
Modélisation numérique des transferts d'humidité en milieux poreux

Patrick Le Tallec* — Pierre Nicolas**

* CEREMADE

Université de Paris Dauphine
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny
75775 Paris cedex 16

** Service de mécanique

Laboratoire central des Ponts et Chaussées
58, boulevard Lefebvre
75732 Paris cedex 15

RÉSUMÉ. Nous nous sommes consacrés à la modélisation numérique d'un modèle macroscopique de transferts d'humidité à travers les milieux poreux. Ce modèle prend en compte le changement de phase liquide-vapeur, les variations de la pression totale du gaz et des effets hystériques. Les inconnues de calcul sont la température et les masses volumiques apparentes d'air, de vapeur d'eau et d'eau liquide. Une approche mixte volumes finis et éléments finis est introduite de manière à privilégier le caractère conservatif et la stabilité de l'approximation. Le schéma de discrétisation en temps choisi est un schéma totalement implicite associé à une résolution du système non linéaire par un algorithme de Newton. Des simulations numériques sont présentées pour un milieu poreux, le mortier.

ABSTRACT. We are dealing with the numerical modelling of a macroscopic model describing humidity transfers through porous media. The model takes into account the liquid-vapour phase change, the variation of the total gas pressure and some hysteretic effects. The unknowns are the temperature and the apparent densities of air, of water vapour and of liquid water. Finite volumes and finite elements are used together, which ensures that the approximation is stable and conservative. The discretization scheme in time is a totally implicit scheme combined with a Newton algorithm for the solution of the nonlinear system. Different numerical simulations involving mortar as porous media are presented.

MOTS-CLÉS : transfert chaleur masse, volume finis, schéma conservatif, schéma implicite, newton.

KEY WORDS : heat mass transfer, finite volumes, conservative scheme, implicit scheme, newton.

1. Introduction

Nous nous sommes consacrés à la modélisation numérique des équations aux dérivées partielles du modèle développé dans [NIC 92] et [BLA 94]. Ce modèle décrit les transferts d'humidité dans les milieux poreux en tenant compte du changement de phase liquide-vapeur, des variations de la pression totale du gaz et de certains effets hystérétiques (§2). Nos inconnues de calcul sont la température et les masses volumiques apparentes de l'air, de la vapeur d'eau et de l'eau liquide. Le problème consiste à trouver l'évolution de ces variables pour un milieu poreux dont on connaît la géométrie, l'état initial et l'environnement thermodynamique (§3).

La discrétisation en espace de ces équations est mixte : les termes de diffusion et de convection thermique (§4) sont discrétisés par éléments finis, tandis que tous les autres termes le sont par volumes finis. Cette approche utilise donc en parallèle deux maillages duaux l'un de l'autre. Ce choix a été motivé par le souci d'une grande précision pour le calcul des flux de masse, indispensable à l'étude approfondie des transferts d'humidité. Pour assurer une meilleure stabilité à ce schéma conservatif, nous avons introduit un décentrage paramétré au niveau du terme de transport.

Nous avons utilisé plusieurs schémas de discrétisation en temps.

Le schéma de directions alternées de Peaceman-Rachford (§5) même s'il est stable numériquement, a exhibé des erreurs significatives sur les pressions pour les premiers pas de temps et à chaque changement de pas de temps.

Ceci nous a conduit à considérer un schéma totalement implicite en temps (§5). La méthode de Jacobi non linéaire ayant donnée des temps de calcul prohibitifs, nous avons ensuite opté pour la méthode de Newton qui palie cet inconvénient.

Cette dernière méthode a donc été utilisée pour effectuer les simulations numériques présentées au §6.

2. Position du problème physique

2.1. Introduction

Le modèle présenté dans ce paragraphe est basé sur la mécanique et la thermodynamique des milieux continus [GER 73]. Cette étude se place dans le cadre des matériaux standard généralisés [HAL 75]. Le milieu que nous considérons est un mélange que nous assimilerons à un milieu continu. Ceci suppose que l'échelle que nous avons choisie pour observer le comportement de ce milieu est suffisamment grande par rapport à sa structure intime pour justifier une étude macroscopique. Le milieu poreux étudié est constitué de trois constituants. La matrice ou squelette représente la phase solide. Les pores formés par ce squelette sont occupés par de l'air et de l'eau sous forme de phases liquide et gazeuse. La phase liquide est constituée uniquement d'eau liquide, alors que la phase gazeuse est un mélange d'air et de vapeur d'eau. Nous nous proposons d'étudier l'évolution d'un tel milieu poreux en tenant compte du changement de phase liquide-vapeur.

Pour définir le milieu on introduit des paramètres ou des inconnues nivelés en chaque point. C'est le cas en particulier des proportions des diverses phases :

$$\beta_i = \frac{\text{volume occupé par la phase } i \text{ dans } V}{\text{volume élémentaire } V \text{ de milieu poreux}}$$

pour $i = g, l, s$, indices correspondant respectivement à la phase gazeuse, la phase liquide et la phase solide.

Pour des raisons de facilité d'écriture indiciaire nous posons

$$\beta_a = \beta_v = \beta_g.$$

En fait l'air et la vapeur d'eau (indices a et v) occupent le même espace, celui du gaz. Seule leur masse volumique les différencie. Ces teneurs volumiques ne sont pas indépendantes, elle vérifient

$$0 \leq \beta_i \quad \text{pour } i = g, l, s,$$

$$\beta_g + \beta_l + \beta_s = 1.$$

La masse volumique de chaque constituant est donnée par :

$$\rho_i = \frac{\text{masse du constituant } i}{\text{volume occupé par cette masse}}.$$

Nous supposons que l'on peut définir une vitesse moyenne \vec{u}_i du constituant $i = a, v, l, s$ en chaque point du milieu.

Ces définitions vont nous permettre d'écrire, après avoir listé les hypothèses du modèle, les lois de comportement.

2.2. Hypothèses du modèle

Le squelette du milieu poreux est supposé indéformable et immobile

$$\beta_s = \beta_s(x), \quad \rho_s = \rho_s(x), \quad \vec{u}_s = \vec{0},$$

x étant les coordonnées du point du milieu poreux considéré.

La porosité ε , comme la teneur en squelette β_s , ne dépend pas du temps t

$$\varepsilon = 1 - \beta_s = \beta_g + \beta_l = \varepsilon(x).$$

La masse volumique de l'eau est constante. Les gaz, air et vapeur d'eau, se comportent comme des gaz parfaits. La température T est la même pour tous les constituants. Enfin aucune réaction chimique n'est prise en compte à l'exception du changement de phase liquide-vapeur de l'eau. A ce niveau de présentation du modèle, les quantités $\beta_s, \varepsilon, \rho_s$ et \vec{u}_s sont données.

2.3. Lois de comportement

Le modèle proposé déduit toutes les lois de comportement à partir de la donnée des énergies libres de chaque constituant et des potentiels de dissipation (intrinsèque et thermique). Elles sont en accord avec le second principe de la thermodynamique. Cette méthode assure une certaine cohérence entre toutes les équations du modèle et permet de retrouver les lois phénoménologiques telles que Fourier, Darcy et Fick comme des lois de comportement.

Une autre originalité du modèle est de modifier l'énergie libre de l'eau par une fonction h de la teneur en eau β_l , en proposant une énergie libre de la forme

$$\psi_l(T, \beta_l) = -c_l T \text{Log} T + \frac{RT}{M_v} h(\beta_l),$$

où c_l est la capacité calorifique à volume constant de l'eau, R est la constante des gaz parfaits et M_v est la masse molaire l'eau. Le terme classique $-c_l T \text{Log} T$ donne une contribution linéaire en température dans l'énergie interne. Le coefficient $\frac{RT}{M_v}$ permet de ne pas modifier l'énergie interne de l'eau et de rendre adimensionnelle la fonction h .

Cette fonction h traduit le caractère hygroscopique du milieu poreux ; si l'on place un échantillon de ce milieu dans une enceinte à température constante et si l'on fait varier l'humidité, alors le poids de l'échantillon varie. Une augmentation de l'humidité relative correspond à une condensation de la vapeur d'eau (sorption) et à un gain de poids. Rappelons que l'humidité relative notée HR est le rapport de la pression de vapeur sur la pression de vapeur saturante P_{vs}^o de l'eau libre. Une diminution de l'humidité relative correspond à une évaporation de l'eau liquide (désorption) et à une perte de poids. Les courbes humidité relative-variation de poids par rapport à un état de référence obtenues par l'expérience décrite ci-dessus en prenant soin d'attendre la stabilisation du poids à chaque changement d'humidité sont appelées isothermes de sorption ou de désorption suivant la variation de l'humidité relative. La teneur en eau étant une fonction de la variation de poids, les isothermes sont souvent tracées dans le plan humidité relative-teneur en eau (fig. 1). Les isothermes de sorption traduisent les phénomènes microscopiques de condensation tant par capillarité que par adsorption. Les isothermes de désorption ne s'identifient pas en général avec les isothermes de sorption : la sorption-désorption présente une hystérésis. Cette hystérésis est introduite dans le modèle par une dissipation sur le taux de changement de phase.

Précisons finalement les lois de comportement ainsi obtenues [NIC 92].

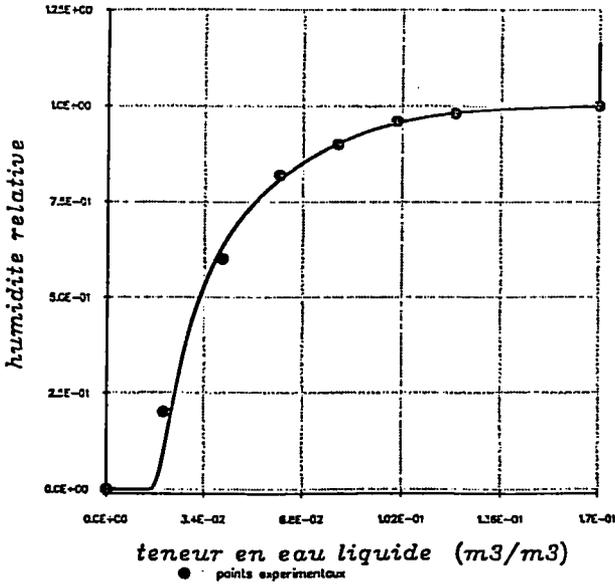


Figure 1. Isotherme de sorption du type mortier à T = 293K (courbe analytique)

2.3.1. Lois des gaz parfaits

Les expressions des pressions d'air et de vapeur d'eau sont :

$$P_a = \frac{\rho_a RT}{M_a}, \quad P_v = \frac{\rho_v RT}{M_v}, \quad [1]$$

où M_a et M_v sont les masses molaires de l'air et de l'eau.

De par le choix des énergies de l'air et de la vapeur, ces deux gaz suivent la loi des gaz parfaits. Les masses volumiques étant positives, il en est de même pour les pressions P_a et P_v .

2.3.2. La pression capillaire

L'égalité des enthalpies libres de l'eau liquide et de sa vapeur, vue ici comme loi de comportement, nous fournit plusieurs informations :

1) une relation entre l'isotherme de sorption $HR(\beta_l)$, supposée caractériser le milieu poreux, et la fonction d'interaction h :

$$\text{Log}HR = \frac{d(\beta_l h(\beta_l))}{d\beta_l}; \quad [2]$$

ainsi la fonction d'interaction h est accessible par l'expérience à partir de la connaissance de HR (fig. 2);

2) l'expression de la pression d'eau liquide :

$$P_l = P_a + P_v + \frac{\rho_l RT}{M_v} \beta_l \frac{dh(\beta_l)}{d\beta_l}; \quad [3]$$

3) l'expression de la pression capillaire à l'équilibre :

$$P_c = P_a + P_{vs} - P_l = -\frac{\rho_l RT}{M_v} \text{Log}HR + \frac{\rho_l RT}{M_v} h(\beta_l),$$

où $P_{vs}(T, \beta_l)$ est la pression de vapeur saturante à l'intérieur du milieu poreux définie par l'isotherme de sorption par

$$P_{vs}(T, \beta_l) = HR(\beta_l) P_{vs}^o(T), \quad [4]$$

P_{vs}^o étant la pression de vapeur saturante de l'eau libre (en dehors de tout milieu poreux). La pression capillaire est une fonction décroissante de la teneur en eau (fig. 3).

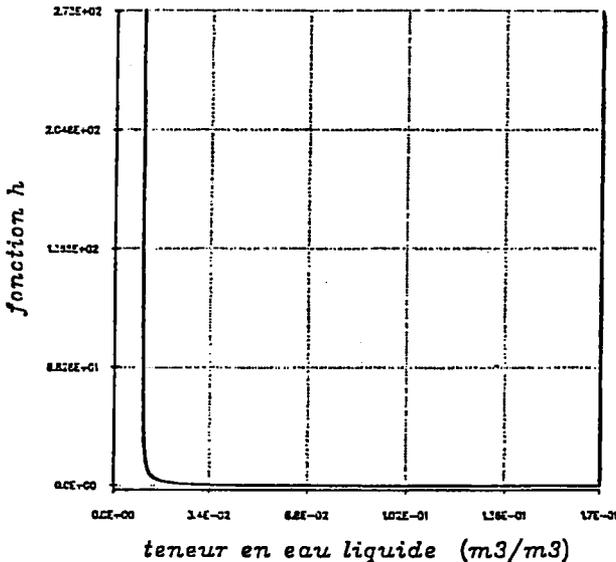


Figure 2. Fonction analytique h du type mortier

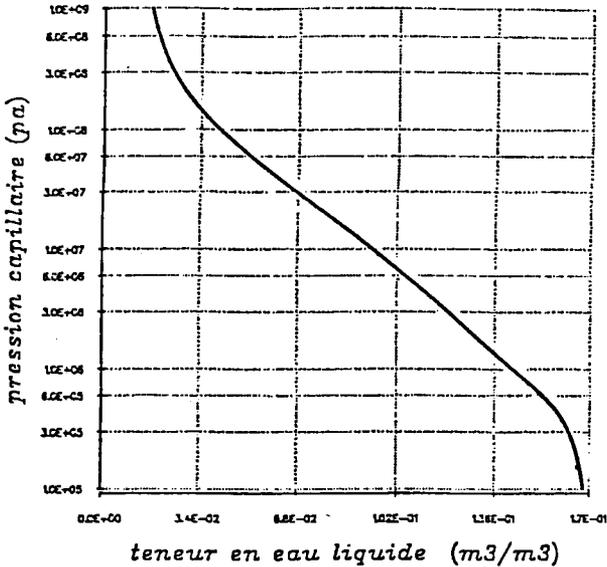


Figure 3. Pression capillaire P_c du type mortier à $T = 293K$ (courbe analytique)

2.3.3. La loi de Fourier

La loi de Fourier détermine le vecteur courant de chaleur \vec{q}_T en fonction du gradient de la température T :

$$\vec{q}_T = -\lambda \nabla T. \tag{5}$$

Cette loi est une loi de conduction de la chaleur isotrope et linéaire. La conductivité thermique λ est un scalaire positif ou nul qui peut dépendre des variables du système considéré. Dans la plupart des cas λ est une fonction de la teneur en eau et de la température. Si l'on considère un volume \mathcal{V} de milieu poreux, le taux de chaleur reçue par conduction est $-\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{q}_T \cdot \vec{n} ds$ où $\partial\mathcal{V}$ est la surface limitant \mathcal{V} et \vec{n} la normale extérieure à \mathcal{V} .

2.3.4. Lois de Darcy et Fick

La loi de Darcy [AUR 86] s'applique à chacune des phases (gazeuse et fluide) tandis que la loi de Fick [SIS 72] régit la diffusion de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse qui n'est pas

supposée être à une pression constante. Ces lois permettent d'exprimer les vitesses d'air, de vapeur et d'eau liquide en fonction des pressions relatives et de h [NIC 92] :

$$\beta_l \vec{u}_l = -K_l \nabla (P_l + \frac{\rho_l R T}{M_v} h + \rho_l g z). \quad [6]$$

$$\beta_a \vec{u}_a = -(K_g + \frac{P_v}{P_a} K_{av}) \nabla P_a - (K_g - K_{av}) \nabla P_v, \quad [7]$$

$$\beta_v \vec{u}_v = -(K_g - K_{av}) \nabla P_a - (K_g + \frac{P_v}{P_a} K_{av}) \nabla P_v. \quad [8]$$

Les coefficients K_g et K_l sont les perméabilités relatives à chacune des phases. Elles sont fonction de la teneur en eau. La quantité g est le module de l'accélération de la pesanteur et z est la cote verticale orientée vers le haut. L'effet de la pesanteur est négligé pour décrire les mouvements de la phase gazeuse. Le coefficient de diffusion K_{av} (scalaire positif ou nul) a été introduit de telle sorte qu'il ait la dimension des perméabilités K_l, K_g . Il dépend de la teneur en eau, de la température et des pressions des gaz.

3. Problème aux limites

3.1. Le problème

Le problème consiste à calculer l'évolution d'un milieu poreux dont on connaît (fig. 4)

- (i) la géométrie Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2$ ou 3),
- (ii) l'état initial,
- (iii) l'environnement thermodynamique.

Cet environnement thermodynamique agit sur le milieu de deux manières.

A travers la partie Γ_1 de la frontière Γ de Ω , les variables d'état sont connues (conditions de Dirichlet).

A travers la partie Γ_2 , les flux de masse et de chaleur sont des fonctions linéaires données de l'écart entre l'état thermodynamique (connu) du milieu extérieur et l'état du milieu poreux (conditions de Fourier-Robin).

Ce type de problème se rencontre par exemple quand on veut prédire l'évolution des teneurs en eau d'un ouvrage d'art en béton et en déduire l'état de fissuration du matériau. Il se rencontre aussi au niveau de l'interprétation expérimentale d'essais de sorption dans lesquels l'état du milieu poreux n'est pas uniforme en espace.

3.2. Les inconnues

Dans la modélisation mathématique présentée au paragraphe 2, les variables d'état sont la température T , la teneur en eau β_l et les masses volumiques ρ_a et ρ_v de l'air et de la vapeur d'eau. Pour traiter de façon analogue les équations de conservation de l'air et de l'eau, nous choisissons comme inconnues de calcul la température T et les masses volumiques apparentes $\beta_a \rho_a, \beta_v \rho_v$ et $\beta_l \rho_l$ respectivement de l'air, de la vapeur d'eau et de l'eau liquide.

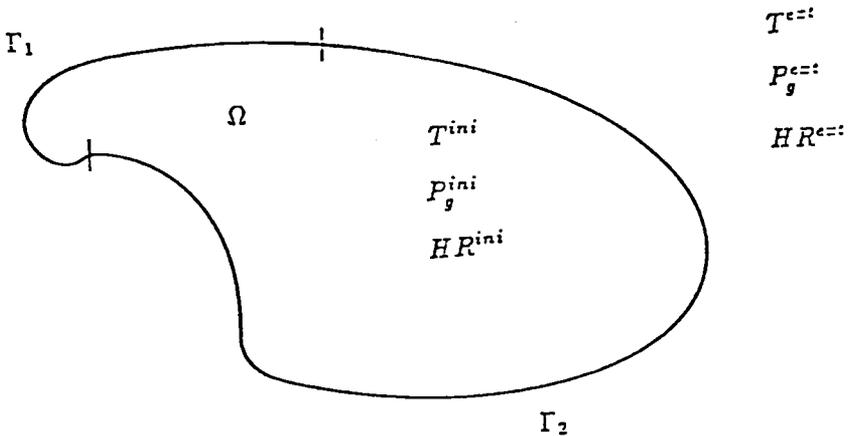


Figure 4. Le problème physique

3.3. Equations

Pour décrire l'évolution des quatre inconnues $T, \beta_a \rho_a, \beta_v \rho_v$ et $\beta_l \rho_l$, nous choisissons le système formé des quatre équations aux dérivées partielles suivantes [NIC 92] :

(i) la conservation de l'énergie

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}_T \cdot \nabla T - \text{div} \lambda \nabla T = G(T, \beta_i \rho_i) \quad [9]$$

(ii) la conservation de la masse d'air

$$\frac{\partial \beta_a \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta_a \rho_a \vec{u}_a) = 0 \quad [10]$$

(iii) la conservation de la masse d'eau

$$\frac{\partial \beta_v \rho_v}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta_v \rho_v \vec{u}_v) + \frac{\partial \beta_l \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta_l \rho_l \vec{u}_l) = 0 \quad [11]$$

(iv) l'équation de dissipation sur le taux de changement de phase

$$\frac{\partial \beta_l \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta_l \rho_l \vec{u}_l) = F(T, \beta_i \rho_i) \quad [12]$$

où on a posé

$$\rho c = \sum_{i=a,v,l,s} \beta_i \rho_i c_i,$$

$$\vec{u}_T = \sum_{i=a,v,l} \beta_i \rho_i c_i \vec{u}_i,$$

$$G(T, \beta_i \rho_i) = -((c_l - c_v)T - L_o) \frac{RT}{kM_v} \operatorname{Log} \frac{P_v}{P_{vs}},$$

$$F(T, \beta_i \rho_i) = \frac{RT}{kM_v} \operatorname{Log} \frac{P_v}{P_{vs}}. \quad [13]$$

Le coefficient k désigne le coefficient de dissipation sur le taux de changement de phase. Les capacités calorifiques à volume constant c_i et la chaleur latente L_o sont constants en espace et en temps.

L'équation de conservation de l'énergie [9] a été simplifiée d'une part en supposant que la puissance des efforts intérieurs est négligeable devant les termes de convection-diffusion et que le taux volumique de production de chaleur est nul et d'autre part en utilisant la loi de Fourier [5] et les équations de conservation [10] et [11].

Dans ces équations, les fonctions pressions ou vitesses sont données par les lois de comportement du paragraphe 2.3., à savoir [1], [2], [3], [4], [6], [7], [8].

3.4. Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont différentes suivant la partie Γ_1 ou Γ_2 formant la frontière Γ de Ω (fig. 4).

Sur la frontière Γ_1 , nous imposons les conditions de Dirichlet sur les variables T et $\beta_i \rho_i$:

$$\text{sur } \Gamma_1 \begin{cases} T = T^{ext}, \\ \beta_i \rho_i = (\beta_i \rho_i)^{ext}, i = a, v, l. \end{cases} \quad [14]$$

Remarque : Les valeurs $(\beta_i \rho_i)^{ext}$ peuvent être déterminées par la donnée de la température T^{ext} , de la pression de la phase gazeuse P_g^{ext} et de l'humidité relative HR^{ext} régnant à l'extérieur du milieu poreux. Pour cela, nous supposons que les points de la frontière Γ_1 correspondent à des points de la courbe de sorption à l'équilibre $HR(\beta_l)$. Cette courbe étant strictement croissante, à HR^{ext} donné correspond une unique valeur notée β_l^{ext} de la teneur en eau. La pression de vapeur est donc $P_{vs}(T^{ext}, \beta_l^{ext})$ sur Γ_1 . En reprenant la loi des gaz parfaits, nous pouvons alors calculer les variables $(\beta_i \rho_i)^{ext}$ via les formules

$$(\beta_l \rho_l)^{ext} = \beta_l^{ext} \rho_l,$$

$$(\beta_v \rho_v)^{ext} = (\varepsilon - \beta_l^{ext}) \frac{M_v}{RT^{ext}} P_{vs}(T^{ext}, \beta_l^{ext}),$$

$$(\beta_a \rho_a)^{ext} = (\varepsilon - \beta_l^{ext}) \frac{M_a}{RT^{ext}} (P_g^{ext} - P_{vs}(T^{ext}, \beta_l^{ext})).$$

Sur la frontière Γ_2 , nous imposons les conditions de Fourier-Robin, i.e. nous fixons les flux thermique et massiques par :

$$\text{sur } \Gamma_2 \begin{cases} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_T (T - T^{imp}) - q_T \end{cases} \quad [15]$$

$$\beta_i \rho_i \vec{u}_i \cdot \vec{n} = -\alpha_i (\beta_i \rho_i - (\beta_i \rho_i)^{imp}) - q_i, i = a, v, l. \quad [16]$$

Le vecteur \vec{n} est la normale extérieure à Ω . Les coefficients α_T et α_i sont donnés ainsi que les flux q_T et q_i et les valeurs imposées T^{imp} et $(\beta_i \rho_i)^{imp}$.

3.5. Conditions initiales

A l'état initial, les variables T et $\beta_i \rho_i$ en tout point de Ω sont connues et égales respectivement aux valeurs

$$T^{ini}, (\beta_i \rho_i)^{ini}, i = a, v, l.$$

Remarque : Dans les calculs numériques effectués, nous avons supposé que le milieu poreux était initialement en équilibre thermodynamique. Les valeurs $(\beta_i \rho_i)^{ini}$ ont été calculées à partir de T^{ini}, P_g^{ini} et HR^{ini} d'une façon similaire à celle décrite dans la remarque du paragraphe 3.4. Ce type d'état initial correspond en effet à la plupart des situations expérimentales rencontrées en pratique.

4. Approximation en espace

4.1. Définition du maillage

Pour obtenir les solutions numériques du système décrit en 3.3., nous introduisons

- (i) $T_h = U_j T_j$ une triangulation régulière (au sens défini par P.G. CIARLET [CIA 78]) de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,
- (ii) l'espace d'éléments finis V_h

$$V_h = \{v \in C^0(\Omega), v|_{T_j} \in P_1, v|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

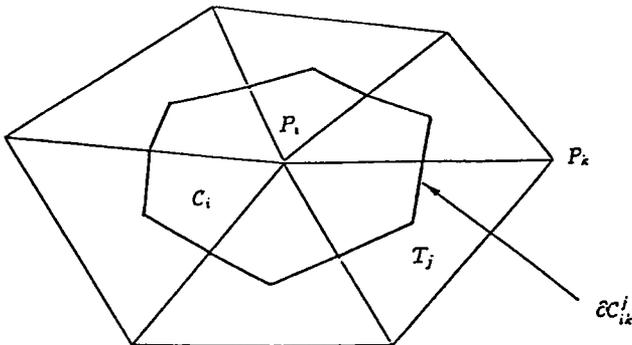


Figure 5. La cellule C_i associée au sommet P_i interne à Ω

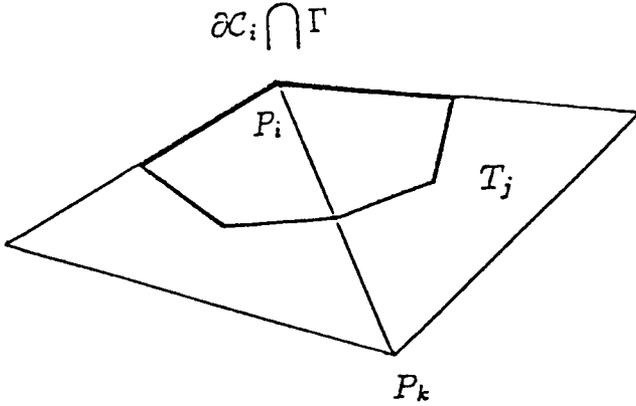


Figure 6. La cellule C_i associée au sommet P_i de la frontière de Ω

A tout sommet P_i de la triangulation T_h , on associe aussi une cellule C_i définie par les médianes, non issues de P_i , des triangles dont P_i est sommet (fig. 5 et fig. 6).

On effectue une construction similaire si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

4.2. Approximation de l'équation en température

Après multiplication par une fonction test v et intégration par parties, l'équation en température [9] s'écrit sous la forme variationnelle classique

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v + \int_{\Omega} \vec{u}_T \cdot \nabla T v + \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_2} \lambda \nabla T \cdot \vec{n} v = \int_{\Omega} G(T, \beta_i \rho_i) v, \quad \forall v \in V_h.$$

Cette équation va être discrétisée en espace par éléments finis pour les termes de convection et de diffusion et par volumes finis pour les termes d'évolution et de chaleur latente G . La discrétisation par éléments finis est classique pour ce type d'équation. La discrétisation par volumes finis a été introduite pour les autres

équations (cf. 4.3.). Nous l'avons adoptée pour la température pour garder une certaine homogénéité vis-à-vis des autres variables. Ainsi, en règle générale, les variables sont constantes par cellule tandis que leur gradient et aussi les vitesses des constituants, eux, sont constants par triangle T_j . Cette approche utilise donc en parallèle deux maillages duaux l'un de l'autre. Elle est à rapprocher des techniques de discrétisation à "staggered grid" utilisées par SANDERS ou par STOUFFLET-ROSTAND [ROS 88].

4.2.1. Terme de convection

Sachant que la vitesse \vec{u}_T et le gradient ∇T sont constants par triangle, calculons le terme de convection pour $v \in V_h$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{u}_T \cdot \nabla T v &= \sum_{T_j} \int_{T_j} \vec{u}_T \cdot \nabla T v \\ &= \sum_{T_j} \vec{u}_T(T_j) \cdot \nabla T(T_j) \int_{T_j} v \\ &= \sum_{T_j} \vec{u}_T(T_j) \cdot \nabla T(T_j) \left(\sum_{P_i \in T_j} \frac{1}{3} \mathcal{A}(T_j) v(P_i) \right) \\ &= \sum_{P_i} v(P_i) \left(\sum_{T_j \ni P_i} \frac{1}{3} \mathcal{A}(T_j) \vec{u}_T(T_j) \cdot \nabla T(T_j) \right). \end{aligned}$$

Le terme $\mathcal{A}(T_j)$ dénote l'aire du triangle T_j . Le gradient $\nabla T(T_j)$ s'exprime à l'aide des fonctions de base φ_m , fonction affine par triangle ayant pour valeur 1 au noeud P_m et 0 à tous les autres noeuds. Ainsi nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{u}_T \cdot \nabla T v &= \sum_{P_i} v(P_i) \left[\sum_{T_j \ni P_i} \frac{1}{3} \mathcal{A}(T_j) \vec{u}_T(T_j) \cdot \left(\sum_{P_m} T(P_m) \nabla \varphi_m(T_j) \right) \right] \\ &= \sum_{P_i} v(P_i) \left[\sum_{T_j \ni P_i} \left(\sum_{P_m \in T_j} \frac{1}{3} \mathcal{A}(T_j) \vec{u}_T(T_j) \cdot \nabla \varphi_m(T_j) T(P_m) \right) \right]. \end{aligned}$$

4.2.2. Terme de diffusion

Ici, nous considérons λ constant par triangle et le terme de diffusion devient donc tout simplement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla v &= \int_{\Omega} \sum_{P_i} \lambda(P_i) T(P_i) \nabla \varphi_i \cdot \nabla v \\ &= \sum_{P_i} \lambda(P_i) T(P_i) \left(\sum_{T_j \ni P_i} \int_{T_j} \nabla \varphi_i \cdot \nabla v \right). \end{aligned}$$

4.2.3. Terme d'évolution et de chaleur latente

Pour la discrétisation par volumes finis, à toute cellule C_i , on associe sa fonction caractéristique χ_i ($\chi_i = 1$ sur C_i et 0 ailleurs) et on définit l'opérateur L_h par

$$L_h(v) = \sum_{P_i} v(P_i) \chi_i, \forall v \in V_h. \tag{17}$$

Nous posons alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v - \int_{\Omega} G(T, \beta_i \rho_i) v &\simeq \int_{\Omega} (L_h(\rho c \frac{\partial T}{\partial t}) - L_h(G)) L_h(v) \\ &= \sum_{C_i} \mathcal{A}(C_i) (\rho c(P_i) \frac{\partial T}{\partial t}(P_i) - G(P_i)) v(P_i). \end{aligned}$$

La capacité calorifique ρc est prise constante par cellule.

4.2.4. Terme de bord

Le terme de bord se calcule à l'aide de la condition de Fourier-Robin appliquée à Γ_2 [15] :

$$- \int_{\Gamma_2} \lambda \nabla T \cdot \vec{n} v = \int_{\Gamma_2} \alpha_T (T - T^{imp}) v + q_T v.$$

L'étude de la convergence de ce schéma sera traitée directement au paragraphe 5.2.2., sous des hypothèses simplificatrices.

4.3. Approximation des autres équations

Les équations de "l'air" [10], de "l'eau" [11] et de "dissipation" [12] sont discrétisées par volumes finis de manière à rester conservatif au niveau des flux. La modélisation des transferts d'humidité nécessite une grande précision pour le calcul des flux de masse. Avec les volumes finis, la conservation de la masse est parfaitement satisfaite sur chaque cellule C_i . Nous introduisons de plus un décentrage paramétré au niveau du terme de transport [BAB 81]. Ce décentrage assure une meilleure stabilité de ce schéma dans le cas de grandes vitesses.

4.3.1. Equations discrétisées par volumes finis

Nous intégrons les trois équations [10], [11] et [12] sur chaque cellule C_i et nous remplaçons les intégrales volumiques par des intégrales de surface en intégrant par parties. Après cette transformation, ces équations deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{C_i} \frac{\partial \beta_a \rho_a}{\partial t} + \int_{\partial C_i} \beta_a \rho_a \vec{u}_a \cdot \vec{n} = 0, \\ \int_{C_i} \frac{\partial \beta_v \rho_v}{\partial t} + \int_{\partial C_i} \beta_v \rho_v \vec{u}_v \cdot \vec{n} + \int_{C_i} \frac{\partial \beta_l \rho_l}{\partial t} + \int_{\partial C_i} \beta_l \rho_l \vec{u}_l \cdot \vec{n} = 0, \\ \int_{C_i} \frac{\partial \beta_l \rho_l}{\partial t} + \int_{\partial C_i} \beta_l \rho_l \vec{u}_l \cdot \vec{n} = \int_{C_i} F(T, \beta_i \rho_i). \end{array} \right. \quad [18]$$

Le bord de la cellule, notée ∂C_i , se décompose en unions ∂C_{ik}^j de segments intérieurs à Ω , inclus dans les éléments T_j séparant le sommet P_i du sommet P_k (voir fig. 5) et en une partie $\partial C_i \cap \Gamma$ de la frontière de Ω (si elle est non vide !) (voir fig. 6) :

$$\partial C_i = \left(\bigcup_{T_j \ni P_i} \bigcup_k \partial C_{ik}^j \right) \cup (\partial C_i \cap \Gamma).$$

Toujours en utilisant l'opérateur L_h [17], nous approchons les intégrales de volume du système [18] par

$$\int_{C_i} X \simeq \int_{C_i} L_h(X) = \mathcal{A}(C_i) X(P_i). \quad [19]$$

Le décentrage paramétré s'applique aux différents termes de flux du type

$$\int_{\partial C_i} \beta \rho \vec{u} \cdot \vec{n} = \int_{\partial C_i} (\beta \rho)^* \vec{u} \cdot \vec{n} = \sum_{T_j \ni P_i} \sum_k \int_{\partial C_{ik}^j} (\beta \rho)^* \vec{u} \cdot \vec{n} + \int_{\partial C_i \cap \Gamma} (\beta \rho)^* \vec{u} \cdot \vec{n} \quad [20]$$

avec

$$(\beta \rho)^* = \left[\frac{1}{2} + \alpha_c \text{sg} \left(\int_{\partial C_{ik}^j} \vec{u} \cdot \vec{n} \right) \right] (\beta \rho)(P_j) + \left[\frac{1}{2} - \alpha_c \text{sg} \left(\int_{\partial C_{ik}^j} \vec{u} \cdot \vec{n} \right) \right] (\beta \rho)(P_k) \quad \text{sur } \partial C_{ik}^j,$$

$$(\beta \rho)^* \vec{u} \cdot \vec{n} = -\alpha [(\beta \rho)(P_i) - (\beta \rho)^{imp}] - q \quad \text{sur } \partial C_i \cap \Gamma_2, \quad [21]$$

où *sg* désigne la fonction signe. Le coefficient α_c est le paramètre de décentrage ($0 \leq \alpha_c \leq 1$). Si α_c est nul, le schéma est centré: la valeur de la variable sur l'arête ∂C_{ik}^j est la moyenne de celles aux deux sommets P_i et P_k . Si α_c est égal à 1, le schéma est totalement décentré : la valeur de la variable sur l'arête est celle du sommet amont P_i ou P_k d'où provient le flux de masse.

La variable $(\beta \rho)^*$ n'est pas à définir sur la frontière Γ_1 puisque le système [18] n'apporte rien si $P_i \in \Gamma_1$, les variables étant connues en ce point [14]. La condition sur Γ_2 [21] est naturelle par rapport à la condition de Fourier-Robin qui lui est imposée [16].

En remplaçant les intégrales par leur expression ([19], [20]), le système discrétisé en espace est finalement :

$$\mathcal{A}(C_i)(\beta_a \rho_a)(P_i) + \sum_{T_j \ni P_i} \sum_k \int_{\partial C_{ik}} (\beta_a \rho_a)^* \vec{u}_a \cdot \vec{n} + \int_{\partial C_i \cap \Gamma} (\beta_a \rho_a)^* \vec{u}_a \cdot \vec{n} = 0, \quad [22]$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}(C_i)(\beta_v \rho_v)(P_i) + \sum_{T_j \ni P_i} \sum_k \int_{\partial C_{ik}^j} (\beta_v \rho_v)^* \vec{u}_v \cdot \vec{n} \\
& + \int_{\partial C_i \cap \Gamma} (\beta_v \rho_v)^* \vec{u}_v \cdot \vec{n} + \mathcal{A}(C_i)(\beta_l \rho_l)(P_i) \\
& + \sum_{T_j \ni P_i} \sum_k \int_{\partial C_{ik}^j} (\beta_l \rho_l)^* \vec{u}_l \cdot \vec{n} + \int_{\partial C_i \cap \Gamma} (\beta_l \rho_l)^* \vec{u}_l \cdot \vec{n} = 0, \\
& \hspace{20em} [23] \\
& \mathcal{A}(C_i)(\beta_l \rho_l)(P_i) + \sum_{T_j \ni P_i} \sum_k \int_{\partial C_{ik}^j} (\beta_l \rho_l)^* \vec{u}_v \cdot \vec{n} \\
& + \int_{\partial C_i \cap \Gamma} (\beta_l \rho_l)^* \vec{u}_v \cdot \vec{n} = \mathcal{A}(C_i)F(P_i).
\end{aligned}$$

4.3.2. Schéma conservatif

Montrons que ce schéma est conservatif, c'est-à-dire pour tout sous-ensemble $\Omega_1 = \bigcup_{i \in I} C_i \subset \Omega$ et pour tous temps t_o, t_1 ($t_o < t_1$),

on a

$$\left[\int_{\Omega_1} L_h(\beta_a \rho_a) \right]_{t_o}^{t_1} = - \int_{t_o}^{t_1} \int_{\partial \Omega_1} (\beta_a \rho_a)^* \vec{u}_a \cdot \vec{n}$$

et

$$\left[\int_{\Omega_1} L_h(\beta_v \rho_v + \beta_l \rho_l) \right]_{t_o}^{t_1} = - \int_{t_o}^{t_1} \int_{\partial \Omega_1} [(\beta_v \rho_v)^* \vec{u}_v \cdot \vec{n} + (\beta_l \rho_l)^* \vec{u}_l \cdot \vec{n}].$$

Autrement dit, montrons que les conservations de la masse d'air et d'eau sont satisfaites dans Ω_1 .

Il suffit d'additionner les équations de conservation de la masse d'air [22] (resp. de la masse d'eau [23]) pour chaque cellule $i \in I$ et d'intégrer en temps. Les termes de flux internes à Ω_1 s'annulent alors deux à deux par construction puisque le calcul $\int_{\partial C_{ik}^j} (\beta \rho)^* |\vec{u} \cdot \vec{n}|$ ne dépend pas de la cellule C_i ou C_k considérée ($\int_{\partial C_{ik}^j} (\beta \rho)^* \vec{u} \cdot \vec{n} = - \int_{\partial C_{ki}^j} (\beta \rho)^* \vec{u} \cdot \vec{n}$ par construction).

4.3.3. Analyse du schéma par volumes finis

Dans ce paragraphe, nous comparons les deux discrétisations volumes finis et éléments finis appliquées aux termes de flux. Pour cela, rappelons tout d'abord les deux lemmes suivants qui sont le fruit de communications personnelles de A. DERVIEUX et M.H. LALLEMAND.

Lemme 1 : Soit T_j un triangle dont P_i est un sommet, soit φ_i la fonction de base affine associée au noeud P_i , alors on a l'égalité

$$\int_{T_j} \nabla \varphi_i ds = - \int_{\partial C_i \cap T_j} \vec{n} dl$$

où ∂C_i est le bord de la cellule C_i et \vec{n} la normale extérieure à C_i . Une démonstration de ce lemme figure dans [NIC 92].

Lemme 2 : Soient φ_i et φ_k les fonctions de base affines associées à deux points voisins intérieurs P_i et P_k de la triangulation de géométrie Ω , alors on a :

$$2 \int \varphi_i \nabla \varphi_k ds = - \int_{\partial C_k \cap \partial C_i} \vec{n}_k dl$$

où \vec{n}_k est la normale extérieure à C_k .

Preuve : Considérons les notations de la figure 7 représentant les deux triangles T_1 et T_2 ayant chacun pour sommet P_i et P_k

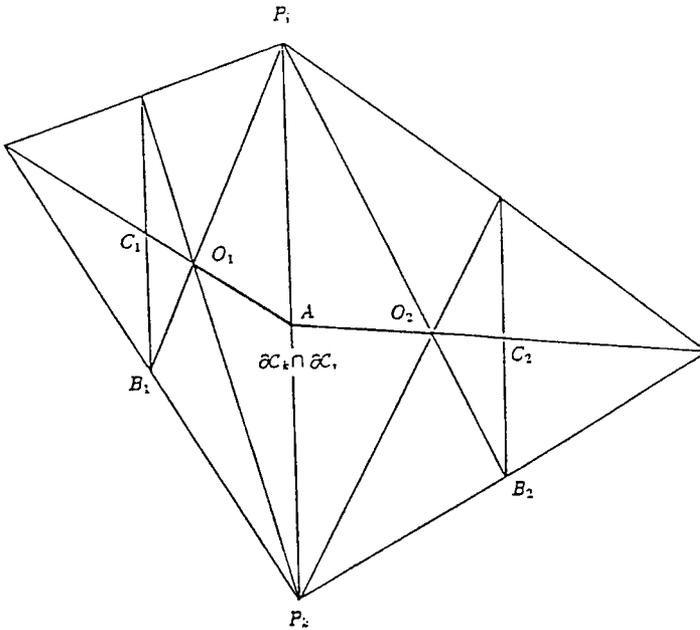


Figure 7. Triangles T_1 et T_2 ayant 2 sommets communs

Les points O_1 et O_2 sont les centres de gravité des triangles T_1 et T_2 . On obtient alors

$$\begin{aligned}
 2 \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_k ds &= 2 \int_{T_1} \varphi_i \nabla \varphi_k ds + 2 \int_{T_2} \varphi_i \nabla \varphi_k ds \\
 &= 2 \nabla \varphi_k(T_1) \int_{T_1} \varphi_i ds + 2 \nabla \varphi_k(T_2) \int_{T_2} \varphi_i ds \\
 &= 2 \nabla \varphi_k(T_1) \frac{\mathcal{A}(T_1)}{3} + 2 \nabla \varphi_k(T_2) \frac{\mathcal{A}(T_2)}{3} \\
 &= \frac{2}{3} \int_{T_1} \nabla \varphi_k ds + \frac{2}{3} \int_{T_2} \nabla \varphi_k ds.
 \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1, nous avons

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_k ds &= -\frac{2}{3} \int_{\partial C_k \cap T_1} \vec{n}_k dl - \frac{2}{3} \int_{\partial C_k \cap T_2} \vec{n}_k dl \\ &= -\frac{2}{3} \int_{\partial C_k \cap \partial C_i} \vec{n}_k dl - \frac{2}{3} \int_{B_1 O_1} \vec{n}_k dl \\ &\quad - \frac{2}{3} \int_{O_2 B_2} \vec{n}_k dl. \end{aligned}$$

La formule du gradient appliquée aux triangles $O_1 C_1 B_1$ et $O_2 C_2 B_2$ de normales extérieures \vec{n}_1 et \vec{n}_2 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_k ds &= -\frac{2}{3} \int_{\partial C_k \cap \partial C_i} \vec{n}_k dl - \frac{2}{3} \int_{(O_1 C_1) \cup (C_1 B_1)} \vec{n}_1 dl \\ &\quad - \frac{2}{3} \int_{(B_2 C_2) \cup (C_2 O_2)} \vec{n}_2 dl. \end{aligned}$$

Remarquons par un simple raisonnement géométrique que

$$\overrightarrow{C_1 B_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AP_k} = \overrightarrow{C_2 B_2},$$

$$\overrightarrow{C_1 O_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{O_1 A},$$

$$\overrightarrow{C_2 O_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{O_2 A}.$$

D'où nous déduisons

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_k ds &= -\frac{2}{3} \int_{\partial C_k \cap \partial C_i} \vec{n}_k dl - \frac{1}{3} \int_{O_1 A} \vec{n}_1 dl - \frac{1}{3} \int_{O_2 A} \vec{n}_2 dl \\ &= - \int_{\partial C_k \cap \partial C_i} \vec{n}_k dl. \end{aligned}$$

Proposition 1 : Si le vecteur \vec{u} est linéaire par triangle, les approximations éléments finis P1 et volumes finis duaux du terme en $div \vec{u}$ sont identiques.

Preuve : Pour un sommet P_i intérieur de Ω , l'approximation de $\text{div} \vec{u}$ par éléments finis devient après intégration par parties

$$\int_{\Omega} \varphi_i \text{div} \vec{u} ds = - \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \vec{u} ds.$$

Les vecteurs \vec{u} étant linéaire par triangle, il s'écrit à l'aide des fonctions de base φ_k de la façon suivante :

$$\vec{u} = \sum_k \vec{u}(P_k) \varphi_k.$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_i \text{div} \vec{u} ds &= - \sum_k \int_{\Omega} \vec{u}(P_k) \varphi_k \nabla \varphi_i ds \\ &= -\vec{u}(P_i) \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_i ds - \sum_{k \neq i} \vec{u}(P_k) \int_{\Omega} \varphi_k \nabla \varphi_i ds. \end{aligned}$$

En remarquant que, si P_i est un sommet intérieur,

$$\int_{\Omega} \varphi_k \nabla \varphi_i ds + \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_k ds = \int_{\Omega} \nabla(\varphi_i \varphi_k) ds = 0,$$

nous avons

$$\int_{\Omega} \varphi_i \text{div} \vec{u} ds = -\vec{u}(P_i) \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_i ds + \sum_{k \neq i} \vec{u}(P_k) \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_k ds.$$

La propriété des fonctions de base,

$$\sum_k \varphi_k = 1,$$

permet d'écrire

$$\int_{\Omega} \varphi_i \text{div} \vec{u} ds = \sum_{k \neq i} (\vec{u}(P_i) + \vec{u}(P_k)) \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \varphi_k ds.$$

Nous concluons à l'aide du lemme 2

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_i \operatorname{div} \vec{u} ds &= - \sum_{k \neq i} \frac{\vec{u}(P_i) + \vec{u}(P_k)}{2} \int_{\partial C_k \cap \partial C_i} \vec{n}_k dl \\ &= \sum_{k \neq i} \frac{\vec{u}(P_i) + \vec{u}(P_k)}{2} \int_{\partial C_k \cap \partial C_i} \vec{n}_i dl, \end{aligned}$$

où \vec{n}_i est la normale extérieure à la cellule C_i . Cette dernière expression est celle obtenue par le schéma des volumes finis centrés.

Proposition 2 : Si le vecteur \vec{u} est constant par triangle et si le scalaire c est constant par cellule, les approximations éléments finis P1 et volumes finis duaux du terme en $\operatorname{div}(c\vec{u})$ sont différentes.

Preuve : Pour un sommet P_i intérieur de Ω , l'approximation de $\operatorname{div}(c\vec{u})$ par éléments finis devient après intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_i \operatorname{div}(c\vec{u}) ds &= - \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot c\vec{u} ds \\ &= - \sum_{T_j \ni P_i} \int_{T_j} \nabla \varphi_i \cdot c\vec{u} ds \\ &= - \sum_{T_j \ni P_i} \vec{u}(T_j) \int_{T_j} c \nabla \varphi_i ds \\ &= - \sum_{T_j \ni P_i} \vec{u}(T_j) \sum_{P_k \in T_j} c(C_k) \mathcal{A}(T_j \cap C_k) \nabla \varphi_i(T_j) \\ &= - \sum_{T_j \ni P_i} \vec{u}(T_j) \sum_{P_k \in T_j} c(C_k) \frac{\mathcal{A}(T_j)}{3} \nabla \varphi_i(T_j) \\ &= - \sum_{T_j \ni P_i} \vec{u}(T_j) \sum_{P_k \in T_j} \frac{1}{3} c(C_k) \int_{T_j} \nabla \varphi_i ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_i \operatorname{div}(c\vec{u}) ds &= \sum_{T_j \ni P_i} \vec{u}(T_j) \sum_{P_k \in T_j} \frac{1}{3} c(C_k) \int_{\partial C_i \cap T_j} \vec{n} dl \\ &= \sum_{T_j \ni P_i} \vec{u}(T_j) \left\{ \frac{1}{3} \sum_{P_k \in T_j} c(C_k) \right\} \int_{\partial C_i \cap T_j} \vec{n} dl. \end{aligned}$$

Or la discrétisation par volumes finis transforme le terme $div(c\vec{u})$ (cf. [20]) en

$$\sum_{T_j \ni P_i} \sum_{\substack{P_k \in T_j \\ k \neq i}} \int_{\partial C_{ik}^j} c^* \vec{u} \cdot \vec{n} dl = \sum_{T_j \ni P_i} \vec{u}(T_j) \cdot \left\{ \sum_{\substack{P_k \in T_j \\ k \neq i}} c^*(\partial C_{ik}^j) \int_{\partial C_{ik}^j} \vec{n} dl \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} c^*(\partial C_{ik}^j) = & \left[\frac{1}{2} + \alpha_c \operatorname{sg} \left(\int_{\partial C_{ik}^j} \vec{u} \cdot \vec{n} dl \right) \right] c(P_i) \\ & + \left[\frac{1}{2} - \alpha_c \operatorname{sg} \left(\int_{\partial C_{ik}^j} \vec{u} \cdot \vec{n} dl \right) \right] c(P_j) \end{aligned}$$

et

$$0 \leq \alpha_c \leq 1.$$

Pour que les expressions des deux schémas coïncident, il aurait fallu poser

$$c^*(\partial C_{ik}^j) = \frac{1}{3} \sum_{P_k \in T_j} c(C_k).$$

En fait ceci reviendrait à prendre c constant par triangle et le résultat est alors donné par la proposition 1.

4.4. Conclusions

A partir de cette étude, nous nous apercevons que, sur les cas stationnaires simples, le schéma volumes finis proposé redonne les schémas classiques de calcul par éléments finis dont les propriétés de convergence et de stabilité sont bien connues. Les avantages de l'approche volumes finis apparaissent, dans les cas d'évolution plus compliqués avec forte convection :

1) pour le problème d'évolution, la matrice de masse du schéma volumes finis est automatiquement diagonale ;

2) pour le cas non homogène couplé etc..., la formulation volumes finis reste automatiquement conservative et est toujours simple à interpréter en termes de lois de conservation. Ceci est important à la fois dans des situations à changement de phase où les lois de conservation sont complexes et dans les problèmes hyperboliques non linéaires en présence de chocs ;

3) pour les problèmes à forte convection, la formulation en volumes finis permet un décentrage immédiat des termes de transport ; selon toute vraisemblance, on retrouve après décentrage les schémas à volumes finis pondérés étudiés par EYMARD et GALLOUET.

5. Approximation en temps

5.1. Schéma implicite

Nous reprenons l'équation en température [9] et les équations de transfert liquide et gazeux sous forme condensée [10-12] :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}_T \cdot \nabla T - \text{div} \lambda \nabla T = G(T, \beta_j \rho_j), \quad [24]$$

$$\frac{\partial \beta_i \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\beta_i \rho_i \vec{u}_i) = F_i(T, \beta_j \rho_j), \quad i = a, v, l. \quad [25]$$

Il suffit pour cela de retrancher l'équation [12] à [11] et de poser

$$F_a(T, \beta_j \rho_j) = 0,$$

$$F_v(T, \beta_j \rho_j) = -F_l(T, \beta_j \rho_j) = -F(T, \beta_j \rho_j).$$

Les équations [25] comportent deux non linéarités

- une locale sur le terme source F_i [13],
- une globale sur le terme de transport $\text{div}(\beta_i \rho_i \vec{u}_i)$ au vu des expressions des vitesses \vec{u}_i ([6], [7] et [8]).

On peut craindre a priori que ces deux non linéarités conduisent à des comportements numériques très différents. En particulier le terme de dissipation $F(T, \beta_j \rho_j) = \frac{RT}{\kappa M_v} \text{Log} \frac{P_v}{P_{vs}}$ présente de forts changements de gradient. Pour éviter tout problème de convergence numérique, on pourrait penser dans un premier temps séparer le traitement de ces deux non linéarités, c'est-à-dire discrétiser en temps les équations de transferts hydriques suivant le schéma de directions alternées de Peaceman-Rachford. Ce schéma s'est avéré stable numériquement [DAU 85] mais peu précis.

En effet, sur les premiers pas de temps et à chaque changement de pas de temps, apparaît une erreur significative sur les pressions. Pour une courbe de pas de temps a priori raisonnable par rapport à la durée totale de l'expérience (77 pas de temps), l'évolution de la pression de vapeur présente des sauts puis se stabilise si le pas de temps reste constant (fig. 8). Ceci nous a conduit à considérer un schéma totalement implicite en temps.

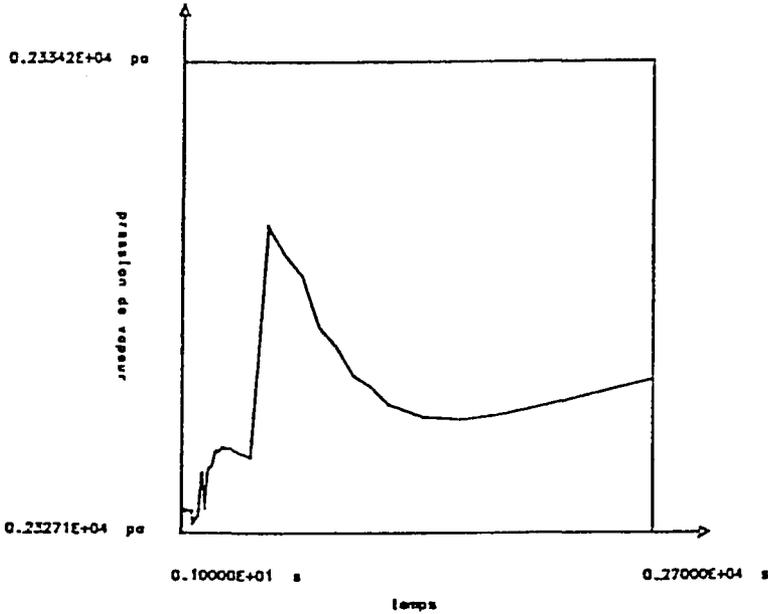


Figure 8. Evolution de la pression de vapeur en un point situé à 5 cm du bord

Les équations [24] et [25] s'écrivent, après discrétisation,

$$(\rho c)^{n+1} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \vec{u}_T^{n+1} \cdot \nabla T - \operatorname{div} \lambda^{n+1} \nabla T^{n+1} = G(T^{n+1}, (\beta_j \rho_j)^{n+1}), \quad [26]$$

$$\frac{(\beta_i \rho_i)^{n+1} - (\beta_i \rho_i)^n}{\Delta t} + \operatorname{div} (\beta_i \rho_i \vec{u}_i)^{n+1} = F_i(T^{n+1}, (\beta_j \rho_j)^{n+1}), \quad i = a, v, l. \quad [27]$$

Un tel schéma implicite a d'excellentes propriétés de convergence à long terme pour des problèmes dissipatifs [LET 90]. De

manière précise, ce schéma implicite est inconditionnellement stable. De plus, il est aussi stiff A stable. On peut donc s'attendre à ce que les oscillations observées pour des grands pas de temps dans le schéma de Peaceman-Rachford disparaissent dans ce schéma implicite.

La convergence de ce schéma implicite nous est fourni par PIRONNEAU ([PIR 88], p. 80-82) pour le problème simplifié suivant:

On cherche $X \in V_h$ tel que

$$\begin{aligned} \frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t} + \vec{u} \cdot \nabla X^{n+1} - \operatorname{div} K \nabla X^{n+1} &= F(t^{n+1}), \\ X^{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, t_{\max}[, \end{aligned} \quad [28]$$

avec V_h un espace d'éléments finis d'ordre 1, \vec{u} et K fixés tels que $\vec{u} \in L^\infty(\Omega \times]0, t_{\max}[)$, $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\Gamma \times]0, t_{\max}[$ et $K > 0$.

Proposition : Soit $X(t, x)$ la solution du problème continu :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla X - \operatorname{div} K \nabla X &= F(X) \quad \text{dans } \Omega \times]0, t_{\max}[, \\ X(0, x) &= X^o(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ X &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, t_{\max}[. \end{aligned} \quad [29]$$

Si l'on suppose

$$X \in L^2(0, t_{\max}, H^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial t} \in L^2(0, t_{\max}, H^1(\Omega)),$$

alors on a

$$\begin{aligned} (\|X^n - X(t^n, \cdot)\|_0^2 + K \Delta t \|\nabla(X^n - X(t^n, \cdot))\|_0^2)^{\frac{1}{2}} \\ \leq C(\Delta x + \Delta t). \end{aligned} \quad [30]$$

Ci-dessus, le maillage est supposé régulier avec un pas en espace Δx .

Cette proposition a été démontrée avec un pas de temps Δt constant.

Les commentaires relatifs à cette proposition ([PIR 88], p. 82) sont :

”On note que l'estimation d'erreur [30] est valable même avec $K = 0$. Ainsi on n'a pas besoin de décentrage en espace ; ceci est dû au schéma totalement implicite. Il reste que, comme avec les schémas d'Euler et de Crank-Nicolson, la constante C dans [30] dépend de $\|X\|_{H^2(\Omega)}$ et que, si K est très petit, le problème continu [29] a une couche limite et $\|X\|_{H^2(\Omega)}$ tend vers l'infini (si $X|_{\Gamma}$ est quelconque) comme $K^{-\frac{3}{2}}$. Ceci oblige donc soit à modifier $X|_{\Gamma}$ soit à prendre dans [28] $\Delta x \ll K^{-\frac{3}{2}}$ ”.

Pour éviter ce type de limitation sur le pas d'espace Δx , nous avons choisi a priori un schéma décentré pour la discrétisation en espace du terme de transport (cf. 4.3.).

Avec ce choix, nous avons donc affaire à un schéma stable pour tout pas de temps et toute constante de viscosité. Le prix à payer est la résolution algébrique à chaque pas de temps du système non linéaire couplé [26]-[27].

5.2. Résolution du problème non linéaire par Newton

Les expériences sur le séchage ou l'imbibition de milieux poreux ont mis en évidence un faible couplage entre les effets thermiques et les mouvements hydriques. Le traitement de ces équations est donc découplé.

La résolution de l'équation en température [26] est obtenue en linéarisant le terme de chaleur latente G et en se plaçant à $\beta_i \rho_i$ fixés. Cette méthode est explicite pour les termes de transport et implicite pour les termes sources.

Nous écrivons les équations [27] sous la forme :

$$\frac{(\beta\rho)^{n+1} - (\beta\rho)^n}{\Delta t} = H_1((\beta\rho)^{n+1}) + H_2((\beta\rho)^{n+1}),$$

au niveau de chaque cellule et pour chaque constituant $i = a, v, l$. La fonction H_1 (resp. H_2) désigne les termes de transport (resp. sources).

Nous avons résolu dans un premier temps ces équations par une méthode de Jacobi non linéaire : méthode explicite pour les

termes de transport et implicite pour les termes sources. Au vu des temps de calcul prohibitifs, nous avons opté pour la méthode de Newton qui s'est avérée satisfaisante.

L'algorithme global est donc le suivant :

boucle en temps

* résolution de l'équation en température [26] à $\beta_i \rho_i$ fixé et en linéarisant le terme source G ,

* calcul de $\beta_i \rho_i$ par une méthode de Newton à T fixé, boucle sur la k ème itération de Newton

- résolution du système linéaire non symétrique

$$\frac{(\beta\rho)_{k+1}^{n+1} - (\beta\rho)_k^n}{\Delta t} = H_1((\beta\rho)_k^{n+1}) + DH_1((\beta\rho)_k^{n+1})((\beta\rho)_{k+1}^{n+1} - (\beta\rho)_k^{n+1}) + H_2(\beta\rho)_k^{n+1} + DH_2(\beta\rho)_k^{n+1}((\beta\rho)_{k+1}^{n+1} - (\beta\rho)_k^{n+1}), \quad [31]$$

- test de convergence.

Dans l'équation [31], DH_1 et DH_2 sont les dérivées respectivement des termes de transport et des termes sources par rapport aux variables $\beta_a \rho_a, \beta_v \rho_v, \beta_l \rho_l$, prises en chaque noeud. Pour plus de détails, les calculs de DH_1 et DH_2 sont explicités dans [NIC 92]. Ces calculs sont très longs.

Après calcul des dérivées, [31] est un système linéaire par rapport aux inconnues $(\beta_i \rho_i)$, prises en chaque noeud. La matrice du système linéaire a la structure creuse classique d'une matrice d'éléments finis. Les seuls éléments non nuls correspondent à des noeuds qui appartiennent au même triangle. Elle est non symétrique et a de forts termes sur la diagonale (les termes en $1/\Delta t$).

Le système linéaire est résolu par une méthode de Gauss sans pivot.

Nous avons vérifié la convergence quadratique de notre algorithme de Newton. Par exemple, dans le test décrit ci-dessous, nous avons obtenu, au temps $t = 2200s$ et pour un pas de temps de $100s$,

| Itération Newton | $\frac{\ \Delta\beta_a\rho_a\ _\infty}{(\beta_a\rho_a)_{ref}}$ | $\frac{\ \Delta\beta_v\rho_v\ _\infty}{(\beta_v\rho_v)_{ref}}$ | $\frac{\ \Delta\beta_l\rho_l\ _\infty}{(\beta_l\rho_l)_{ref}}$ |
|------------------|--|--|--|
| 1 ^{ère} | $5.3 \cdot 10^{-4}$ | $3.4 \cdot 10^{-4}$ | $5.0 \cdot 10^{-4}$ |
| 2 ^{ème} | $7.3 \cdot 10^{-6}$ | $7.0 \cdot 10^{-8}$ | $8.4 \cdot 10^{-8}$ |
| 3 ^{ème} | $2.0 \cdot 10^{-13}$ | $1.3 \cdot 10^{-14}$ | $1.1 \cdot 10^{-14}$ |

5.2.1. Tests numériques

Nous reprenons le test où l'on a obtenu l'évolution de la pression de vapeur (fig. 8) dans deux cas distincts : soit la pression du gaz est supposée constante, soit cette hypothèse a été supprimée. Dans ce dernier cas, la variable $\beta_a\rho_a$ doit être calculée.

Les pas de temps sont donnés. Ils varient de 1s à 600 s. Sur une durée déterminée, le nombre de pas de temps est lié à la précision des évolutions des variables que l'on recherche. Par exemple, dans le deuxième test, les pas de temps sont petits au début des calculs pour obtenir une évolution de la pression d'air très régulière (fig. 9). Dans les deux cas, le schéma de Newton converge en 3 ou 4 itérations.

Les évolutions correspondantes à ces deux tests sont les mêmes qu'elles soient obtenues par le schéma de Jacobi ou de Newton (fig. 9). Simplement, les pas de temps dans Newton sont beaucoup plus grands.

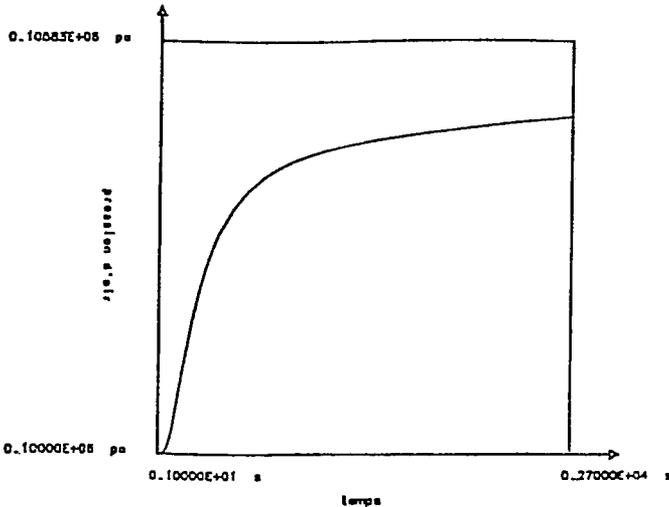


Figure 9. Evolution de la pression d'air en un point situé à 5 cm du bord

6. Simulations numériques

6.1. Un milieu modèle : le mortier

Les calculs présentés dans ce chapitre ont été effectués suivant le schéma de Newton (cf. 5.2.). Pour mettre en valeur certains comportements physiques, nous avons choisi de prendre des cas simples de séchage ou d'imbibition d'un milieu poreux modèle: le mortier. Nous allons préciser les caractéristiques physiques nécessaires aux différentes simulations numériques.

Les caractéristiques du mortier de ciment sont tirées des travaux de J.F. DAIAN [DAI 86] :

1) la porosité

$$\varepsilon = 0.17m^3/m^3,$$

d'où l'on déduit la teneur en squelette

$$\beta_s = 1 - \varepsilon,$$

2) la masse volumique du squelette ρ_s ,

$$\rho_s = 2070kg/m^3,$$

3) la masse volumique de l'eau liquide

$$\rho_l = 1000kg/m^3,$$

4) les capacités calorifiques à volume constant du squelette c_s , de l'air c_a , de la vapeur d'eau c_v et de l'eau liquide c_l ,

$$c_s = 800J/kg.K,$$

$$c_a = 719.82J/kg.K,$$

$$c_v = 1523.34J/kg.K,$$

$$c_l = 4185J/kg.K,$$

5) la constante des gaz parfaits

$$R = 8.314J/mol.K,$$

6) les masses molaires de l'air et de l'eau

$$M_a = 29.10^{-3} \text{ kg/mol},$$

$$M_v = 18.10^{-3} \text{ kg/mol},$$

7) la chaleur latente de vaporisation de l'eau

$$L_o = 3.3313 \cdot 10^6 \text{ J/kg},$$

8) la pression de vapeur saturante de l'eau "libre"

$$\text{Log} P_{vs}^o(T) = 68.10959 - \frac{7212.254}{T} - 6.297131 \text{ Log} T$$

avec T exprimé en degré Kelvin et P_{vs}^o en pascal,

9) le module de l'accélération de la pesanteur

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

10) la fonction d'interaction $h(\beta_l)$ (fig. 2) obtenue via l'isotherme de sorption du milieu considéré (fig. 1), mise sous la forme analytique suivante :

$$h(\beta_l) = \frac{b_1}{\beta_l^2} + b_2 \beta_l + b_3 \quad \text{si } \beta_l \in]0, \beta_1],$$

$$h(\beta_l) = \frac{a_1}{\varepsilon - \beta_l} + \frac{(\varepsilon - \beta_l)(a_2 \beta_l^3 + a_3 \beta_l^2 + a_4 \beta_l + a_5)}{a_6 \beta_l + a_7} \quad \text{si } \beta_l \in [\beta_1, \varepsilon[$$

où a_i, b_i, β_1 sont les paramètres suivants :

$$\beta_1 = 0.01 \text{ m}^3 / \text{m}^3,$$

| a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 | a_7 |
|-----------------------|-------|-------|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| $2.52 \cdot 10^{-12}$ | -1. | 0.44 | $-6.80 \cdot 10^{-2}$ | $3,65 \cdot 10^{-3}$ | $2.32 \cdot 10^{-2}$ | $-2.27 \cdot 10^{-4}$ |

| b_1 | b_2 | b_3 |
|-------|-------------------|--------------------|
| 5.72 | $1.11 \cdot 10^7$ | $-1.68 \cdot 10^5$ |

11) la conductivité thermique λ du milieu poreux

$$\lambda = 1. \text{ W/m.K},$$

12) la perméabilité de la phase liquide est définie par un spline cubique à partir des valeurs suivantes :

| | | | | | |
|--------------------|----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\beta_l(m^3/m^3)$ | 0. | 0.06 | 0.08 | 0.10 | 0.17 |
| $K_l(m^2/s.P_a)$ | 0. | 2.10^{-19} | 2.10^{-18} | 2.10^{-17} | 2.10^{-16} |

13) la perméabilité de la phase gazeuse est définie par un spline cubique à partir des valeurs suivantes :

| | | | | | |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------|
| $\beta_g(m^3/m^3)$ | 0. | 0.07 | 0.09 | 0.11 | 0.17 |
| $K_g(m^2/s.P_a)$ | 10^{-14} | 10^{-15} | 10^{-16} | 10^{-17} | 0. |

14) le coefficient de diffusion de vapeur d'eau dans l'air est défini par un spline cubique à partir des valeurs suivantes :

| | | | |
|---------------------|--------------|----------------|----------------|
| $\beta_l(m^3/m^3)$ | 0. | 0.022 | 0.037 |
| $K_{av}(m^2/s.P_a)$ | 2.10^{-12} | $3.7.10^{-12}$ | $6.7.10^{-12}$ |

| | | | |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|
| $\beta_l(m^3/m^3)$ | 0.05 | 0.06 | 0.17 |
| $K_{av}(m^2/s.P_a)$ | $1.1.10^{-12}$ | $1.5.10^{-11}$ | $3.5.10^{-11}$ |

Les trois splines cubiques précédents sont calculés en prenant les dérivées secondes nulles aux extrémités de l'intervalle d'étude comme conditions limites.

6.2. Remontée capillaire

6.2.1. Description du problème traité

Nous considérons une éprouvette de mortier de hauteur 16 cm et de base 4 cm, sa partie latérale étant imperméabilisée. A l'instant $t = 0$, la base est mise en contact avec de l'eau liquide et nous analysons la remontée capillaire.

Le maillage utilisé est régulier et formé de triangles isocèles. Il comporte 512 éléments et 297 noeuds. Le pas d'espace h est de l'ordre du demi centimètre.

La remontée capillaire est observée sur une durée de 1 jour. Le pas de temps croît de 0.05 s à 1000 s. Les pas de temps initiaux sont petits pour mieux prendre en compte les conditions limites.

Dans ce calcul nous avons choisi

- de prendre la température uniforme et constante en espace et en temps ($T = 20^\circ C$),
- de négliger les effets dissipatifs sur le changement de phase ($k \approx 0$),
- de négliger la gravité.

Les conditions initiales sont uniformes en espace :

$$\beta_l = 0.11,$$

$$HR(\beta_l = 0.11) = 0.97,$$

$$P_g = 1.013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

L'éprouvette est soumise aux conditions aux limites suivantes:

- sur la surface latérale, une condition de Neumann (condition de Fourier-Robin [16] avec $\alpha_i = q_i = 0$) est imposée sur les trois inconnues $\beta_a \rho_a, \beta_v \rho_v$ et $\beta_l \rho_l$.

- sur la base, nous imposons une condition de Dirichlet [14] variant linéairement entre l'instant 0 et l'instant 60s où l'on obtient

$$\beta_l^{ext} = 0.16983,$$

$$HR^{ext}(\beta_l^{ext}) = 1.,$$

$$P_g^{ext} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2,$$

- sur la dernière extrémité, nous imposons une condition de Dirichlet qui permet de maintenir les conditions initiales.

Notons que la valeur de β_l^{ext} concernant la base de l'éprouvette a été fixée de telle sorte que la pression d'eau liquide sur cette surface vaille une atmosphère. C'est bien la valeur de la pression de l'eau qui affleure l'éprouvette.

Le temps de calcul c.p.u. a été de 3h46mn sur sun 4.

6.2.2. Présentation et analyse des résultats numériques

La remontée capillaire est générée par un gradient de pression d'eau qui a tendance à s'atténuer au cours du temps. Au bout de 3 heures le profil de la pression d'eau est représentée figure 10.

Ainsi le liquide monte dans l'éprouvette à partir de sa base. Les vitesses d'eau sont maximales à la fin de la prise en compte des conditions aux limites ($t = 60s$) et de l'ordre de $10^{-5}m/s$. Ensuite, elles diminuent en module mais les mouvements d'eau concernent une plus grande partie de l'éprouvette.

En un point donné, la teneur en eau β_l et la pression de vapeur augmentent régulièrement au cours du temps. Par contre, la pression du gaz P_g évolue de manière différente (fig. 11) ; elle passe par un maximum. En fait l'eau qui remonte dans l'éprouvette comprime la phase gazeuse. Une surpression est donc créée puis le gaz a tendance à s'échapper soit par le haut de l'éprouvette soit par sa base. Expérimentalement nous observons la formation de bulle d'air dans l'eau liquide affleurant cette paroi. Cette surpression s'amortit pour laisser la place à un champ de pression de gaz uniforme (fig. 12).

Nous avons comparé les résultats numériques obtenus en supposant la pression du gaz constante en temps et en espace : nous n'avons remarqué aucun effet du changement de la pression du gaz sur la cinétique de remontée capillaire.

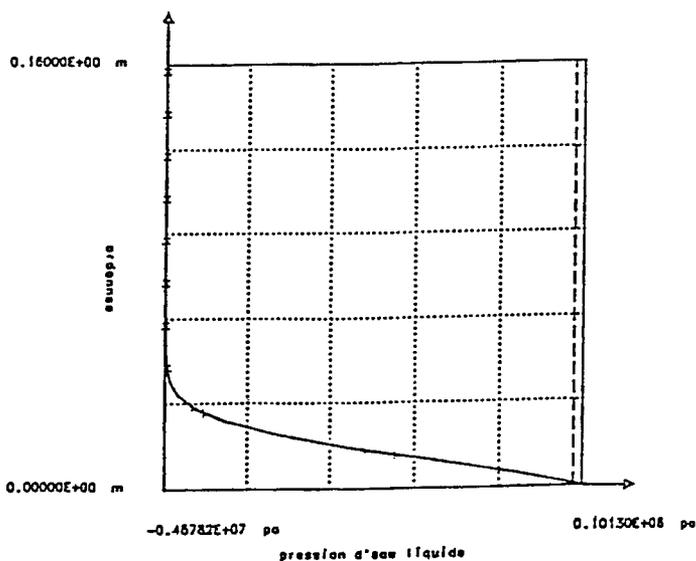


Figure 10. Profil vertical de la pression d'eau liquide au temps $t = 3h$. Remontée capillaire dans un mortier

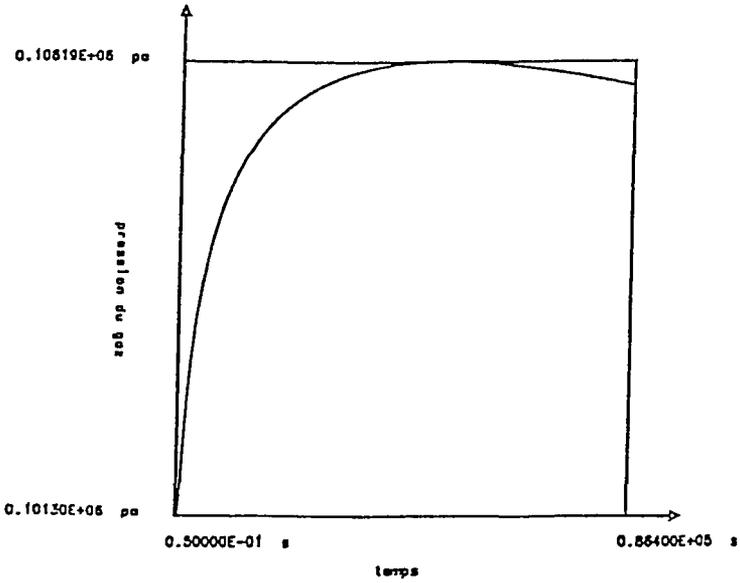


Figure 11. Evolution de la pression du gaz à 3cm de la base de l'éprouvette. Remontée capillaire dans un mortier

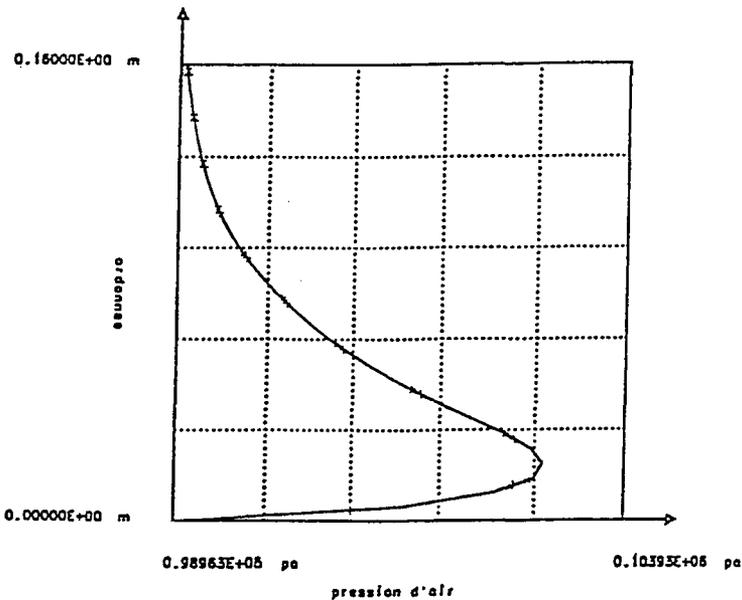


Figure 12. Profil vertical de la pression d'air au temps $t = 3h$. Remontée capillaire dans un mortier

6.3. Effets hystérétiques

6.3.1. Description du problème traité

Nous voulons étudier ici les effets hystérétiques sur un cycle de sorption-désorption. Pour cela nous considérons une paroi en mortier de 15cm d'épaisseur dont ses deux surfaces seront en contact avec une ambiance humide puis une ambiance sèche.

Le maillage utilisé est régulier et formé de triangles isocèles. Il comporte 1800 éléments et 961 noeuds. On se ramène au cas unidimensionnel par des conditions limites adéquates.

La durée de l'expérience est de 60 jours. Le pas de temps croît de 10 s à 86400 s pour la prise en compte de nouvelles conditions limites et reste constant à 86400 s sinon.

Dans ce calcul, nous avons choisi

- de prendre la température et la pression du gaz uniformes et constantes en espace et en temps ($T = 20^{\circ}C, P_g = 1.013 \cdot 10^5 N/m^2$)

- de prendre en compte les effets dissipatifs sur le taux de changement de phase

$$k = 10^{10} Jm^3 s/kg^2,$$

- de négliger la gravité.

Les conditions initiales sont uniformes en espace :

$$\beta_l = 0.02,$$

$$HR(\beta_l = 0.02) = 0.096.$$

Les conditions limites sont les suivantes :

- sur deux côtés opposés du carré, nous imposons une condition de Neumann sur les inconnues $\beta_v \rho_v$ et $\beta_l \rho_l$,

- sur les deux autres côtés, nous imposons des conditions de Dirichlet variant linéairement entre l'instant 0 s et l'instant 60 s où l'on obtient

$$\beta_l^{ext} = 0.1,$$

$$HR(\beta_l^{ext}) = 0.95,$$

puis ces valeurs restent constantes jusqu'au temps 864000 s (10 jours) à partir duquel elles varient à nouveau linéairement pour aboutir au temps 1728000 s aux valeurs initiales

$$\beta_l = 0.02,$$

$$HR(\beta_l = 0.02) = 0.096.$$

Le temps de calcul c.p.u. a été de 2h42mn pour 106 pas de temps.

6.3.2. Présentation et analyse des résultats numériques

En un point donné de la paroi, la teneur en eau liquide et l'humidité relative sont croissantes puis décroissantes en temps (fig. 13). Le maximum de ces évolutions apparaît d'autant plus tardivement que le point se situe loin des bords de la paroi.

Dans le plan teneur en eau liquide β_l - humidité relative HR , nous obtenons des boucles d'hystérésis telles que celle représentée dans la figure 14. Nous remarquons que les points (β_l, HR) ont très rapidement tendance à revenir sur la courbe de sorption à l'équilibre $HR = \text{Log} \frac{P_{vs}}{P_{vs}^0}(\beta_l)$, ce qui implique $P_v = P_{vs}$.

Expérimentalement, après un cycle de sorption-désorption, pour les milieux poreux présentant des phénomènes hystérétiques, l'état d'équilibre obtenu ne vérifie pas $P_v = P_{vs}(\beta_l)$.

Donc la dissipation sur le taux de changement de phase, [BRU 62] même si on obtient des boucles d'hystérésis, ne permet pas de décrire des phénomènes hystérétiques dans différents états d'équilibre. Nous avons, en fait, une hystérésis "dynamique".

6.4. Séchage bidimensionnel

6.4.1. Description du problème traité

Nous considérons une poutre de mortier de 30 cm d'épaisseur qui sèche sur trois de ces faces.

Le maillage utilisé est celui du test précédent.

Le séchage est observé sur une période de 6 mois. Le pas de temps croît de 10 s à 86400 s.

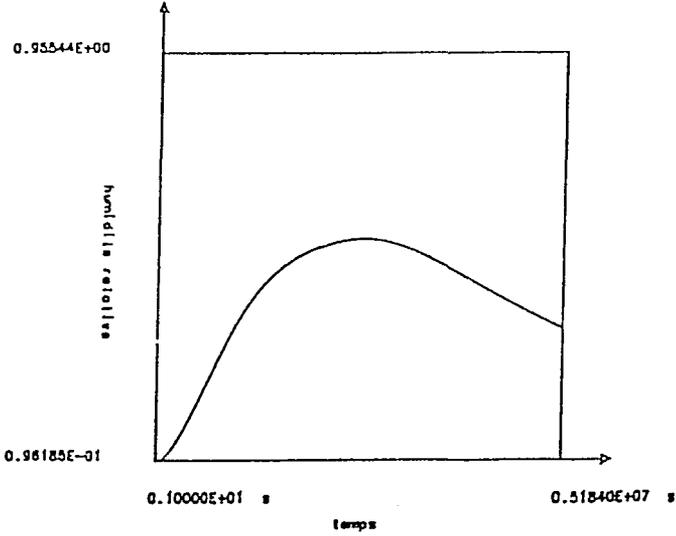


Figure 13. Evolution de l'humidité relative à 10cm du bord de la paroi. Effets hystérétiques

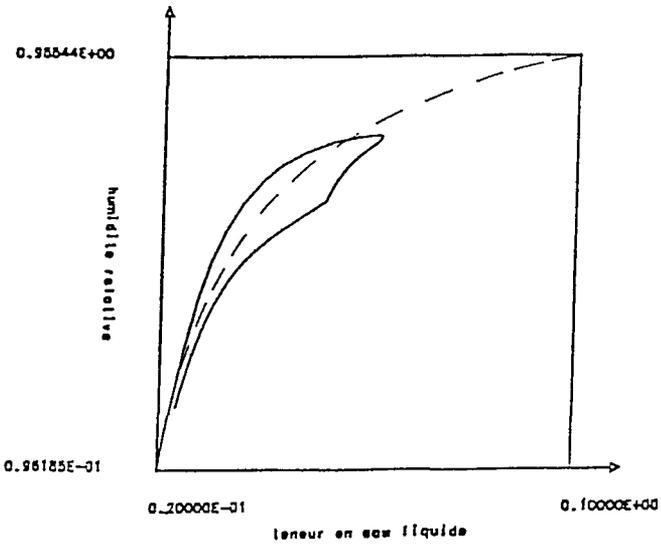


Figure 14. Evolution de l'humidité relative en fonction de la teneur en eau à 5cm du bord de la paroi. Isotherme de sorption à l'équilibre (en pointillés). Effets hystérétiques

Dans les calculs, nous avons choisi

- de prendre la température et la pression du gaz constante et uniforme en espace et en temps ($T = 20^{\circ}C$, $P_g = 1.013 \cdot 10^5 N/m^2$),
- de négliger les effets dissipatifs sur le changement de phase ($k \approx 0$),
- de négliger la gravité.

Les conditions initiales sont uniformes en espace :

$$\beta_l = 0.1,$$

$$HR(\beta_l = 0.01) = 0.95.$$

Les conditions de séchage sont données par :

- sur un côté, une condition de Neumann sur $\beta_v \rho_v$ et $\beta_l \rho_l$,
- sur les trois autres côtés, nous imposons une condition de Dirichlet variant linéairement entre l'instant 0 et l'instant 60 s où l'on obtient

$$\beta_l^{ext} = 0.02,$$

$$HR(\beta_l^{ext}) = 0.096.$$

Le temps de calcul c.p.u. a été de 5h32mn pour 233 pas de temps.

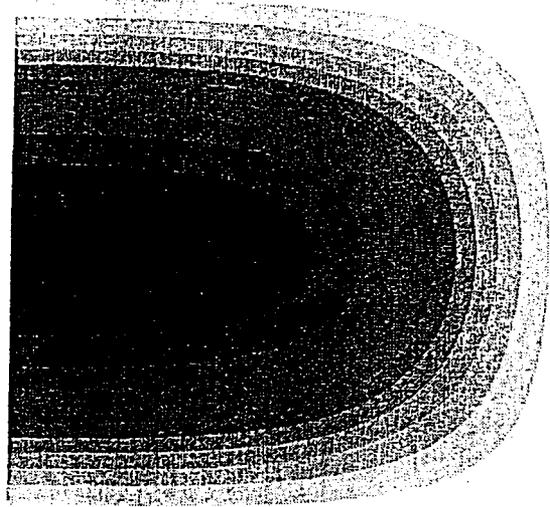
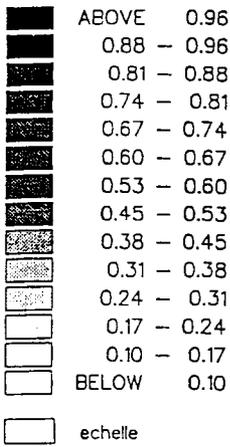
6.4.2. Présentation et analyse des résultats numériques

Au bout des six mois le séchage est presque total : les profils des différentes variables sont relativement plats.

Les isovaleurs au temps $t = 60$ jours sont représentées figure 15 pour l'humidité relative.

L'évolution du séchage est mis en évidence dans la figure 16 où sont représentés les profils verticaux de la teneur en eau aux instants 60s, 1j, 10j, 60j, 100j et 140j à 25cm du côté imperméable (celui où l'on a appliqué la condition de Neumann).

Ces courbes semblent physiquement acceptables. Le même calcul avec la température prise comme inconnue montre qu'elle reste constante et égale à $20^{\circ}C$. Ceci est dû à la lenteur du séchage du mortier.



 champ d humidite relative

Figure 15. *Champ d'humidité relative au temps $t = 60j$. Séchage bidimensionnel*

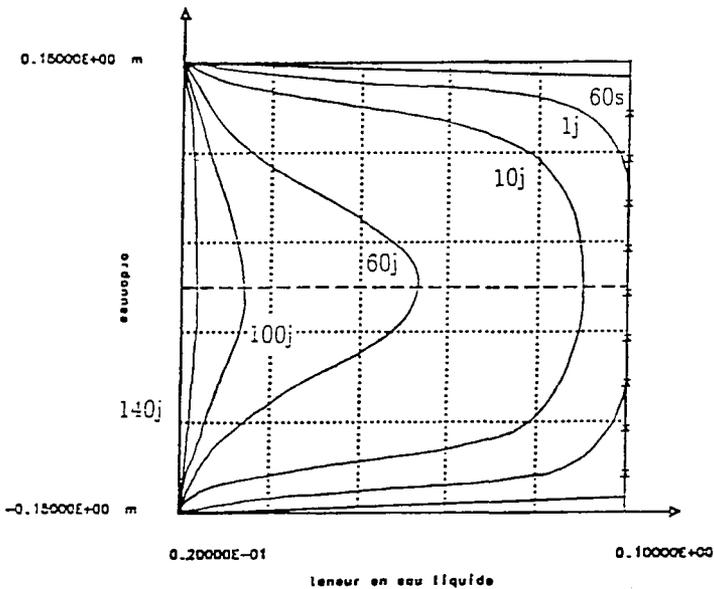


Figure 16. *Profils verticaux de la teneur en eau à différents temps, situés à 25 cm du côté imperméable. Séchage bidimensionnel*

7. Conclusion

Le modèle numérique présenté souligne les principaux phénomènes physiques rencontrés lors des transferts d'humidité au niveau macroscopique. Nous avons pu ainsi mettre en évidence leur influence respective. Par exemple si les mouvements d'eau ont une incidence sur la pression totale du gaz, en général il semble que la réciproque soit fautive. L'introduction d'une dissipation sur le taux de changement de phase permet d'obtenir des boucles d'hystérésis dynamiques. Cependant, ces dernières ne traduisent pas fidèlement la réalité : les milieux poreux présentent aussi des phénomènes hystérétiques dans différents états d'équilibre.

Du point de vue numérique, l'approche retenue privilégie

- le caractère conservatif de l'approximation,
- la stabilité.

Ceci nous a conduit à introduire une approche mixte volumes finis éléments finis quelque peu originale dans le cadre des milieux poreux et à utiliser un schéma implicite en temps. La résolution du système non linéaire par un algorithme de Newton est compliquée à programmer (lourdeur des expressions analytiques) mais efficace d'emploi.

A titre anecdotique, le décentrage paramétré des termes de transport n'a que très peu d'incidence sur les résultats.

8. Bibliographie

- [AVR 86] AURIAULT J.L., SANCHEZ-PALENCIA E., "Remarques sur la loi de Darcy pour les écoulements biphasiques en milieu poreux", Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Numéro spécial, p. 141-156, 1986.
- [BAB 81] BABA K., TABATA M., "On a conservative upwind finite element scheme for convection diffusion equations", RAIRO Numerical Analysis, vol. 15, 1, p. 3-25, 1981.
- [BLA 86] BLANCHARD D., Etude de problèmes d'évolution en mécanique des milieux dissipatifs, Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1986.

- [BLA 94] BLANCHARD D. et NICOLAS P., "Thermodynamics of phase changes and mass transfers in porous media", *European Journal of Mechanics, A/SOLIDS*, à paraître, 1994.
- [BRU 62] BRUHAT G., *Thermodynamique*, Masson, Paris, 1962.vol. 37, n° 2, p. 183-205, 1982.
- [CIA 78] CIARLET P.G., *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [DAI 86] DAIAN J.F., Processus de condensation et de transfert d'eau dans un matériau méso et macroporeux. Etude expérimentale du mortier de ciment, Thèse de Doctorat ès Sciences, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1986.
- [DAU 85] DAUTRAY R., LIONS J.L., *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Technologies*, t.1, Masson.
- [GER 73] GERMAIN P., *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, tome 1 : théorie générale, Masson et Cie, Paris, 1973.
- [HAL 75] HALPHEN B., NGUYEN QUOC SON, "Sur les matériaux standard généralisés", *Journal de Mécanique*, 14, p. 39-63, 1975.
- [LET 90] LE TALLEC P., *Numerical Analysis of Viscoelastic Problems*, Masson et Springer Verlag, 1990.
- [NIC 92] NICOLAS P., Modélisation mathématique et numérique des transferts d'humidité en milieu poreux, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1992.
- [PIR 88] PIRONNEAU O., *Méthode des éléments finis pour les fluides*, Masson, 1988.
- [ROS 88] ROSTAND P., STOUFFLET B., "Finite volume Galerkin methods for viscous gas dynamics", *Proceedings of the 2nd International Conference on Hyperbolic Problems*, Aachen Vieweg et rapport de recherche INRIA 863, 1988.
- [SIS 72] SISSOM L.E., PITTS D.R., *Elements of transport phenomena*, Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1972.