les courbes d'iso-Mach, d'iso-pression et la distribution du coefficient de pression pour ce cas test sont présentées aux *figures 4d*, *4e* et *4f*. On note la présence d'un choc fort à l'extrados.

Écoulement autour d'un demi cylindre

La simulation de cet écoulement a pour objectif la validation des méthodes décrites précédemment dans le cas d'écoulements supersoniques. Le test con-

siste à simuler l'écoulement autour d'un demi cylindre à un nombre de Mach de 3.0 sans angle d'incidence. Le domaine de calcul et les conditions aux limites utilisées sont illustrés à la *figure 5a*. La stratégie de résolution est identique à celle utilisée dans l'exemple précédent. En outre, le maillage a été raffiné au cours de la résolution. Le maillage final comporte 15148 éléments. Le paramètre C_k a été fixé à 10. Les isobares sont présentées à la *figure 5b*, cette figure est très semblable à celle présentée par (Johan et al. [22]). Une coupe des iso-Machs au niveau de la ligne de symétrie est présentée à la *figure 5c*. Il est important de souligner ici que la méthode utilisée pour adapter le maillage avec la solution est basée sur le comportement de μ_{cc} , pour plus de détails on peut consulter (Soulaïmani et al. [27]).

Écoulement dans un système d'admission

La motivation première de cette modélisation est la compétition nord américaine de la formule SAE. L'objectif général du projet est la conception, d'un moteur à aspiration naturelle pour propulser une petite voiture de course de type formule. Le design du système d'admission (voir *figure 6a*) est conçu afin de distribuer uniformément l'air dans les quatre tubes tout en minimisant les pertes de pression. La restriction à l'entrée du système d'admission fut conçue selon le principe du venturi pour réduire les pertes de pression. Ce problème nous a servi pour tester le comportement de notre code de calcul dans le cas d'une géométrie relativement complexe et des conditions aux limites difficiles, aussi il était souhaitable de prédire les modifications à apporter au design initial. Le maillage de cette géométrie et les conditions aux limites sont illustrés à la *figure 6a*. L'atmosphère est représentée par le rectangle entourant l'entrée de la tuyère à la quelle on fixe une pression constante. A la sortie des quatre conduites on fixe un profil de vitesse. En gardant toujours le même maillage (9345 éléments), le nombre de Reynolds a été augmenté graduellement jusqu'à 5000. Les courbes d'iso-pression et les lignes de courant sont présentées aux *figures 6b* et *6c*. L'écoulement dans le système d'admission est schématisé par les vecteurs vitesse, avec un agrandissement à l'entrée (*figure 6d*) et au niveau des quatre tubes (*figure 6e*).

Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'éléments finis pour la résolution des équations de Navier-Stokes et d'Euler utilisant les variables conservatives et une formulation variationnelle SUPG avec un opérateur de capture de chocs. Nous avons particulièrement mis l'accent sur la définition et la mise en oeuvre efficace de la matrice de stabilisation $\underline{\tau}$. L'utilisation de l'algorithme GMRES préconditionné avec une stratégie de résolution adéquate permet d'obtenir une convergence relativement rapide.

Les résultats numériques obtenus jusqu'à présent démontrent que la présente méthode d'éléments finis donne des résultats au moins aussi bons que ceux

obtenus avec d'autres méthodes. Il nous semble cependant qu'il est impératif pour les problèmes de chocs d'utiliser une méthode conservative, l'utilisation des variables conservatives est en effet un ingrédient essentiel. La conservation de la masse au niveau de chaque élément est une autre condition à respecter. Dans nos travaux futurs nous nous intéresserons à cet aspect.

Références

- [1] T.J.R. Hughes and T.E. Tezduyar, Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45 (1984) 217-284.
- [2] T.J.R. Hughes, L.P. Franca and M. Mallet, A new finite element formulation for computational fluid dynamic: I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of the thermodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54 (1986) 223-234.
- [3] O. Pironneau, On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equation. *Num. Math.* 38 (1982) 309-332.
- [4] J. Donea, A Taylor-Galerkin method for conservative transport problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 20 (1984) 101-120.
- [5] A.N. Brooks, T.J.R. Hughes, Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the compressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 (1982) 199-259.
- [6] M.-O. Bristeau, R. Glowinski and J. Périaux, Numerical methods for the Navier-Stokes equations. Applications to the simulation of compressible and incompressible viscous flows, *Computer Physics Report*, 6, North Holland, Amsterdam, (1987) 73-187.
- [7] N.E.E. Elkadri, Modélisation des écoulements compressibles visqueux par la méthode des éléments finis. Mémoire de maîtrise, Université Laval, Québec, Canada (1992).
- [8] A. Soulaïmani and M. Fortin, Finite element solution of compressible viscous flows using conservative variable. To appear in: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [9] M. Fortin, H. Manouzi and A. Soulaïmani, On finite element approximations and stabilization methods for compressible viscous flows. *International Journal of Numerical Methods in fluids*, vol. 17, no 6, (1993) 477-499.
- [10] G.J. Le Beau, S.E. Ray, S.K. Aliabadi and T.E. Tezduyar, SUPG finite element computation of compressible flows with the entropy and conservation

variables formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 104 (1993) 397-422.

[11] M.-O. Bristeau, R. Glowinski, L. C. Dutto, J. Périaux and G. Rogé, Compressible viscous flow calculations using compatible finite element approximations. *International Journal of Numerical Methods in fluids*, 11 (1990) 719-749.

[12] O. Pironneau and J. Rappaz, Numerical analysis for compressible viscous adiabatic stationary flows. *Impact of Computing in Science and Engineering*, Academic Press, Boston, MA, 1, (1989) 109-137.

[13] M. Fortin and A. Soulaïmani, Finite element approximation of compressible viscous flows, *Proc. Compt. Meth. in Flow Analysis*, 2, in H. Niki and M. Kawahara (eds.), Okayama University of Sciences Press, (1988) 951-956.

[14] D.N. Arnold, F. Brezzi and M. Fortin, A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo* 23 (1984), 337-344.

[15] A. Soulaïmani, M. Fortin, Y. Ouellet, G. Dhatt and F. Bertrand, Simple continuous pressure elements for two- and three-dimensional incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62 (1987) 47-69.

[16] F. Brezzi, M.O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet and G. Rogé, A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin Method with bubble functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96 (1992) 117-129.

[17] A. Soulaïmani, Contribution à la résolution numérique des problèmes hydrodynamiques à surface libre. Thèse de Ph.D., Université Laval, 1987.

[18] R. Löhner, K. Morgan and J. Peraire, A simple extension to multidimensional problems of the artificial viscosity due to Lapidus. *Comm. Appl. Numer. Methods*, 1 (1985) 141 - 147.

[19] M. Mallet, "A finite element method for computational fluid dynamics," Ph.D. Thesis, Division of Applied Mechanics, Stanford University, CA, 1985.

[20] F. Shakib, "Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations," Ph.D. Thesis, Division of Applied Mechanics, Stanford University, CA, 1989.

[21] Y. Saad and M. H. Schultz, GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 7 (1986) 856-869.

[22] Z. Johan, T.J.R. Hughes and F. Shakib, A globally convergent matrix-free algorithm for implicit time-marching schemes arising in finite element analysis in fluids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 87 (1991) 281-304.

- [23] L. Cambier, Computation of Viscous Transonic Flows Using an Unsteady Type Method and a Zonal Grid Refinement Technique, O.N.E.R.A, France, (1985).
- [24] A. Rizzi and H. Viviand editors, Numerical methods for the computation of inviscid transonic flows with shock waves, a GAMM-Workshop. Volume 3 of notes on numerical fluid mechanics, Vieweg Verlag, 1981.
- [25] F. Fortin, Simulation d'écoulements compressibles non-visqueux et visqueux par les méthodes de fractionnement des flux. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, 1991.
- [26] T. J. Barth. Computational fluid dynamics, on unstructured grids and solvers. von Karman Institute for fluid dynamics, NASA Ames Research Center, USA, Lecture Series 1990-03, March 5-9, 1990.
- [27] A. Soulaïmani, D. Chassé and L. Lamarche, Simple adaptive mesh method for compressible flows. Accepted for the Eleventh Canadian Symposium on Fluid Dynamics, Edmonton, 1994.

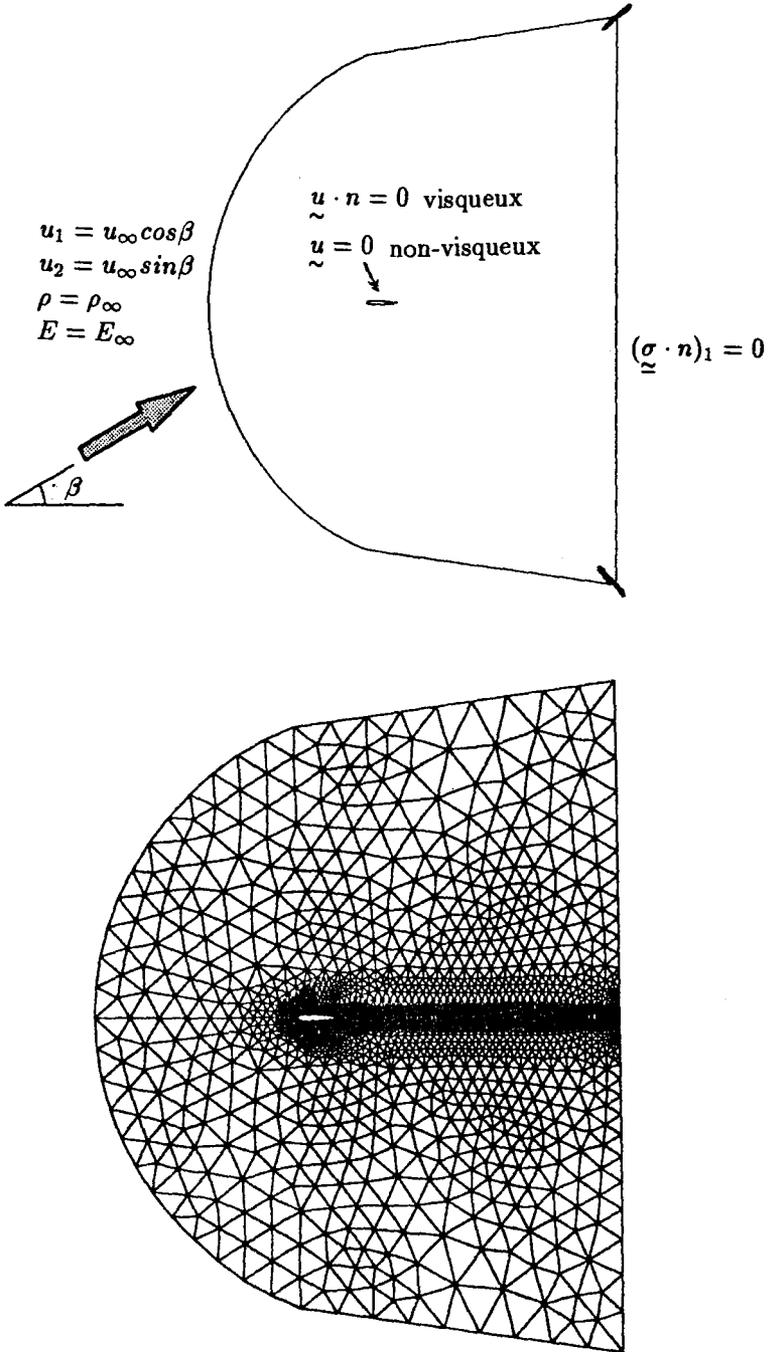


figure 1: Maillage sur tout le domaine.

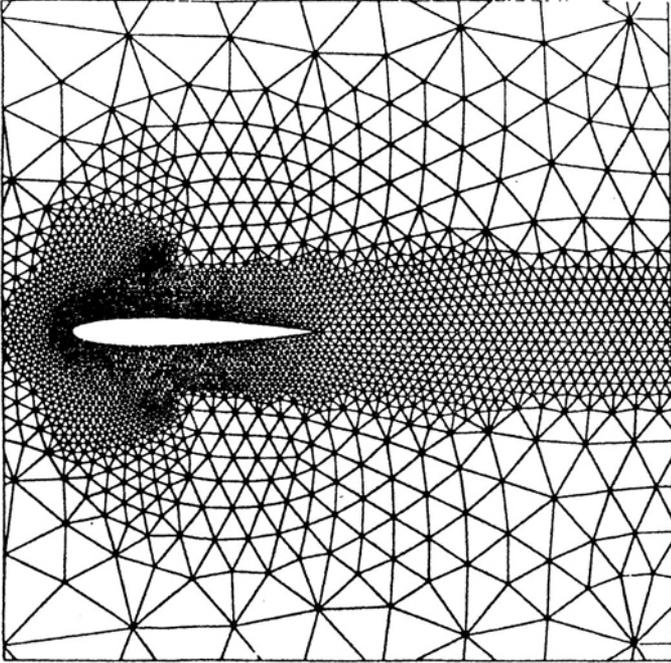


figure 2: Maillage autour du profil *NACA0012*.

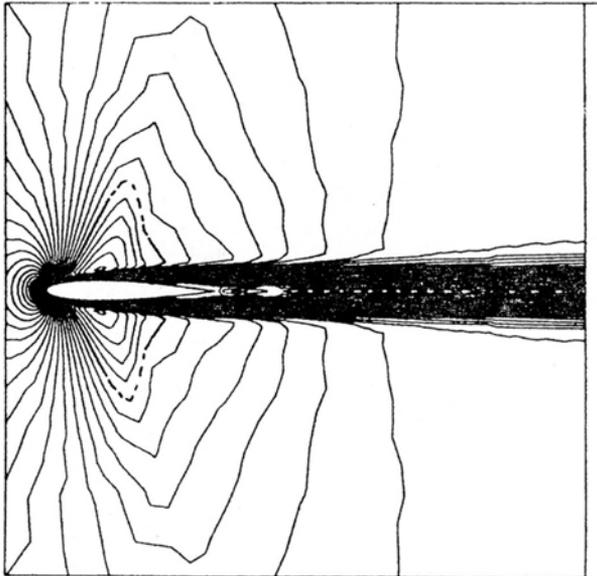


figure 3a: Écoulement visqueux, lignes d'iso-Mach,
 $M_\infty = 0.85$, $Re = 2000$, $\beta = 0$ deg.

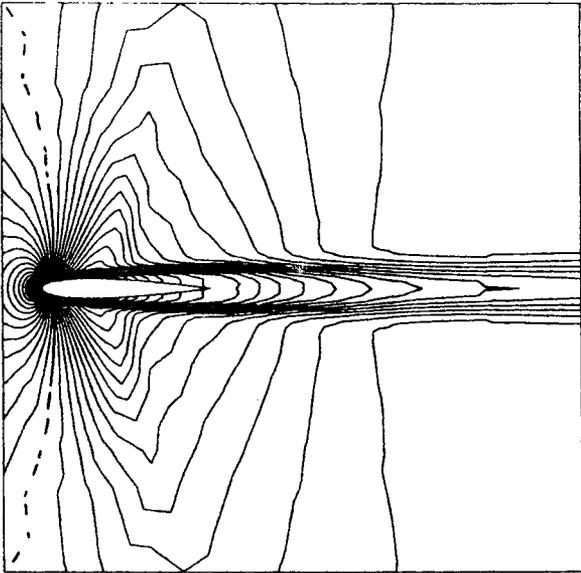


figure 3b: Écoulement visqueux, lignes d'iso-densité,
 $M_\infty = 0.85$, $Re = 2000$, $\beta = 0$ deg.

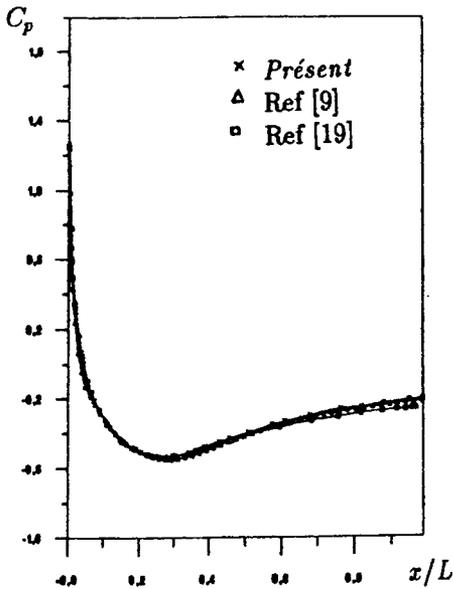


figure 3c: Écoulement visqueux, distribution du coefficient de pression,
 $M_\infty = 0.85$, $Re = 2000$, $\beta = 0$ deg.

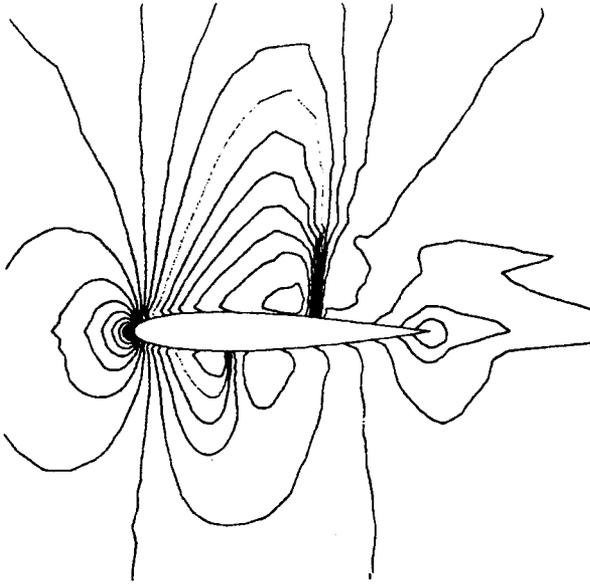


figure 4a: Écoulement non-visqueux, lignes d'iso-Mach,
 $M_\infty = 0.80$, $\beta = 1.25$ deg.

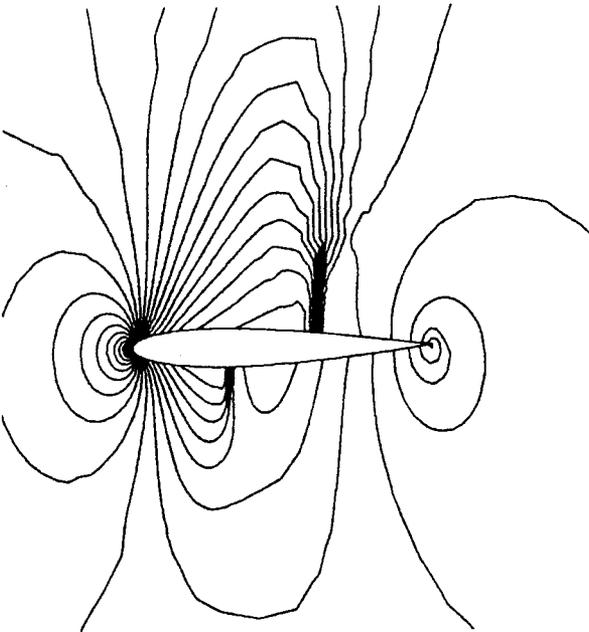


figure 4b: Écoulement non-visqueux, lignes d'iso-pression,
 $M_\infty = 0.80$, $\beta = 1.25$ deg.

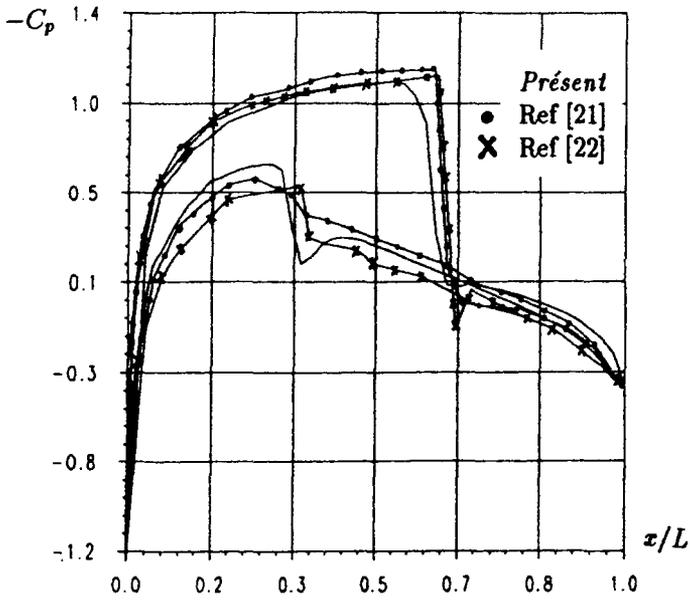


figure 4c: Écoulement non-visqueux, distribution du coefficient de pression, $M_\infty = 0.80$, $\beta = 1.25$ deg.

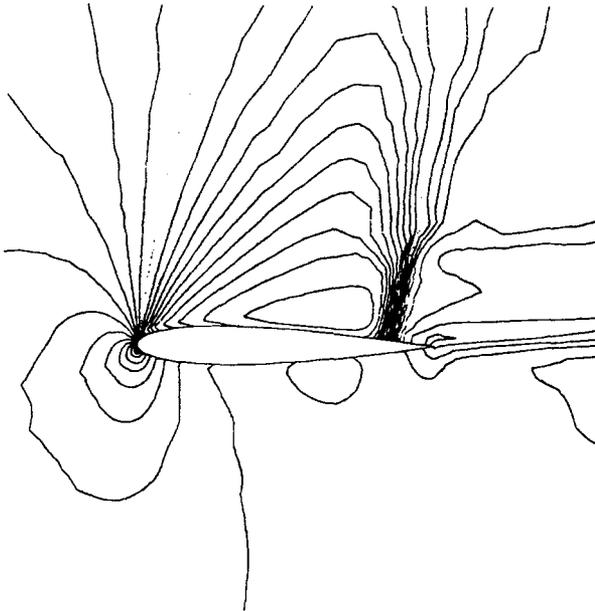


figure 4d: Écoulement non-visqueux, lignes d'iso-Mach, $M_\infty = 0.80$, $\beta = 8.34$ deg.

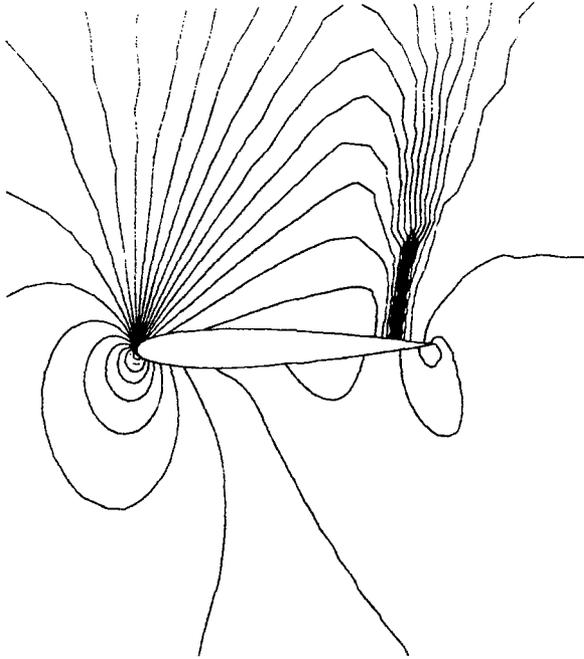


figure 4e: Écoulement non-visqueux, lignes d'iso-pression,
 $M_\infty = 0.80$, $\beta = 8.34$ deg.

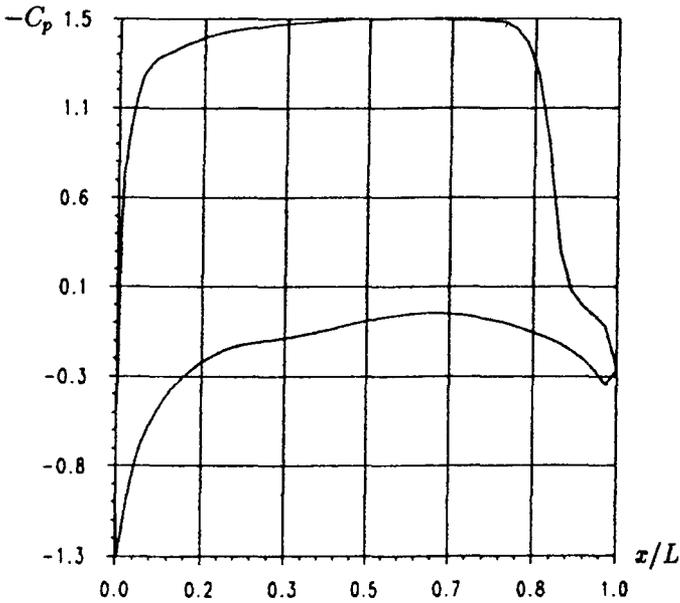


figure 4f: Écoulement non-visqueux, distribution du coefficient de pression,
 $M_\infty = 0.80$, $\beta = 8.34$ deg.

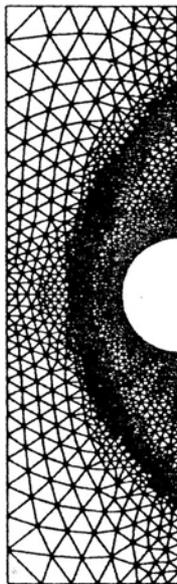
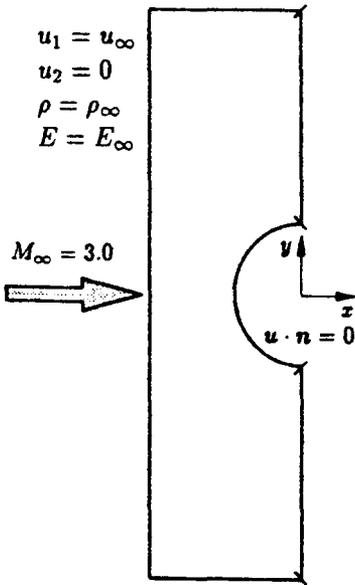


figure 5a: Maillage autour du demi cylindre.

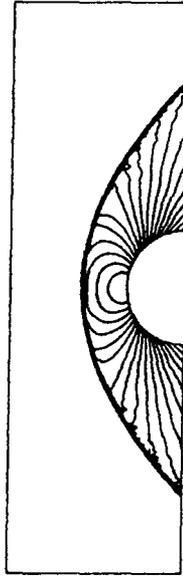


figure 5b: Écoulement non-visqueux, lignes d'iso-pression,
 $M_\infty = 3.0$, $\beta = 0$ deg.

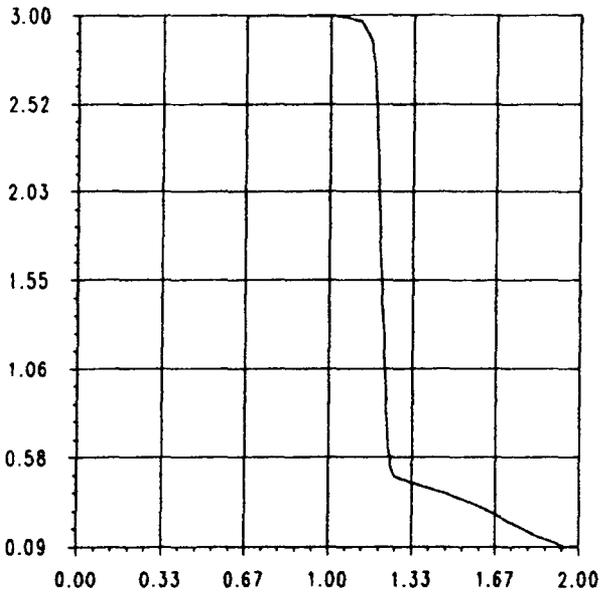


figure 5c: Écoulement non-visqueux, coupe d'iso-Mach au niveau de
la ligne de symétrie, $M_\infty = 3.0$, $\beta = 0$ deg.

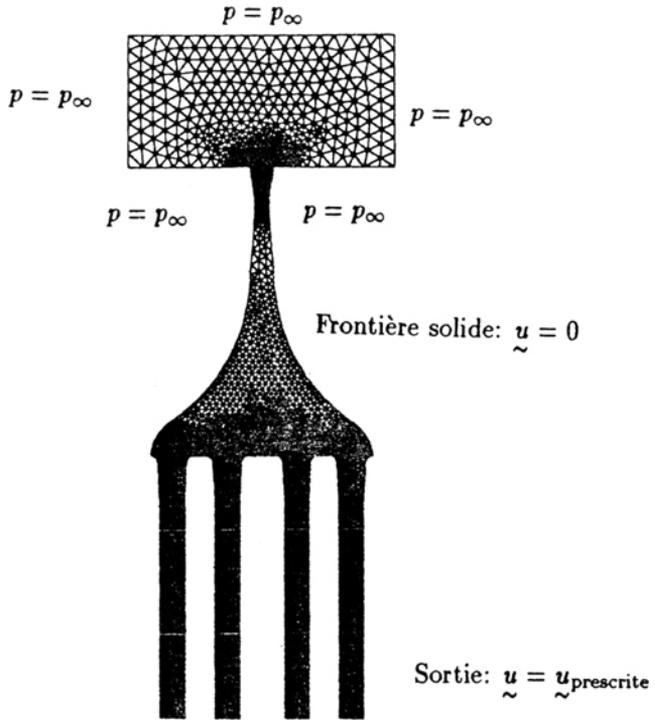


figure 6a: Système d'admission, design, maillage et conditions aux limites.

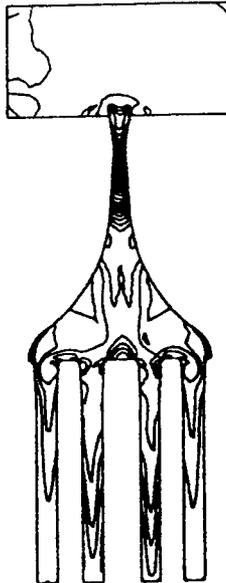


figure 6b: Écoulements visqueux, lignes d'iso-pression, $R_e = 5000$.

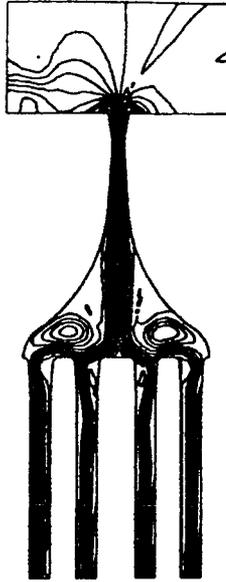


figure 6c: Écoulement visqueux, lignes de courant,
 $R_e = 5000$.

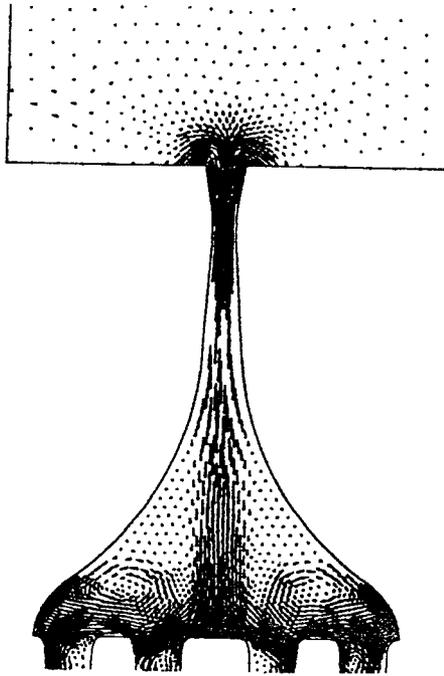


figure 6d: Détails de l'écoulement à l'entrée du système d'admission.
Vecteurs vitesse, $R_e = 5000$.

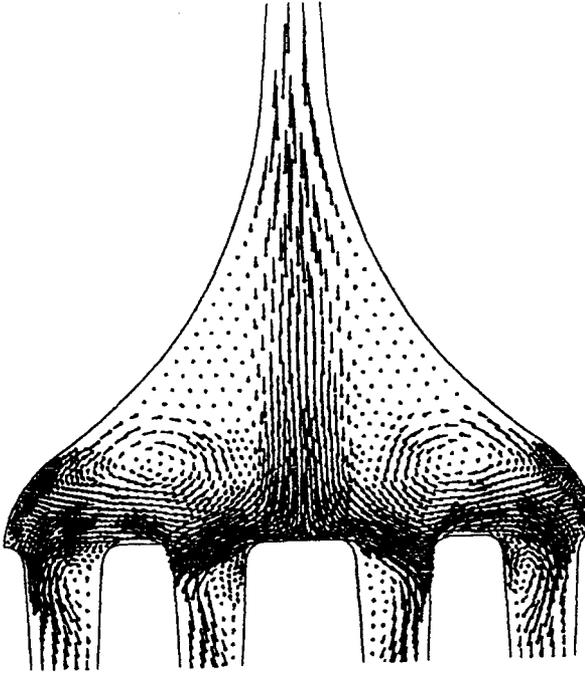


figure 6e: Système d'admission, écoulement au niveau des quatres tubes, Vecteurs vitesse, $R_e = 5000$.