

---

# Modélisation bidimensionnelle des cylindres fortement raidis

Stéphane Chapuliot — Alain Combescure

CEN Saclay  
DEMT/SEMT/LAMS  
91190 Gif-sur-Yvette

---

**RÉSUMÉ.** Une méthode de calcul pour les coques cylindriques fortement raidies axialement est présentée. Ce type de coque comporte un petit nombre de raidisseurs à forte section et par conséquent sont soumises à un flambage local. L'originalité de la méthode est de traiter ce genre de problème par un calcul bidimensionnel associé à une décomposition en série de Fourier des inconnues, beaucoup plus rapide que le calcul tridimensionnel. La coque raidie est considérée comme une coque bicouche : une couche isotrope représente la coque et une couche orthotrope équivalente représente la famille de raidisseurs. On calcule alors la contribution à la raideur globale des raidisseurs, par intégration identique à celle utilisée pour la coque le long de la génératrice du cylindre, mais de façon discrète le long de la circonférence. La méthode est programmée dans le code INCA du système CASTEM et permet le calcul de flambage de structures avec défauts dans le domaine élastique, mais aussi dans le domaine plastique grâce à un critère seuil global. Elle est validée par une comparaison avec des résultats de calcul tridimensionnels de flambage non linéaire d'un silo reposant sur pieds.

**ABSTRACT.** A numerical method for strongly axially stiffened shells is presented. This type of shell is reinforced by a few number of stiffeners with an important section, so consequently are vulnerable to local buckling. The originality of our method is to solve the problem by a bidimensionnal calculation associated with a Fourier development. The stiffened shell is consider as a multi-layer shell : one layer represents the shell and another orthotropic one the stiffeners family. Then we calculate the stiffness contribution of each layer by a classical axial integration and a discret circumferencial integration for the stiffeners. This numerical method is introduced in the INCA code of CASTEM system and used for the buckling of imperfect shells in the elastic field and also in the plastic field with a global yield criterion. It's compared with the elasto-plastic results of a tridimensionnal calculation on the buckling of a silo on column support.

**MOTS-CLÉS :** coque raidie, flambage, homogénéisation, intégration discrète, plasticité.  
**KEY WORDS :** stiffened shell, buckling, smeared technic, discret integration, plasticity.

---

## Introduction

L'objectif de cet article est de présenter une méthode de calcul bidimensionnelle pour les coques fortement raidies. Il complète l'étude déjà présentée (CHA 1) des coques utilisées dans l'aéronautique, qui sont à l'opposé raidies par un grand nombre de faibles raidisseurs.

Nous nous intéressons maintenant aux structures plus imposantes utilisées dans l'industrie offshore ou la construction métallique. Ces coques comportent un petit nombre de raidisseurs à fortes sections, des défauts importants, des contraintes résiduelles... Elles seront donc dans la plupart des cas sensibles à une instabilité locale : une étude axisymétrique n'est plus possible.

Pour garder les avantages du calcul bidimensionnel, une méthode de calcul basée sur la théorie de Marguère et Debongnie (DEB 4) est présentée. La structure cylindrique est définie par une seule génératrice avec une décomposition en série de Fourier des inconnues le long de la circonférence. La matrice de raideur de la structure sera calculée avec, pour la famille de raidisseur, une intégration discrète. La raideur des renforts ne se trouve plus répartie sur toute la circonférence, mais concentrée sur une famille de génératrices.

Nous garderons comme matrice de rigidité équivalente, celle obtenue par homogénéisation et comme fonction seuil, celle définie de façon globale pour les coques à matériaux écrouissables (CHA 1).

La méthode de calcul est introduite dans le code INCA du système CASTEM grâce à de nouveaux éléments COMAR. Ils sont utilisés pour calculer la charge critique d'un silo reposant sur quatre pieds présenté par Guggenberger (GUG 5).

## 1. Formulation générale

Nous étudions dans cet article le cas d'un cylindre renforcé par  $n$  raidisseurs axiaux régulièrement espacés. Notre modèle considère ce cylindre, de la même façon qu'il considère les cylindres nervurés (CHA 1), comme un coque multicouche avec une couche isotrope et une couche orthotrope équivalente. Nous gardons toutes les hypothèses faites sur les champs de déplacements et contraintes des poutres modélisant les renforts.

Dans le domaine non linéaire, nous utiliserons le même critère de plasticité intégré initialement défini par Ilyushin (ILY 6) puis modifié pour prendre en compte l'écrouissage des matériaux. L'écoulement est calculé non pas en un point car la structure n'est plus ou n'a plus un comportement axisymétrique, mais en chaque raidisseur. On détermine la stabilité plastique de la structure en évaluant sa raideur tangente couche par couche à partir de l'état de contrainte et de la valeur de la déformation plastique équivalente en chaque point.

La modélisation que nous allons mettre en place est la même que pour l'élément COMU du code INCA (COM 2), à la différence près qu'il y aura intégration discrète le long de la circonférence du cylindre et non continue. Ainsi la rigidité du renfort se trouve concentrée sur une seule génératrice au lieu d'être étalée sur toute la surface du cylindre. Une validation par comparaison entre les calculs tridimensionnels de Guggenberger (GUG 5) et nos calculs bidimensionnels sur le flambage plastique d'un silo reposant sur quatre pieds est présentée en fin d'article.

### 1.1. Notations

Un point courant du cylindre est caractérisé par ses trois coordonnées, le rayon  $r$  ( $r$  est égal au rayon du cylindre moyen car sa peau est mince), la coordonnée verticale  $z$  et la position angulaire  $\theta$ . On définit en ce point les vecteurs unitaires du plan tangent :

- $s$  tangent à la coque pour  $\theta$  constant,
- $t$  tangent à la coque pour  $z$  constant.

Le déplacement  $\{q\}$  en chaque point est caractérisé par quatre composantes qui seront par la suite décomposées en séries de Fourier :  $\{q\}^T = \{w, u, v, \beta\}$

où

- $w$  représente le déplacement normal à la coque,
- $u$  le déplacement axial tangentiel,
- $v$  le déplacement circonférenciel tangentiel,
- $\beta$  la rotation de la coque autour du vecteur  $t$ .

La décomposition nous donnera les harmoniques notées  $\{q_i\}^T = \{w_i, u_i, v_i, \beta_i\}$  et ainsi nous calculerons le déplacement total du point  $M$  par :

$$\{q\} = \sum_{i_H} \left\{ \begin{array}{l} w_{i_H} \cdot \cos(i_H \cdot \theta) \\ u_{i_H} \cdot \cos(i_H \cdot \theta) \\ v_{i_H} \cdot \sin(i_H \cdot \theta) \\ \beta_{i_H} \cdot \cos(i_H \cdot \theta) \end{array} \right\} \quad (1)$$

( $i_H$  représente les harmoniques choisies pour la décomposition). La structure comporte un défaut noté  $\{d\}$ , déplacement entre la structure parfaite et imparfaite, qui est de la même façon que le champ de déplacement décomposé en série de Fourier. Nous supposons que  $\{q\}$  est petit face à  $\{d\}$ .

### 1.2. Champs de déformations

La déformation linéaire est calculée à partir des déplacements de la coque :

$$\varepsilon^L(\{q\}) = \frac{1}{2}(\nabla^T\{q\} + \nabla\{q\}) \quad (2)$$

L'opérateur gradient  $\nabla$  étant exprimé sur la structure parfaite. Dans le cas d'un cylindre les déformations linéaires de membrane et flexion sont définies par Zienkiewich (ZIE 7) :

$$\text{Déformations de membrane : } \{\varepsilon\} = \begin{cases} \varepsilon_s = \partial u / \partial s \\ \varepsilon_\theta = w / r + \partial v / (r \cdot \partial \theta) \\ \varepsilon_{s\theta} = \partial u / (r \cdot \partial \theta) + \partial v / \partial s \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Déformations de flexion : } \{\chi\} = \begin{cases} \chi_s = -\partial^2 w / \partial s^2 \\ \chi_\theta = \frac{1}{r^2}(-\partial^2 w / \partial \theta^2 + \partial v / \partial \theta) \\ \chi_{s\theta} = \frac{2}{r}(-\partial^2 w / \partial s \partial \theta + \partial v / \partial s) \end{cases} \quad (4)$$

Etant donné que nous avons décomposé le déplacement total, il nous faut calculer la déformation de chaque harmonique. Les inconnues  $u_i, v_i, w_i$  et  $\beta_i$  ne sont fonction que de l'abscisse curviligne  $s$  le long de la génératrice, nous aurons donc :

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i_H} \begin{Bmatrix} \partial u_{i_H} / \partial s \cdot \cos(i_H \cdot \theta) \\ (w_{i_H} / r + i_H \cdot v_{i_H} / r) \cdot \cos(i_H \cdot \theta) \\ (-i_H \cdot u_{i_H} / r + \partial v_{i_H} / \partial s) \cdot \sin(i_H \cdot \theta) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\{\chi\} = \sum_{i_H} \begin{Bmatrix} \partial^2 w_{i_H} / \partial s^2 \cdot \cos(i_H \cdot \theta) \\ (i_H^2 \cdot w_{i_H} / r^2 + i_H \cdot \partial v_{i_H} / r^2) \cdot \cos(i_H \cdot \theta) \\ 2 \cdot (i_H \cdot \partial w_{i_H} / (r \cdot \partial s) + \partial v_{i_H} / (r \cdot \partial s)) \cdot \sin(i_H \cdot \theta) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

La déformation quadratique du cylindre est calculée par :

$$\varepsilon^q(\{q\}, \{q\}) = \frac{1}{2} (\nabla^T \{q\} \times \nabla \{q\}) \quad (7)$$

Pour le genre de coque que nous étudions, il est raisonnable de supposer que seules les déformations de membranes sont non linéaires (COM 3). Les expressions de celles-ci sont données par :

$$\{\varepsilon^q\} = \begin{cases} \varepsilon_s^q = \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta^q = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{s\theta}^q = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial w}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \end{cases} \quad (8)$$

De la même façon que pour la déformation linéaire, la déformation quadratique est calculée à partir des déformations de chaque harmonique.

On peut montrer (COM 3) que les déformations linéaires et quadratiques peuvent se mettre sous la forme matricielle en fonction des déplacements aux nœuds :

$$\begin{cases} \varepsilon^L(\{q\}) = [B] \cdot \{Q\} \\ \varepsilon^q(\{q\}, \{q'\}) = [A(\{q'\})] \cdot [G] \cdot \{Q\} \end{cases} \quad (9)$$

où  $[B]$  est l'opérateur gradient symétrique,  $[A]$  et  $[G]$  sont deux opérateurs linéaires. L'expression de ces trois matrices est donnée par (COM 3).

## 2. Matrice de rigidité

Nous reprenons comme matrice de rigidité pour chaque couche, les matrices définies pour les coques nervurées (CHA 1). Celle de la coque est la matrice des plaques de Love-Kirchhoff, la relation entre efforts et déformations s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h \cdot [G] & [0] \\ [0] & \frac{h^3}{12} \cdot [G] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} \text{ avec } [G] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

La matrice de rigidité de la famille de raidisseur est celle de la couche orthotrope équivalente obtenue par homogénéisation. La relation entre efforts et déformations s'écrit (11) :

$$\begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{b} & 0 & 0 & g \cdot \frac{EA}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{GA_r}{b} & 0 & 0 & g \frac{GA_r}{b} \\ & & & g^2 \frac{EA}{b} + \frac{EI}{b} & 0 & 0 \\ & (Sym.) & & & 0 & 0 \\ & & & & & g^2 \frac{GA_r}{4b} + \frac{GJ}{4b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix}$$

A, A<sub>r</sub>, I et J sont les caractéristiques géométriques de la section, g l'excentrement du centre de la section par rapport au plan moyen de la coque, b la longueur d'arc du cylindre moyen entre deux raidisseurs, E et G les modules de Young et Coulomb du matériau. Nous ne considérerons, pour utiliser par la suite notre loi de comportement plastique intégrée, que les sections rectangulaires. Si ce n'est pas le cas il faudra décomposer la section en rectangles qui formeront des couches orthotropes indépendantes.

### 3. Matrice de raideur élastique linéaire

La matrice de raideur élastique de la structure est calculée par une méthode énergétique en calculant séparément la raideur de chaque couche. Elle seront additionnées par la suite. Nous ne présenterons ici que le calcul de la raideur de la couche orthotrope (élément COMAR), celle de la coque est définie par l'élément COMU (COM 2) (seule change l'intégration circonférencielle qui est discrète pour l'élément COMAR), dans un premier temps le cas d'une coque parfaite.

L'énergie de déformation de la couche orthotrope s'exprime en fonction de sa matrice de raideur et des déplacements nodaux par :

$$E = \{Q\}^T \cdot [K] \cdot \{Q\} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \{\epsilon\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \cdot d\theta \cdot dz \quad (12)$$

( $\Omega$  représente la totalité de la surface du cylindre). Nous avons pour notre cylindre un nombre  $n$  de raidisseurs régulièrement espacés de  $b = 2\pi r / n$ . Nous allons séparer les intégrations suivant  $z$  et  $\theta$ , l'intégration suivant  $\theta$  étant décomposée en  $n$  intégrations sur des intervalles de longueur  $b$ . L'énergie de déformation devient :

$$E = \int_z \left( \sum_{k=1}^n \left( b \cdot \int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2\pi k}{n}} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} d\theta \right) \right) dz \quad (13)$$

( $z$  représente la mesure de la génératrice  $\theta=0$  du cylindre,  $n$  est le nombre de raidisseurs). Nous considérons que la rigidité du  $k^{\text{ième}}$  raidisseur se trouve concentrée sur une génératrice du cylindre de position angulaire  $\theta_k$ . Etant donné qu'ils sont régulièrement espacés, nous aurons :

$$\theta_k = \theta_y + \frac{2\pi \cdot (k-1)}{n} \quad (14)$$

$\theta_y$  représente la position angulaire du premier raidisseur. L'énergie de déformation devient alors :

$$E = b \cdot \int_z \left( \sum_{k=1}^n \begin{Bmatrix} \{\varepsilon(\theta_k)\} \\ \{\chi(\theta_k)\} \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \{N(\theta_k)\} \\ \{M(\theta_k)\} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (15)$$

Nous posons :

$$\{Q\}^T = \left\{ \{Q_0\}^T \quad \dots \quad \{Q_{i_H}\}^T \quad \dots \right\} \quad (16)$$

vecteur ligne de tous les déplacements modaux aux nœuds et

$$[B] = \left[ [B_0] \quad \dots \quad [B_{i_H}^c] \cdot \cos(i_H \cdot \theta) + [B_{i_H}^s] \cdot \sin(i_H \cdot \theta) \quad \dots \right] \quad (17)$$

opérateur de gradient symétrique. En exprimant les efforts de la couche en fonction des déformations grâce à la matrice de rigidité homogénéisée, nous pouvons exprimer l'énergie par :

$$E = b \cdot \{Q\}^T \cdot \int_z \left( \sum_{k=1}^n [B(\theta_k)]^T \cdot [D] \cdot [B(\theta_k)] \right) dz \cdot \{Q\} \quad (18)$$

Nous pouvons alors donner l'expression de la matrice de raideur de la couche, par substitution avec la formule (12), qui aura la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{00}] & \dots & [K_{0i}] & \dots & [K_{0j}] & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & [K_{ii}] & \dots & [K_{ij}] & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ (Sym.) & & & & [K_{jj}] & \dots \\ & & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (19)$$

avec :

$$\begin{aligned} [K_{00}] &= b \cdot \int_z \left( \sum_{k=1}^n [B_0]^T \cdot [D] \cdot [B_0] \right) \cdot dz \\ [K_{0i}] &= b \cdot \int_z \left( \sum_{k=1}^n [B_0]^T \cdot [D] \cdot [B_i(\theta_k)] \right) \cdot dz \\ [K_{ij}] &= b \cdot \int_z \left( \sum_{k=1}^n [B_i(\theta_k)]^T \cdot [D] \cdot [B_j(\theta_k)] \right) \cdot dz \end{aligned} \quad (20)$$

(avec  $i, j = 0 \dots i_H \dots$ ). Comme nous pouvons le voir, les variables de ces intégrales sont séparables. Les sommations suivant  $\theta$  et  $z$  sont donc faites chacune de leur côté. Pour cela nous posons : ( $\alpha, \beta = c$  ou  $s$ )

$$\begin{aligned} [k_{00}] &= \int_z [B_0]^T \cdot [D] \cdot [B_0] \cdot dz \\ [k_{0i}^\alpha] &= \int_z [B_0]^T \cdot [D] \cdot [B_i^\alpha] \cdot dz \\ [k_{ij}^{\alpha\beta}] &= \int_z [B_i^\alpha]^T \cdot [D] \cdot [B_j^\beta] \cdot dz \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} S_0 &= n \cdot b = 2\pi \cdot r, \quad S_i^c = b \cdot \sum_{k=1}^n \cos(i\theta_k), \quad S_i^s = b \cdot \sum_{k=1}^n \sin(i\theta_k), \\ S_{ij}^{cc} &= b \cdot \sum_{k=1}^n \cos(i\theta_k) \cdot \cos(j\theta_k), \quad S_{ij}^{cs} = b \cdot \sum_{k=1}^n \cos(i\theta_k) \cdot \sin(j\theta_k), \\ \text{et } S_{ij}^{ss} &= b \cdot \sum_{k=1}^n \sin(i\theta_k) \cdot \sin(j\theta_k) \end{aligned} \quad (22)$$



Les matrices  $[K_{ij}]$  peuvent maintenant s'écrire :

$$\begin{aligned} [K_{00}] &= S_0 \cdot [k_{00}] , [K_{0i}] = S_i^c \cdot [k_{0i}^c] + S_i^s \cdot [k_{0i}^s] \\ \text{et } [K_{ij}] &= S_{ij}^{cc} \cdot [k_{ij}^{cc}] + S_{ij}^{sc} \cdot [k_{ij}^{sc}] + S_{ij}^{cs} \cdot [k_{ij}^{cs}] + S_{ij}^{ss} \cdot [k_{ij}^{ss}] \end{aligned} \quad (23)$$

Il nous faut maintenant calculer analytiquement les sommes de produits sinus-cosinus pour déterminer la forme finale de la matrice de raideur de la couche. En décomposant les produits nous pouvons exprimer les sommes en fonction de deux sommes simples :

$$C_a = b \cdot \sum_{k=1}^n \cos(a \cdot \theta_k) \quad \text{et} \quad S_a = b \cdot \sum_{k=1}^n \sin(a \cdot \theta_k) \quad (24)$$

On montre que s'il existe un entier  $m$ , positif négatif ou nul, tel que  $a = m \cdot n$ , alors  $C_a = n \cdot b$ , sinon  $C_a = 0$ .  $S_a$  est nul dans tous les cas. Ainsi nous obtenons les valeurs des différentes sommes :

$$\begin{aligned} S_i^c &= C_i \cdot \cos(i \cdot \theta_y) , \quad S_i^s = C_i \cdot \sin(i \cdot \theta_y) \\ S_{ij}^{cc} &= \frac{C_{i-j}}{2} \cdot \cos((i-j) \cdot \theta_y) + \frac{C_{i+j}}{2} \cdot \cos((i+j) \cdot \theta_y) \\ S_{ij}^{cs} &= \frac{C_{i-j}}{2} \cdot \sin((i-j) \cdot \theta_y) + \frac{C_{i+j}}{2} \cdot \sin((i+j) \cdot \theta_y) \\ S_{ij}^{ss} &= \frac{C_{i-j}}{2} \cdot \cos((i-j) \cdot \theta_y) - \frac{C_{i+j}}{2} \cdot \cos((i+j) \cdot \theta_y) \end{aligned} \quad (25)$$

Comme nous pouvons le voir, la matrice de raideur de la couche orthotrope dépend du nombre de raidisseurs et des modes choisis pour la décomposition en série de Fourier des inconnues. Si  $n$  est important, comme c'est le cas des structures aéronautiques que nous avons vues dans l'article (CHA 1), tous les termes  $c_a$  sont nuls sauf pour  $a=0$  (si on ne prend que les premières harmoniques pour la décomposition). La matrice de raideur sera alors de la même forme que celle qui serait obtenue par l'homogénéisation classique : seuls les blocs  $[K_{00}]$  et  $[K_{ij}]$  apparaissant sur la diagonale de la matrice de raideur ne sont pas nuls.

Quand les blocs hors diagonale  $[K_{0i}]$  ou  $[K_{ij}]$  ne sont pas nuls, le cas des structures fortement raidies, il apparaît une interaction entre les différents modes. Ainsi une action sur le mode  $i$  provoquera une réaction sur le mode  $j$ , ce qui n'est pas le cas des coques nervurées. Ainsi un cylindre parfait raidi par 4 raidisseurs soumis à une compression parfaitement axiale subira des déplacements de mode 4,8, ... qui ne sont pas axisymétriques.

#### 4. Prise en compte des défauts.

Comme dans la partie précédente, nous allons déterminer la matrice de raideur de la couche équivalente par une méthode énergétique, l'intégration axiale se faisant de façon continue et l'intégration circonférentielle de façon discrète.

L'expression de la déformation élastique totale dans le cas des coques quasi-axisymétriques est, étant donné que le déplacement est faible face aux défauts :

$$\varepsilon = \varepsilon^L(\{q\}) + \varepsilon^q(\{q\}, \{d\}) + \varepsilon^q(\{d\}, \{q\}) + \varepsilon^q(\{q\}, \{q\})$$

ou en fonction des déplacements nodaux,

$$\varepsilon = ([B] + [A(\{d\})][G])\{Q\} \tag{26}$$

Nous pouvons donc, en suivant le même chemin que pour la coque parfaite, exprimer l'énergie de déformation de la coque par (27) :

$$E = b \cdot \{Q\}^T \cdot \int_z \left( \sum_{k=1}^n ([B] + [A(\{d\})][G])^T \cdot [D] \cdot ([B] + [A(\{d\})][G]) \right) dz \cdot \{Q\}$$

De la même façon que l'opérateur divergence [B], les matrices [A] et [G] peuvent s'exprimer sous la forme d'harmoniques de Fourier. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} [G] &= \left[ [G_0] \quad \dots \quad [G_{i_H}^c] \cdot \cos(i_H \cdot \theta) + [G_{i_H}^s] \cdot \sin(i_H \cdot \theta) \quad \dots \right] \\ [A] &= \sum_{i_D} \left( [A_{i_D}^c] \cdot \cos(i \cdot \theta) + [A_{i_D}^s] \cdot \sin(i \cdot \theta) \right) \end{aligned} \tag{28}$$

où  $i_D$  représente les modes de Fourier choisis pour modéliser le défaut.  $i_D$  est différent de zéro car les défauts axisymétriques sont directement définis par le maillage. Nous pouvons alors séparer les variables de l'intégration de la matrice de raideur en une partie suivant z continue de types

$$\begin{aligned} &\int_z [B_i^\alpha]^T \cdot [D] \cdot [B_j^\beta] \cdot dz, \\ &\int_z [B_i^\alpha]^T \cdot [D] \cdot ([A_j^\beta] \cdot [G_k^\gamma]) \cdot dz, \\ &\int_z ([A_i^\alpha] \cdot [G_j^\beta])^T \cdot [D] \cdot [B_k^\gamma] \cdot dz, \\ \text{ou } &\int_z ([A_i^\alpha] \cdot [G_j^\beta])^T \cdot [D] \cdot ([A_k^\gamma] \cdot [G_l^\delta]) \cdot dz \end{aligned} \tag{29}$$

et en sommes de produits sinus-cosinus

$$b \cdot \sum_{k=1}^n \left( \prod_{v=1}^u cs(i_v \cdot \theta_k) \right) \tag{30}$$

(avec  $i, j, k, l, i_v = 0 \dots i_H \dots$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta = c$  ou  $s$ ;  $u = 2 \dots 4$ ;  $cs = \sin$  ou  $\cos$ ). Comme dans l'intégration précédente les produits définis ci-dessus peuvent se rapporter par développement à des sommations simples  $C_a$  et  $S_a$ . L'intégration circonférencielle se fait encore de façon analytique simple connaissant les harmoniques du défaut et du champ de déplacement.

Une fois les deux intégrations effectuées, nous obtenons la matrice de raideur associée à la couche orthotrope. Du fait de la multiplication des produits sinus-cosinus avec l'apparition du défaut, de nombreuses interactions nouvelles seront créées. Dans le cas courant, si l'on introduit un défaut de mode  $m$ , il faut, pour obtenir une réponse correcte, prendre en compte les harmoniques  $m$ ,  $2m$  et  $3m$  dans la décomposition. Si en plus la structure comporte  $p$  raidisseurs, il faudra au moins prendre les harmoniques  $p$ ,  $2p$ ,  $3p$  plus les éventuels modes interagissant avec le défaut, ce qui nous fait au minimum 7 modes avec le mode 0. Il faut donc rester raisonnable quant à l'utilisation des défauts et ne pas les exprimer par trop d'harmoniques, sinon le calcul devient vite imposant.

## 5. Comportement élastoplastique

Le critère que nous utilisons pour étudier le comportement non linéaire des coques et des raidisseurs est le même que celui utilisé pour les coques nervurées (CHA 1). Il a été initialement créé par Ilyushin pour les coques élastoplastiques parfaites puis modifié pour prendre en compte l'écroutissement des matériaux. Il est maintenant fonction des six contraintes généralisées de coque  $\{N\}$ ,  $\{M\}$  et d'une déformation plastique équivalente  $\zeta$  proportionnelle au travail des déformations plastiques totales. Il s'écrit :

$$f = \frac{\bar{N}}{N_0^2} + \frac{s}{\gamma\sqrt{3}} \cdot \frac{\overline{NM}}{N_0 M_0} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\bar{M}}{M_0^2} = \beta^2 \quad (31)$$

$$\bar{N} = N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3 \cdot N_{xy}^2$$

$$\bar{M} = M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 \cdot M_{xy}^2$$

$$\text{avec : } \overline{NM} = N_x M_x + N_y M_y - \frac{N_x M_y + N_y M_x}{2} + 3 \cdot N_{xy} M_{xy}$$

$$s = \frac{|\overline{NM}|}{\overline{NM}}$$

( $\beta = \beta(\zeta)$ ,  $\gamma = \gamma(\zeta)$ ). Etant donné que le comportement des structures que nous considérons n'est plus axisymétrique, il nous faut disposer des points de calcul le long de la circonférence. En ce qui concerne la coque, la décomposition n'est pas analytique. C'est l'utilisateur qui choisit le nombre de points qui seront répartis régulièrement sur la plus petite période possible en fonction des harmoniques

utilisées pour la décomposition. Dans le cas de la couche orthotrope, un point de calcul est positionné sur chaque raidisseur, quelles que soient les harmoniques.

Une fois l'incrément de contraintes plastiques calculé en chaque point, il est exprimé sous la forme d'une série de Fourier. L'algorithme de la contrainte initiale associé à une technique d'accélération de convergence est alors utilisé pour résoudre les équations incrémentales de la plasticité.

### 6. Flambage élastique

Résoudre le problème de flambage revient à rechercher la solution du système :

$$([K] + \lambda \cdot [K_\sigma])\{U\} = 0 \tag{32}$$

où  $[K]$  est la matrice de raideur de la structure présentée précédemment,  $[K_\sigma]$  est la matrice de raideur de second ordre,  $\lambda$  un coefficient multiplicateur de chargement et  $\{U\}$  une perturbation. En rappelant que la partie non linéaire ne porte que sur la déformation de membrane, on montre (COM 3) que :

$$[K_\sigma] = \int_{\Omega} [G]^T \cdot [\Sigma] \cdot [G] \cdot d\Omega \tag{33}$$

Dans le cas de la couche orthotrope équivalente nous pouvons écrire :

$$[K_\sigma] = \int_z \left( \sum_{k=1}^n [G(\theta_k)]^T \cdot [\Sigma(\theta_k)] \cdot [G(\theta_k)] \right) \cdot dz \tag{34}$$

Où  $[\Sigma]$  est une matrice fonction des efforts généralisés de coque auxquels est soumis l'élément considéré :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} N_s & 0 & 0 & N_{s\theta} & 0 & 0 \\ & N_s & 0 & 0 & N_{s\theta} & 0 \\ & & N_s & 0 & 0 & N_{s\theta} \\ & & & N_\theta & 0 & 0 \\ (Sym.) & & & & N_\theta & 0 \\ & & & & & N_\theta \end{bmatrix} \tag{35}$$

Cette matrice est bien sûr décomposée en une série de Fourier,

$$[\Sigma] = [\Sigma_0] + \sum_{i_H} [\Sigma_{i_H}^c] \cdot \cos(i_H \cdot \theta) + [\Sigma_{i_H}^s] \cdot \sin(i_H \cdot \theta) \tag{36}$$

Ainsi, les variables de l'intégration étant séparables, nous pouvons calculer  $[K_\sigma]$  en deux parties :

$$\int_z [G_i^\alpha] \cdot [\Sigma_j^\beta] \cdot [G_k^\gamma] \cdot dz, \\ \text{et } b \cdot \sum_{k=1}^n \left( \prod_{v=1}^u cs(i_v, \theta_k) \right) \quad (37)$$

(avec  $i, j, k, i_v = 0..i_H \dots$  ;  $\alpha, \beta, \gamma = c$  ou  $s$  ;  $u = 2$  ou  $3$  ;  $cs = \sin$  ou  $\cos$ ). Nous connaissons alors, pour un chargement donné, la matrice de raideur du second ordre de la structure. Le chargement critique sera alors caractérisé par le chargement  $\lambda \cdot \{F\}$  tel que ( $\{F\}$  est le chargement imposé aux nœuds) :

$$\det([K] + \lambda \cdot [K_\sigma]) = 0 \quad (38)$$

Les valeurs propres associées au système définissent les déplacements du mode de bifurcation.

## 7. Flambage plastique

Le problème du flambage plastique se résout de la même façon que le flambage élastique, à la différence près que, étant donné qu'il n'y a plus de relation linéaire entre efforts et déformations, la matrice  $[K]$  est fonction de l'état de charge. Il faudra maintenant calculer la raideur tangente de la structure. Pour cela il suffit de remplacer la matrice de rigidité homogénéisée par la matrice de rigidité tangente dans la formule (18).

Nous avons présenté dans (CHA 1) trois matrices différentes calculées avec la fonction seuil que nous utilisons. Or, dans le cas que nous étudions où le comportement est non axisymétrique, il faudra calculer la matrice tangente en chaque point de calcul plastique, puis décomposer la fonction obtenue en harmoniques de FOURIER. Pour cette raison nous n'utiliserons que la méthode du module tangent avec laquelle la matrice tangente ne varie en fonction que d'une variable : le module tangent  $E_T$ .

Le module tangent est donc décomposé, connaissant l'écoulement en chaque point plastique :

$$E_T = E_0 + \sum_{i_H} \left( E_{i_H}^c \cdot \cos(i_H \cdot \theta) + E_{i_H}^s \cdot \sin(i_H \cdot \theta) \right) \quad (39)$$

La matrice tangente sera donc de la forme :

$$[D_T] = [D_{T0}] + \sum_{i_H} \left( [D_{T_{i_H}}^c] \cdot \cos(i_H \cdot \theta) + [D_{T_{i_H}}^s] \cdot \sin(i_H \cdot \theta) \right) \quad (40)$$

$$\text{avec } [D_{T_{i_u}}^\alpha] = \frac{E_{i_u}^\alpha}{E} \cdot [D].$$

Dans le cas le plus compliqué d'une structure élasto plastique avec défauts, la matrice de rigidité se calculera par :

$$[K] = b \cdot \{Q\}^T \cdot \int_z \left( \sum_{k=1}^n ([B] + [A][G])^T \cdot [D_T] \cdot ([B] + [A][G]) \right) dz \cdot \{Q\} \quad (41)$$

En séparant les variables de cette intégrale nous aurons des intégrations en z de type :

$$\begin{aligned} & \frac{E_i^\alpha}{E} \cdot \int_z [B_j^\beta]^T \cdot [D] \cdot [B_k^\gamma] \cdot dz, \\ & \frac{E_i^\alpha}{E} \cdot \int_z [B_j^\beta]^T \cdot [D] \cdot ([A_k^\gamma][G_l^\delta]) \cdot dz, \\ & \frac{E_i^\alpha}{E} \cdot \int_z ([A_j^\beta][G_k^\gamma])^T \cdot [D] \cdot [B_l^\delta] \cdot dz \\ \text{et } & \frac{E_i^\alpha}{E} \cdot \int_z ([A_j^\beta][G_k^\gamma])^T \cdot [D] \cdot ([A_l^\delta][G_m^\eta]) \cdot dz \end{aligned} \quad (42)$$

et des sommes

$$b \cdot \sum_{k=1}^n \left( \prod_{v=1}^u cs(i_v \cdot \theta_k) \right) \quad (43)$$

(avec i,j,k,l,m,i\_v = 0...i\_H... ; α,β,γ,δ,η = c ou s ; u = 2...5 ; cs = sin ou cos) qui peuvent de la même façon que précédemment se rapporter aux sommes simples C<sub>a</sub> et S<sub>a</sub>. La matrice de rigidité au second ordre se calcule de la même façon que pour le flambage élastique, ainsi il nous faut résoudre pour savoir s'il y a bifurcation ou non :

$$\det([K\{F\}] + \lambda \cdot [K_\sigma]) = 0 \quad (44)$$

Le chargement {F} est un chargement critique s'il vérifie l'équation précédente et si λ=1. Le mode de bifurcation est toujours défini par les valeurs propres du système.

Le problème du flambage plastique est donc beaucoup plus long à résoudre car il faut, pour chaque pas de charge où l'on veut évaluer la stabilité, calculer la raideur tangente de la structure.

### 8. Validation : flambage élastoplastique d'un silo reposant sur quatre pieds

Un silo renforcé localement reposant sur quatre pieds est soumis à une compression axiale. Les calculs, présentés par Guggenberger (GUG 5), obtenus avec le code de calcul ABAQUS, sont repris par notre méthode bidimensionnelle

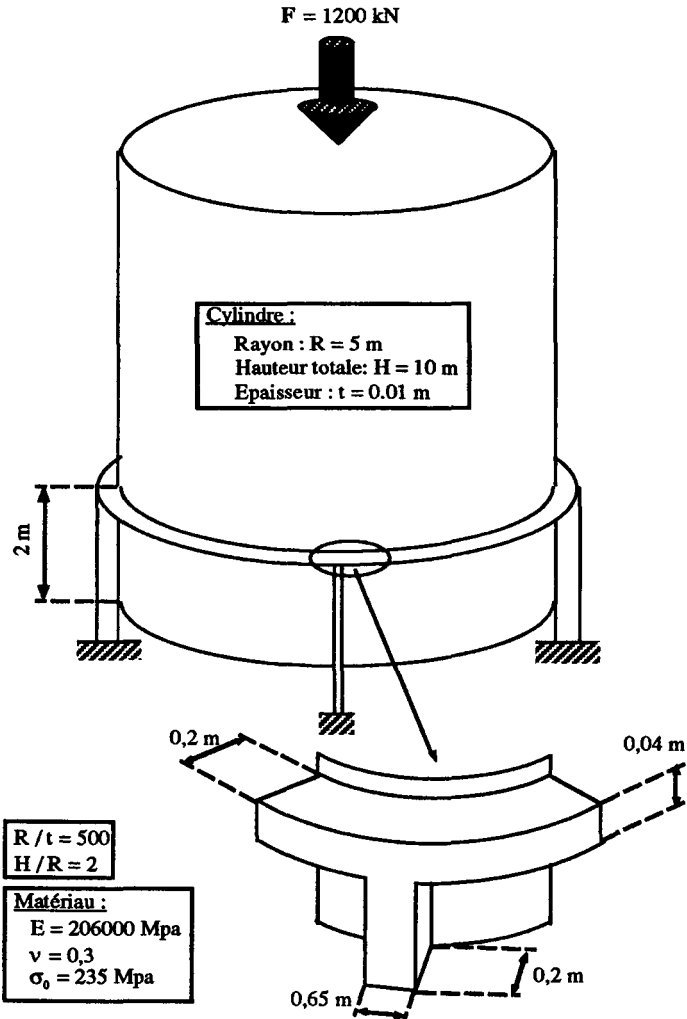
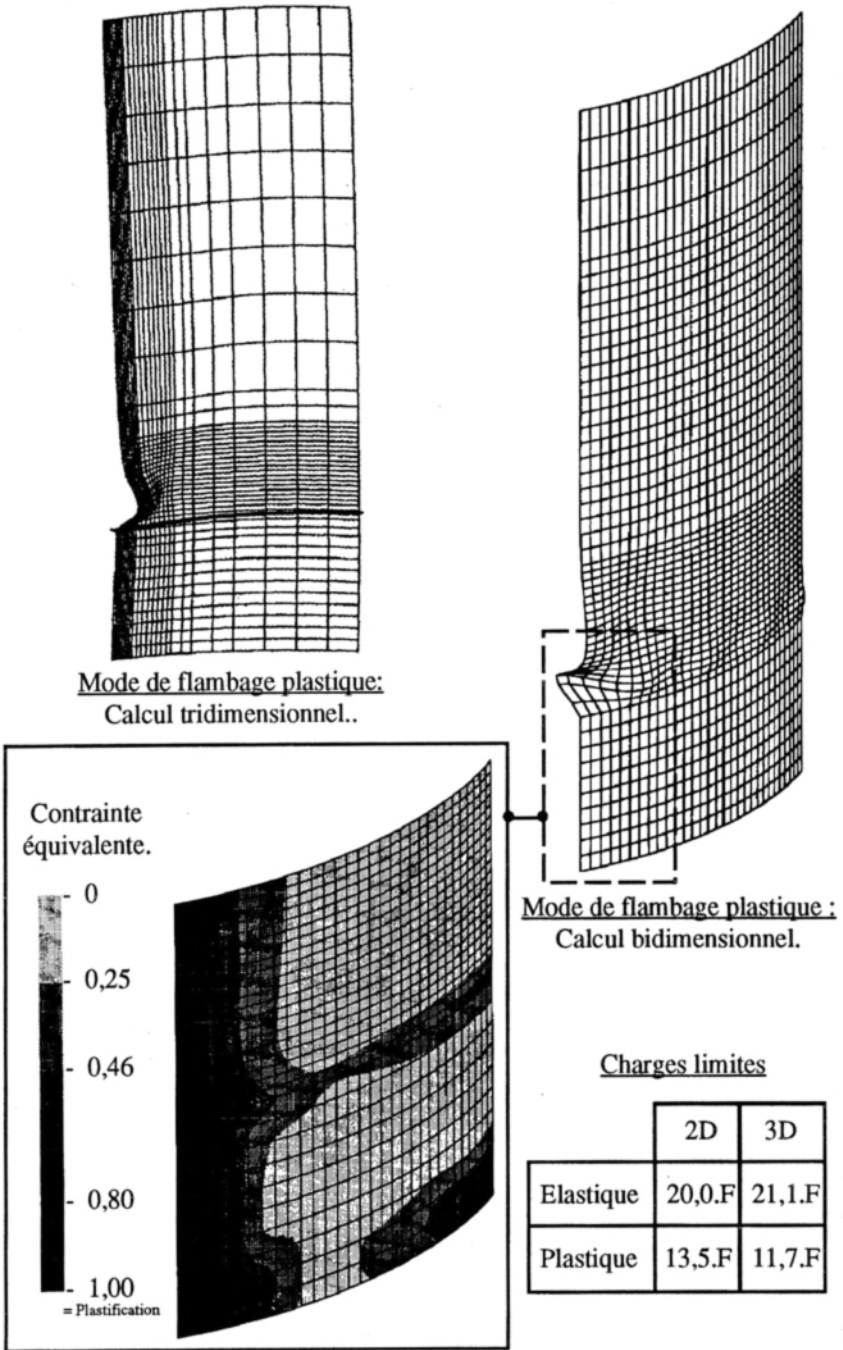


Figure 1. Géométrie et chargement



**Figure 2.** Résultats numériques



afin de comparer les résultats des deux approches. Nous ne reprenons que le cas du cylindre élasto-plastique raidi circonférentiellement et axialement sans défauts. Nous utilisons pour modéliser la structure des éléments COMU (éléments coque à 2 nœuds), des éléments COMAR (éléments raidisseurs axiaux à 2 nœuds) et COMCR (éléments raidisseurs circonférentiels à un nœud), disponibles dans la bibliothèque d'éléments du code INCA. Les 7 harmoniques 4..28 sont utilisées pour la décomposition en série de Fourier afin de préserver la symétrie du problème avec, pour le calcul non linéaire 31 points d'intégration sur la coque.

La géométrie et le chargement du cylindre est présentée figure 1. Les résultats numériques sont présentés figure 2.

Comme on peut le voir, les modes de bifurcation obtenus par les deux méthodes de calcul sont très proches l'un de l'autre. Le flambage local apparaît dans la zone la plus sollicitée qui commence à plastifier pour 6 fois la charge nominale  $F$ . La charge limite de flambage obtenue est elle légèrement supérieure à celle que donne Guggenberger. Cela provient du fait qu'il faut affiner le calcul dans le domaine plastique en augmentant le nombre d'harmoniques et le nombre de points d'intégration pour mieux localiser la plastification.

L'élément raidisseur que nous venons de présenter donne donc entière satisfaction pour le type de structure considéré. De la même façon qu'avec une technique d'homogénéisation classique il permet de traiter la famille de raidisseurs comme une coque tout en gardant l'aspect local du raidissage. C'est d'autant plus important quand il n'est pas intégral, ce qui est le cas de l'exemple de structure que nous venons de voir.

## 9. Conclusion

La méthode de calcul bidimensionnelle de calcul des structures cylindriques fortement raidies donne, comme le montre l'exemple précédent, de très bons résultats à la fois dans le domaine élastique et le domaine plastique.

Il faut toutefois donner des limites quand à l'utilisation des éléments COMAR à intégration circonférentielle discrète. Etant donné que la rigidité des raidisseurs est concentrée sur une seule génératrice, il ne faut pas que celui-ci soit trop large, sinon on sous-estime la rigidité de la structure en localisant les zones d'attache. En pratique il faut : largeur du raidisseur/ $b < 15\%$ . Cette limite empirique à été mise en évidence par une série de calcul sur l'influence de la largeur du raidisseur sur le flambage de différentes structures. L'exemple que nous avons étudié est parfait pour notre méthode car  $L/b = 8,3\%$ . D'autres éléments à intégration discrète pour éléments de renforts larges sont en cours de développement.

## Références

(CHA 1) CHAPULIOT S., COMBESCURA A., « Flambage plastique des coques cylindriques raidies axialement », à paraître dans *la Revue européenne des éléments finis*.

- (COM 2) COMBESURE A., Formulation of the COMU element in elasto-plasticity. Rapport DMT/LAMS 85.488.
- (COM 3) COMBESURE A., GARUTI G., Formulation de l'élément CODE (élément axisymétrique avec défauts non axisymétriques développé en série de Fourier). Rapport DMT/LAMS 83.001.
- (DEB 4) DEBONGNIE J.F., « Physical interpretation and generalisation of MAGUERRE's shallow shell theory », *Int. J. Eng. Sc.* - Vol. 17 - p. 387-399.
- (GUG 5) GUGGENBERGER W., *Buckling of cylindrical shells under local axial loads. Buckling of shell structures on land, in the sea and in the air*, Elsevier applied sciences, 1991.
- (ILY 6) ILYUSHIN A.A., *Plasticité*. Eyrolles, Paris 1956.
- (ZIE 7) ZIENKIEWICH O.C., *La méthode des éléments finis*, McGraw-Hill, 1979.