
Un nouvel élément fini du type B-spline pour l'analyse dynamique des coques de révolution

Ayech Benjeddou — Mohamed Ali Hamdi

*Division acoustique et vibrations industrielles
Laboratoire de génie mécanique pour les matériaux et les structures (LG2mS)
Université de technologie de Compiègne (UTC)
BP 649, Compiègne cedex*

RÉSUMÉ. *Un nouvel élément fini axisymétrique courbe du type B-spline, pour l'analyse des vibrations libres des coques minces de révolution, est présenté. Cet élément, basé sur la théorie de Kirchhoff, utilise les fonctions B-splines cubiques uniformes pour l'interpolation à la fois de la géométrie et des déplacements locaux. Il présente trois originalités par rapport aux éléments connus du même type : i) toutes les variables de contrôle (ou splines) sont éliminées au profit des trois déplacements nodaux pour les nœuds internes d'un super élément (ensemble d'éléments), et de leurs dérivées premières par rapport à l'abscisse curviligne pour les nœuds extrêmes ; ce choix des degrés de liberté (ddl) permet de réduire au minimum le nombre total de ddls par rapport aux éléments classiques. ii) une nouvelle approche pour la discrétisation du méridien, permettant de dissocier la géométrie et le comportement, est utilisée ; selon le problème posé, la géométrie ou le comportement peut être favorisé en augmentant le nombre de nœuds correspondant. iii) tous les paramètres induits par l'interpolation par les B-splines cubiques uniformes (espacement du paramétrage, tangentes aux bords, ...) sont gérés de manière automatique. Les performances de l'élément sont évaluées à l'aide de quatre cas tests très souvent cités. Les résultats sont comparés aux divers résultats analytiques, expérimentaux et numériques trouvés dans la littérature. Un très bon comportement de l'élément dans les différentes situations est observé.*

ABSTRACT. *A new curved axisymmetric B-spline finite element for the free vibrations of thin shells of revolution is presented. The B-spline element, which is based on classical thin shell theory uses the uniform cubic B-spline functions for the interpolation of geometry as well as local displacements. It introduces three new features over the other known B-spline elements : i) instead of the usual control (or spline) variables, only nodal displacements at the internal nodes of a superelement (a group of elements) and their first derivatives with respect to the meridional length at the end nodes are used as degrees of freedom of a superelement ; This choice reduces to the minimum the total number of degrees of freedom*

compared to standard elements. ii) a new approach for the discretization of the meridian, which dissociates the geometry and the behavior is used ; thus, according to the problem in hand either the geometry or the behavior can be favoured by increasing its corresponding number of nodes. iii) all the parameters of the uniform cubic B-spline interpolation (parametrization's spacing, end tangents, ...) are computed automatically. The efficiency and accuracy of the proposed element are evaluated by four often cited benchmark examples. The results are compared to the analytical, experimental and numerical solutions found in the literature. A very well behavior of the element in all the examples is observed.

MOTS-CLÉS : élément fini B-spline, vibrations libres, coques de révolution, B-splines cubiques uniformes.

KEY WORDS : B-spline finite element, free vibrations, shells of revolution, uniform cubic B-splines.

1. Introduction

Les coques minces de révolution sont largement utilisées dans les constructions navales, les industries spatiales, aéronautiques, chimiques et nucléaires. L'estimation des fréquences propres de ces structures est un sujet classique; il a été traité par diverses méthodes : (i) les méthodes exactes [KUN 88] ; (ii) les méthodes approchées [KUN 88, SOE 80] ; (iii) les méthodes expérimentales [DEL 80] ; (iv) la méthode des différences finies [BUS 84] ; la méthode des bandes finies [LI 90] ; la méthode des éléments finis [ALT 86, BHI 89, TOU 87, HEP 92, WEB 67, FAN 89, LUA 89]. Cette dernière est la plus utilisée grâce à sa souplesse et son efficacité à résoudre des problèmes complexes. Les méthodes (i), (ii) et (iii), quant à elles, présentent l'inconvénient principal de se limiter aux coques à géométrie et conditions limites simples ou idéalisées ou les deux à la fois.

La méthode des éléments finis a été utilisée dans l'analyse vibratoire des coques de révolution dès le début des années 60 [KAR 87]. Principalement, trois types de formulations ont été utilisées : la formulation en déplacement [BHI 89, TOU 87, HEP 92, WEB 67, FAN 89, LUA 89], la formulation mixte [ALT 86] et la formulation en déformations [HUA 89]. La plus grande difficulté rencontrée dans la méthode des déplacements réside dans la satisfaction simultanée des conditions de conformité, de déformation nulle pour des déplacements de corps rigides, de déformation constante, et enfin de géométrie arbitraire [VAL 77]. En outre, les approximations résultent de la modélisation, du type d'interpolation adoptée, de la plus ou moins bonne conformité des éléments et enfin des hypothèses inhérentes à la théorie des coques.

L'approche la plus utilisée pour l'analyse des coques de révolution est basée sur la représentation des déplacements, des charges ainsi que des propriétés de la coque par des séries de Fourier dans la direction circonférencielle combinée avec une discrétisation par éléments finis axisymétriques droits ou courbes dans la direction méridienne. Les avantages et les inconvénients de cette approche sont discutés dans

[BUS 84, BHI 89] et sa théorie est bien détaillée dans [PRO 75, BAT 92]. Une liste de logiciels spécialisés est aussi fournie dans [BUS 84].

Plusieurs chercheurs ont signalé l'importance primordiale de la géométrie dans l'étude des coques [BAR 83, KIM 83, COO 74, LUC 79]. En effet pour les coques, la mesure des tangentes locales, des courbures voire des dérivées des courbures est souvent nécessaire au calcul par éléments finis ; une mauvaise représentation de la géométrie peut induire des erreurs plus grossières que celles provenant d'une interpolation médiocre [VAL 77]. C'est pourquoi les éléments courbes sont préférés aux éléments droits surtout pour représenter les coques de révolution à double courbure. Diverses techniques de la représentation de la géométrie sont discutées dans [BAT 92, LUC 79].

La plupart des éléments courbes sont basés sur la méthode des déplacements en coordonnées globales (cartésiennes) [GUP 86] ou locales (curvilignes) [FAN 89, LUA 89]. Un problème majeur avec les éléments courbes en composantes curvilignes est celui relatif à la représentation des mouvements de corps rigides. Des approximations élevées doivent être utilisées pour le déplacement méridien si on utilise le déplacement pour éviter une rigidité parasite ou blocage membranaire [BAT 92]. Certains auteurs ont utilisé des approximations des déplacements permettant une représentation explicite des mouvements de corps rigides [LUC 79]. D'autres ont préféré développer des fonctions de base de manière à satisfaire la condition de déformation nulle pour un déplacement rigide [HEP 92]. Une représentation implicite acceptable nécessite une approximation polynomiale au moins quadratique pour les déplacements membranaires [BAT 92]. Pour une formulation curviligne, si les approximations de la géométrie et des déplacements sont identiques, les modes rigides sont correctement représentés [BAT 92]. En d'autres termes, l'utilisation d'une formulation isoparamétrique résoud complètement le problème des modes rigides à condition que la géométrie soit correctement représentée [HAN 86] i.e. la base d'approximation de la géométrie doit être contenue dans celle des approximations des déplacements [BAT 92].

La condition de conformité dans les éléments courbes en formulation curviligne des déplacements peut être obtenue de façon de plus en plus approchée par l'utilisation d'interpolation de degré croissant [VAL 77]. L'introduction du cisaillement transverse permet de réaliser aisément la conformité, mais engendre d'importantes rigidités relatives à cette déformation, ce qui rend certains problèmes mal conditionnés [BAT 92]. Le choix du degré d'interpolation est guidé par le fait que ce degré soit inférieur d'une unité par rapport à l'ordre maximal des dérivations existant dans l'énergie de déformation. Cependant certains auteurs préconisent un ordre au moins identique et même, au moins égal à 5 de façon à obtenir une bonne précision sur les contraintes [TOU 87]. D'autres préconisent le même degré pour tous les champs de déplacement et utilisent l'ordre 3 [TOU 87, COO 74], les termes surabondants permettant une meilleure satisfaction de la condition de déformation constante.

Dans ce qui suit nous allons présenter la formulation et les résultats d'un nouvel élément axisymétrique courbe pour l'estimation des fréquences propres des coques de révolution.

Cet élément présente les caractéristiques suivantes :

1. C'est un élément isoparamétrique dans le sens où la géométrie et les déplacements sont représentés par les mêmes fonctions de base [DHA 84]. Les B-splines cubiques uniformes ont été retenues comme fonctions d'interpolation des coordonnées et des inconnues physiques parce qu'elles sont plus régulières que les fonctions polynomiales par morceaux telles que celles de Lagrange ou d'Hermite. Une précédente étude a été menée sur l'interpolation par les B₃-splines uniformes dans une approche d'éléments finis [GUE 93].

2. C'est un élément conforme dans le sens où il satisfait les trois critères de convergence [TRO 92] :

— Des continuités C^3 à l'intérieur de chaque élément et C^2 entre les éléments sont garanties par définition même des B-splines cubiques. Un ensemble d'éléments forme un super élément à l'intérieur duquel la continuité est C^2 et entre les différents super éléments du modèle une continuité C^1 est garantie. Cette notion de super élément a été introduite par Gupta [GUP 86] pour mieux modéliser les coques branchées ou les discontinuités dues à des variations brusques d'épaisseur ou de courbure.

— les modes de corps rigides sont correctement représentés grâce à l'utilisation simultanée des B-splines, synonymes d'une géométrie très régulière, et la formulation isoparamétrique [HAN 86].

— les modes de déformations constantes sont mieux satisfaits grâce aux degrés d'interpolation identiques des différentes composantes du déplacement [VAL 77].

3. On démontre que pour une interpolation cubique à la fois des composantes tangentielles et normale du déplacement, le blocage en membrane, s'il existe, est faible et par suite non gênant [BAT 92].

4. Enfin, la méthode des déplacements en coordonnées curvilignes est retenue; ses inconvénients sont réduits par les choix ci-dessus.

Un certain nombre de chercheurs ont développé des éléments finis du Type B-spline dès le début des années 80 [FAN 89, LUA 89, KIM 83, GUP 86]. Les particularités de ces éléments et leurs performances sont discutées dans [GUE 93]. Nous nous contentons de présenter les originalités de notre élément par rapport aux éléments mentionnés ci-dessus, à savoir :

— Une nouvelle approche du choix des degrés de liberté est utilisée. Elle consiste à éliminer, par une procédure d'inversion décrite dans [GUE 93], toutes les variables de contrôle (ou splines) au profit des déplacements nodaux à l'intérieur d'un super élément et de leurs dérivées premières par rapport à l'abscisse curviligne pour les nœuds extrêmes.

— La géométrie du méridien et le comportement de la coque sont dissociés de manière à pouvoir favoriser l'un ou l'autre selon le problème posé.

— Tous les paramètres d'interpolation par les B-splines cubiques uniformes (espacement du paramétrage, tangentes aux bords, ...) sont gérés de manière automatique.

2. Description de l'élément

Dans cette section nous rappelons brièvement la procédure d'interpolation par les B₃-splines uniformes et son application à la représentation de la géométrie et des déplacements d'un élément. Les détails de cette technique sont fournis dans [GUE 93].

2.1. Interpolation par les B₃-splines uniformes

Les fonctions B₃-splines uniformes standards sont des fonctions polynomiales par morceaux qui sont deux fois continûment différentiables sur tout le domaine d'interpolation. Elles ont un caractère local puisqu'elles sont non nulles que sur quatre sections successives. Ainsi sur une section, au plus quatre fonctions de base sont non nulles (figure 1).

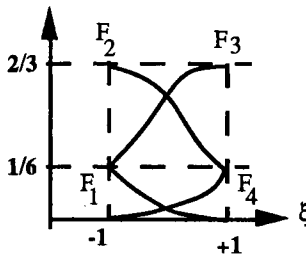


Figure 1. Un élément et ses quatre fonctions de base

On démontre [GUE 93], que ces fonctions s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_1(\xi) = \frac{1}{48}(-\xi^3 + 3\xi^2 - 3\xi + 1) \\ F_2(\xi) = \frac{1}{48}(3\xi^3 - 3\xi^2 - 15\xi + 23) \\ F_3(\xi) = F_2(-\xi) \\ F_4(\xi) = F_1(-\xi) \end{cases} \quad [1]$$

ξ est un paramètre réduit du paramétrage t , définie par :

$$\xi = \frac{2t - t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} ; \quad -1 \leq \xi \leq +1 \quad \text{pour } t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad [2]$$

où $t_{i+1} - t_i$, représente l'espaceur équidistant du paramétrage.

L'interpolation d'une grandeur f , qui peut être une coordonnée géométrique ou une composante du déplacement s'écrit, en fonction des fonctions de base ci-dessus, pour la i ème section comme suit :

$$f_i(\xi) = \langle N(\xi) \rangle [C] \{ \alpha_{i4} \} \tag{3}$$

avec $\langle N(\xi) \rangle = \langle \xi^3 \ \xi^2 \ \xi \ 1 \rangle$ et $[C] = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \\ -3 & -15 & 15 & 3 \\ 1 & 23 & 23 & 1 \end{bmatrix}$

α_i , sont des variables de contrôle ou variables splines qui, lorsqu'elles sont reliées entre elles par des segments de droite, forment un polygone, dit de contrôle. Elles s'obtiennent par l'écriture des conditions d'interpolation aux nœuds de chaque section :

$$\begin{cases} f_i(-1) = f_i & ; i=1,2,\dots,n-1 \\ f_{n-1}(+1) = f_n \end{cases} \tag{4}$$

où n , est le nombre de nœuds du modèle.

Utilisant l'expression [3], nous obtenons :

$$\frac{1}{6}(\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1}) = f_i \quad ; i=1,2,\dots,n \tag{5}$$

Dans ce système, il y a deux inconnues, dites fictives, α_0 et α_{n+1} . Ceci nécessite donc deux équations supplémentaires. Diverses techniques, pour les ajouter, ont été mentionnées dans [GUE 93]. Nous rappelons, dans ce qui suit, celle qui nous garantit une continuité C^1 aux bords, à savoir la méthode des dérivées premières.

En paramétrant par l'abscisse curviligne, les deux conditions au premier et dernier nœuds s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{1}{4J_1}(\alpha_2 - \alpha_0) = \left(\frac{df}{ds}\right)_1 \\ \frac{1}{4J_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}) = \left(\frac{df}{ds}\right)_n \end{cases} \quad ; \quad J = \frac{ds}{d\xi} = \frac{h}{2} \tag{6}$$

Le système [5] s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 [T_{n+2}]\{D_{n+2}\} &= \{d_{n+2}\}; \{d_{n+2}\} = \left\langle \left(\frac{df}{ds}\right)_1 f_1 f_2 \dots f_{n-1} f_n \left(\frac{df}{ds}\right)_n \right\rangle^t \quad [7] \\
 [T_{n+2}] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4J_1} & 0 & \frac{1}{4J_1} & & & & & & & & & \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & & & & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & & & & \\ & & & & & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & & & & \\ & & & & & \frac{1}{4J_n} & 0 & \frac{1}{4J_n} & & & & \end{bmatrix}; \{D_{n+2}\} = \langle \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \rangle^t
 \end{aligned}$$

C'est ce système qui sera résolu ou inversé selon qu'on interpole des coordonnées ou des déplacements (cf. §2.3 et §2.4 ci-après).

2.2. Discrétisation du méridien

Le méridien d'une coque de révolution est d'abord découpé en un certain nombre de sections définies par le nombre de points géométriques donnés (ri, zi). L'ensemble des sections géométriques peuvent définir un ou plusieurs segments dits super éléments. D'autre part une section géométrique peut être découpée en plusieurs sous-sections définissant les éléments proprement dits ; les nœuds définissant les sections géométriques sont appelés nœuds géométriques et ceux définissant les sous-sections ou éléments sont appelés nœuds structure. La figure 2 illustre la discrétisation d'un méridien de la coque.

Comme nous le constatons sur la figure 2, toutes les numérotations sont locales ; la relation entre les variables réduites géométrique et structure pour le ième élément de la k ième section géométrique est donc donnée par :

$$\mu = \frac{1}{m-1}(\xi + 2i - m) \quad ; \quad \xi \in [-1, +1] \text{ et } m \geq 2 \quad [8]$$

où m, est le nombre de nœuds structure dans une section géométrique ; ce nombre est constant dans un super élément à cause du caractère uniforme des fonctions de base utilisées.

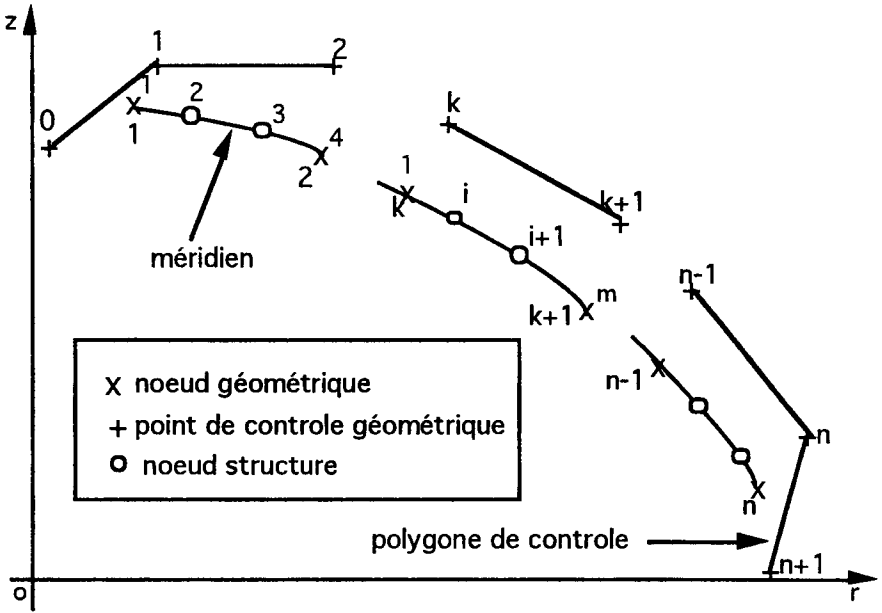


Figure 2a. Un super élément et son polygone de contrôle

Dans l'espace paramétrique, cette discrétisation se présente ainsi :

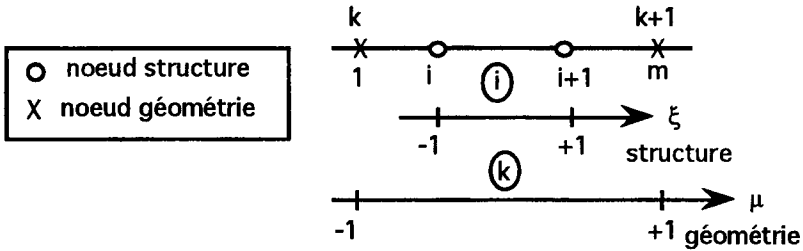


Figure 2b. Un élément (la sous-section) et son support géométrique

Cette discrétisation présente l'avantage de pouvoir dissocier la géométrie et le comportement physique. En effet, une géométrie simple, un cylindre par exemple, sera définie par un nombre réduit de nœuds géométriques et un nombre plus important de nœuds intermédiaires pour modéliser la dynamique de la structure.

2.3. Géométrie d'un élément

La géométrie d'un élément est définie par les coordonnées cylindriques $(r_k(\mu), z_k(\mu))$ données par les relations d'interpolation [3], soit :

$$r_k(\mu) = \langle N(\mu) \rangle [C] \{ R_{k4} \} \quad ; \quad z_k(\mu) = \langle N(\mu) \rangle [C] \{ Z_{k4} \} \quad [9]$$

avec μ définie par [8] et $\langle N(\mu) \rangle$ et $[C]$ donnés par [3]. Le couple (R_k, Z_k) représente l'abscisse et l'ordonnée du k ième point de contrôle (figure 2a).

Le calcul des points de contrôle du méridien se fait séparément pour chaque coordonnée en résolvant le système [7] qui se transforme, grâce à la donnée des

tangentes aux bords $T_1 = \left(\frac{df}{ds} \right)_1$ et $T_n = \left(\frac{df}{ds} \right)_n$, en :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3f_1 + hT_1 \\ 6f_2 \\ \vdots \\ 6f_{n-1} - hT_n \\ 3f_n - hT_n \end{Bmatrix} \quad [10]$$

$$\alpha_0 = \alpha_2 - 2hT_1 \quad ; \quad \alpha_{n+1} = \alpha_{n-1} + 2hT_n$$

Les α_k représentent l'une des coordonnées R_k, Z_k des points de contrôle et les f_k , l'une des coordonnées des points donnés de la géométrie r_k, z_k ; μ est, exceptionnellement pour ce calcul, définie par [2].

La solution de ce système dépend des paramètres h, T_1 et T_2 ; leur influence sur la solution et diverses techniques de leur calcul ont été étudiées dans [GUE93]. Des algorithmes de résolution spéciaux, exploitant la topologie de la matrice du système [10], sont aussi indiqués dans cette même référence.

2.4. Interpolation des déplacements

Pour l'élément axisymétrique (figure 3), les déplacements en coordonnées de la coque sont exprimés par le produit des fonctions de formes B_3 -splines uniformes dans la direction méridienne et des fonctions harmoniques dans la direction circonférentielle.

La décomposition en série de Fourier suivant la direction circonférencielle s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} u(s, \theta) \\ w(s, \theta) \\ v(s, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(s) \\ w_0(s) \\ v_0(s) \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_n(s) \cos(n\theta) + \bar{u}_n(s) \sin(n\theta) \\ w_n(s) \cos(n\theta) + \bar{w}_n(s) \sin(n\theta) \\ v_n(s) \sin(n\theta) - \bar{v}_n(s) \cos(n\theta) \end{Bmatrix} \quad [11]$$

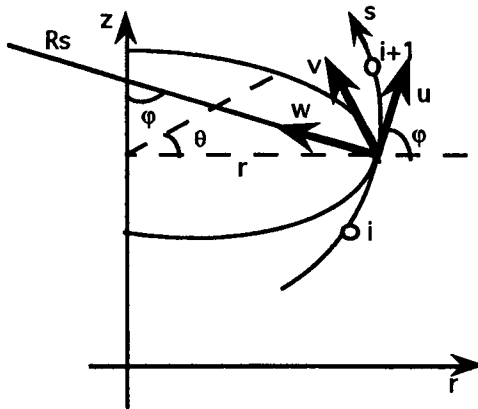


Figure 3. Un élément axisymétrique courbe

Le deuxième et le troisième terme dans la décomposition en série de Fourier ci-dessus représentent les modes symétriques et antisymétriques par rapport à $\theta=0$. En fait, on peut remarquer que les modes antisymétriques sont symétriques par rapport à $\theta=\pi/2$ [BAT 92] et on peut donc conclure que pour $n \neq 0$, les modes symétriques et antisymétriques de même indice n auront les mêmes fréquences propres de vibration. Pour obtenir les composantes de Fourier du mode antisymétrique à partir du mode symétrique, $u(s)$ et $w(s)$ restent inchangés alors que $v(s)$ change de signe. Nous retenons pour la suite des calculs que les modes symétriques.

Les fonctions B3-splines uniformes sont ensuite utilisées pour interpoler les déplacements le long du méridien selon la formule [3] :

$$u_n(\xi) = \langle N(\xi) \rangle [C] \left\{ U_{n,i4} \right\} ; \text{idem pour } w_n(\xi), v_n(\xi) \quad [12]$$

ξ , étant la variable réduite montrée sur la figure 2b.

Notons que les variables $U_{n,i}$, $W_{n,i}$, et $V_{n,i}$ ne sont pas rattachées aux nœuds physiques de l'élément ; ce sont uniquement des variables de contrôle des déplacements nodaux (physiques) $u_{n,i}$, $w_{n,i}$, $v_{n,i}$ et leurs dérivées.

Introduisant [12] dans [11], et après une réorganisation des variables, nous obtenons :

$$\{d_3(\xi, \theta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} [t_{3n}(\theta)] [NC_3(\xi)] \{D_n\} \quad [13]$$

$$[t_{3n}(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(n\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(n\theta) \end{bmatrix}; \quad \{d_3(\xi, \theta)\} = \langle u(\xi, \theta) \ w(\xi, \theta) \ v(\xi, \theta) \rangle^t$$

$$\langle D_n \rangle = \langle u_{n,i-1} \ w_{n,i-1} \ v_{n,i-1} \ | \ u_{n,i} \ w_{n,i} \ v_{n,i} \ | \ u_{n,i+1} \ w_{n,i+1} \ v_{n,i+1} \ | \ u_{n,i+2} \ w_{n,i+2} \ v_{n,i+2} \rangle$$

$$[NC_3(\xi)] = \begin{bmatrix} F_1(\xi) & 0 & 0 & F_2(\xi) & 0 & 0 & F_3(\xi) & 0 & 0 & F_4(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & F_1(\xi) & 0 & 0 & F_2(\xi) & 0 & 0 & F_3(\xi) & 0 & 0 & F_4(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & F_1(\xi) & 0 & 0 & F_2(\xi) & 0 & 0 & F_3(\xi) & 0 & 0 & F_4(\xi) \end{bmatrix}$$

Les éléments finis du type B-spline [FAN 89, LUA 89, KIM 83, GUP 86] diffèrent essentiellement par le maintien ou l'élimination de toutes ou d'une partie des variables de contrôle, du vecteur $\langle D_n \rangle$ de l'équation [13], au profit des variables physiques (déplacements nodaux). Dans [GUE 93], nous avons proposé d'éliminer toutes les variables de contrôle au profit des trois déplacements pour les nœuds internes d'un super élément plus leurs dérivées premières pour les nœuds extrêmes. La méthode est détaillée dans [GUE 93]. Le principe consiste à inverser le système [7] dans lequel les α_i sont les valeurs de l'une des composantes des variables de contrôle et les f_i sont celles de l'une des composantes du déplacement. Un algorithme spécial a été développé pour effectuer cette inversion [GUE 93].

Le principal avantage de ce nouveau choix des degrés de liberté de l'élément B-spline est que le nombre total des degrés de liberté d'un super élément reste inférieur à celui du même nombre d'éléments axisymétriques classiques (du type Hermite) et même celui de l'élément de haute précision de FAN & LUAH [FAN 89, LUA 89] (du type B-spline). Quantitativement, pour N éléments axisymétriques du type Hermite à 4 ddls par nœud, nous avons au total $4N+4$ ddls et pour le même nombre d'éléments de LUAH & FAN [LUA 89], ce nombre est de $9N+9$. Pour le présent élément il n'y'a que $3N+9$ ddls pour un super élément de N éléments. Ainsi nous avons un gain de $N-5$ ddls, pour $N > 5$, par rapport à un élément du type Hermite et $6N$ ddls, pour $N \geq 3$, par rapport à celui de LUAH & FAN [LUA 89].

3. Formulation de l'élément

La formulation que nous allons présenter sera limitée au cadre de la théorie de Kirchhoff, pour des coques isotropes ou orthotropes d'épaisseur constante et avec l'hypothèse géométrique des voiles minces ($t/R_{min} \ll 1$; t , l'épaisseur de la coque et R_{min} , le plus petit des deux rayons de courbures principales de la coque).

3.1. Relations déformations-déplacements

Par des manipulations standards [ZIE 77, BAT 92], les déformations généralisées prennent la forme suivante :

$$\{\varepsilon(\mu, \xi, \theta)\} = \sum_{n=0}^{\infty} [t_{6n}(\theta)] [b_n(\mu, \xi)] \{D_n\}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle e_s \ e_\theta \ e_{s\theta} \ \kappa_s \ \kappa_\theta \ \kappa_{s\theta} \rangle ; [t_{6n}(\theta)] = \begin{bmatrix} [t_{3n}(\theta)] & [0] \\ [0] & [t_{3n}(\theta)] \end{bmatrix} \quad [14]$$

$$[b_n(\mu, \xi)] = [L_n(\mu, \xi)] [NC_3(\xi)] \quad [15]$$

$$[L_n(\mu, \xi)] = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{R_s} & 0 \\ \frac{\cos \varphi}{r} & \frac{\sin \varphi}{r} & \frac{n}{r} \\ -\frac{r}{n} & 0 & \frac{d}{ds} \frac{\cos \varphi}{r} \\ \frac{r}{R_s} & \frac{d^2}{ds^2} & 0 \\ \frac{\cos \varphi}{r R_s} & \frac{\cos \varphi}{r} \frac{d}{ds} + \frac{n^2}{r^2} & -\frac{n}{r^2} \sin \varphi \\ \frac{n}{r R_s} & \frac{2n}{r} \frac{d}{ds} + \frac{2n}{r^2} \cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{r} \frac{d}{ds} + \frac{\cos \varphi}{r} \left(\frac{1}{R_s} - 2 \frac{\sin \varphi}{r} \right) \end{bmatrix}$$

3.2. Matrices de rigidité et de masse élémentaires

Grâce à l'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus, et pour un matériau homogène indépendant de θ , les modes sont découplés [TOU 87, PRO 75] et l'on peut faire l'analyse vibratoire mode par mode [BAT 92]. Ainsi, la matrice de rigidité dans la base des variables de contrôle et pour le mode d'ordre n s'écrit :

$$[K_{nc}] = k\pi \int_{-1}^{+1} [b_n(\mu, \xi)]^t [H] [b_n(\mu, \xi)] r(\mu) J(\xi) d\xi ; k=2 \text{ si } n=0 \text{ et } 1 \text{ sinon} \quad [16]$$

J , est le déterminant du jacobien définie dans [6] ; $[H]$, étant la matrice d'élasticité. La matrice de rigidité est évaluée numériquement par la quadrature de Gauss (4 points d'intégration par élément).

En négligeant les inerties de rotation, la matrice de masse devient indépendante du nombre d'ondes n . Elle s'écrit :

$$[M_c] = k\pi \int_{-1}^{+1} \rho_s [NC_3(\xi)]^t [NC_3(\xi)] r(\mu) J(\xi) d\xi ; k=2 \text{ si } n=0 \text{ et } 1 \text{ sinon} \quad [17]$$

$\rho_s = \rho \cdot e$, est la masse surfacique de la coque, ρ sa masse volumique et e son épaisseur. La matrice de masse est aussi évaluée par un schéma numérique de Gauss à 6 points d'intégration par élément.

3.3. Problème aux valeurs propres

Les matrices élémentaires de rigidité et de masse sont tout d'abord assemblées jusqu'au niveau d'une section géométrique, puis les matrices obtenues sont assemblées jusqu'au niveau d'un super élément ; à ce stade, le passage des variables de contrôle aux variables physiques nodales s'opère de la manière suivante :

$$[K_n] = [T]^{-t} [K_{nc}] [T]^{-1} \quad \text{et} \quad [M] = [T]^{-t} [M_c] [T]^{-1} \quad [18]$$

$[T]$ étant la matrice de passage des variables de contrôle $\{D\}$ aux variables physiques $\{d\}$, définie par :

$$\{d\} = [T]\{D\} \quad [19]$$

où

$$\langle d \rangle = \left\langle u_{n1} \ w_{n1} \ v_{n1} \ \left(\frac{du}{ds} \right)_{n1} \ \left(\frac{dw}{ds} \right)_{n1} \ \left(\frac{dv}{ds} \right)_{n1} \ u_{n2} \ w_{n2} \ v_{n2} \ \dots \right. \\ \left. \dots \ u_{nm} \ w_{nm} \ v_{nm} \ \left(\frac{du}{ds} \right)_{nm} \ \left(\frac{dw}{ds} \right)_{nm} \ \left(\frac{dv}{ds} \right)_{nm} \right\rangle$$

et

$$\langle D \rangle = \left\langle U_{n0} \ W_{n0} \ V_{n0} \ U_{n1} \ W_{n1} \ V_{n1} \ \dots \ U_{nm} \ W_{nm} \ V_{nm} \ U_{n,m+1} \ W_{n,m+1} \ V_{n,m+1} \right\rangle$$

m, est le nombre total de nœuds structures par super élément. La matrice [T] est construite à partir de la matrice du système [7] qui est d'abord inversée, puis réorganisée pour respecter l'ordre des degrés de libertés et ensuite éclatée pour tenir compte des trois composantes u, w, v.

La dernière étape est, éventuellement, l'assemblage sur les super éléments pour avoir les matrices de rigidité et de masse globales de la structure complète.

Le problème aux valeurs propres, pour un mouvement harmonique de pulsation ω , s'obtient en écrivant l'équation de mouvement des vibrations libres de la coque :

$$\left([K_{sn}] - \omega^2 [M_s] \right) \{d_s\} = \{0\} \tag{20}$$

dans laquelle $[K_{sn}]$, $[M_s]$ et $\{d_s\}$ sont maintenant, respectivement les matrices de rigidité, de masse et le vecteur des degrés de liberté de la structure entière.

4. Résultats numériques

Dans cette section, l'élément B-spline "COREBS" (COques de REvolution par les B-Splines) présenté ci-dessus est testé à travers l'analyse vibratoire des quatre cas tests qui reviennent le plus dans la littérature. Ces exemples de validation sont représentatifs de géométrie de courbure variable : un cylindre (courbure gaussienne nulle) encastré à sa base, un cylindre doublement encastré, une hémisphère (courbure gaussienne positive) encastrée à sa base et une hyperboloïde de révolution (courbure gaussienne négative) encastrée. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats analytiques, expérimentaux et numériques trouvés dans la littérature. Tous les calculs sont effectués en simple précision.

4.1. Réservoir cylindrique encastré à sa base

Le cylindre encastré à sa base est un cas test utilisé par plusieurs chercheurs [SOE 80, BHI 89, TOU 87, LUA 89, GOU 85, SEN 74]. Cependant, les données géométriques

et matérielles ne sont pas toujours les mêmes. Nous avons choisi de nous référer à l'élément de haute précision du type B-spline [LUA 89]. Cet élément utilise les trois déplacements curvilignes et leurs dérivés jusqu'à l'ordre 2 comme degrés de liberté pour aboutir à 9 ddls par nœud. La géométrie et les caractéristiques matérielles du cylindre sont présentées dans la figure 4. Nos résultats sont comparés à ceux de [LUA 89] et à ceux obtenus par un élément du type Hermite, COQX, existant dans le code MEF [FRA 91].

Les résultats d'analyse, en utilisant 6 et 18 éléments sont présentés dans le tableau 1 pour les trois premiers modes méridiens et les 9 premiers modes circonférenciels. Le calcul par 6 éléments correspond à un même nombre d'éléments mais à un nombre total de degrés de liberté plus petit que celui utilisé en [LUA 89] et du même ordre que celui obtenu par l'élément COQX [FRA 91]. L'erreur relative maximale, par rapport à [LUA 89], obtenue pour notre élément est de 1,08% alors que celle pour l'élément COQX [FRA 91] est de 12,58%. En d'autres termes, pour un nombre de ddls inférieur à celui des autres éléments, notre élément reste performant et pour le même nombre de degrés de liberté que l'élément COQX [FRA 91], notre élément est plus précis.

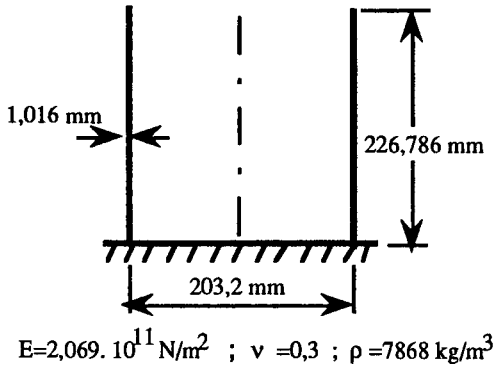


Figure 4. Cylindre encastré à sa base

Le calcul par 18 éléments correspond au même nombre de degrés de liberté que [LUA 89]. L'erreur maximale, par rapport à [LUA 89], obtenue par le présent élément est de 0,16% alors que celle par l'élément COQX [FRA 91] est de 1,48%. Nous pouvons donc conclure que le présent élément est aussi performant que l'élément de haute précision [LUA 89] pour ce cas test.

Pour plus de vérification, les résultats du tableau 1 sont reportés sur la figure 5. Sur cette dernière, nous notons que nos résultats collent à ceux de LUAH [LUA 89] même pour les modes méridiens élevés.

Enfin, la convergence de notre élément et celle de l'élément COQX [FRA 91], pour la plus basse fréquence $F_{mn}=F_{14}=485,2 \text{ Hz}$ sont montrées en figure 6. Nous remarquons que le présent élément converge plus rapidement vers la solution : avec 6 éléments il est à 0,55 % de la valeur de référence.

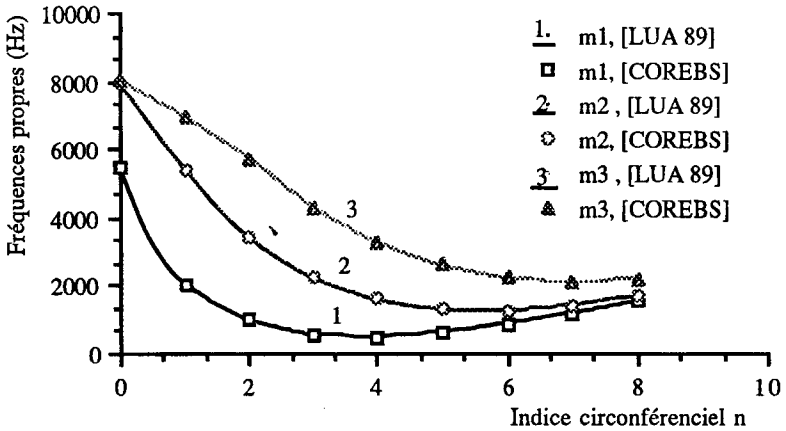


Figure 5. Fréquences propres d'un cylindre encastré à sa base

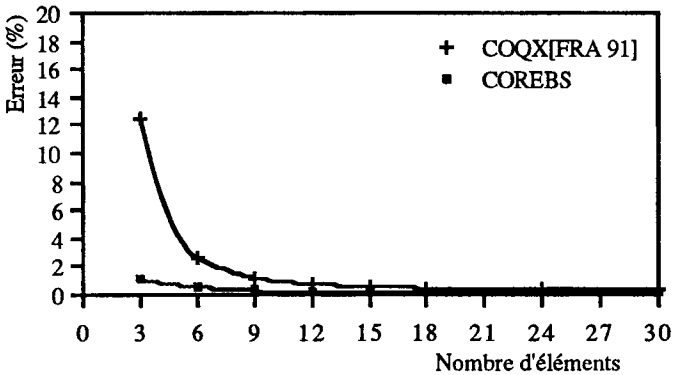


Figure 6. Convergence de $F_{mn} = F_{14}$

4.2. Réservoir cylindrique encastré aux deux extrémités

Le double encastrement du réservoir cylindrique est peu étudié. SOEDEL [SOE 80] propose une formule analytique approchée pour divers types de conditions limites d'un cylindre circulaire. Nous avons utilisé sa formule pour calculer les fréquences propres du cylindre encastré aux deux extrémités ; ces valeurs seront prises comme références pour la suite.

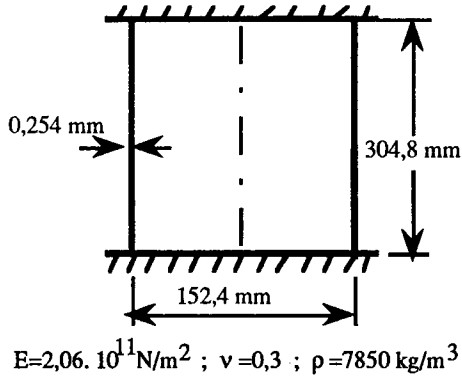


Figure 7. *Cylindre encasté aux deux extrémités*

Les fréquences propres pour les trois premiers modes sont présentées dans le tableau 2 et reportées sur la figure 8. Les résultats obtenus par le présent élément confirment ceux de JEAN [JEA 85] et surtout le fait que la formule de SOEDEL [SOE 80] surestime les fréquences propres des premiers modes circonférenciels.

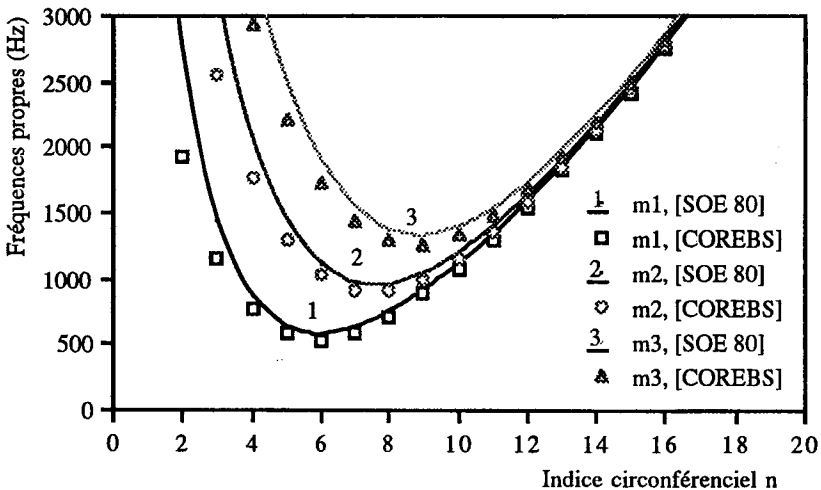


Figure 8. *Fréquences propres d'un cylindre encasté aux deux extrémités*

Notons que les résultats de JEAN [JEA 85], obtenus avec 80 éléments du type Hermite (identique à l'élément COX [FRA 91]), ont été retrouvés avec, uniquement, 25 éléments du type présenté ci-dessus ; ce qui représente un gain de 75 ddl.

La figure 9 confirme la rapidité de convergence du présent élément ; avec 10 éléments il est à moins de 5% de la solution alors que l'élément de JEAN [JEA 85] est à plus de 16%.

n	m	LUAH 6 élets 63 ddls [LUA 89]	COREBS 6 élets 27 ddls [présent]	Err (%)	COQX 6 élets 28 ddls [FRA 91]	Err (%)	COREBS 18 élets 63 ddls	Err (%)	COQX 18 élets 76 ddls	Err (%)
0	1	3506	3505,9	~ 0	3516,2	0,29	3505,8	~ 0	3507,3	0,04
	2	5479	5504,4	0,46	5509,5	0,56	5479,3	~ 0	5482,1	0,06
	3	7953	7955,2	0,03	7983,9	0,39	7963,3	0,13	7961,2	0,10
	4	8017	8018,1	0,01	8061,8	0,56	8035,3	0,23	8024,7	0,10
1	1	2032	2039,7	0,38	2041,1	0,45	2031,8	- 0,01	2032,7	0,03
	2	5412	5411,7	~ 0	5488,2	1,41	5411,5	- 0,01	5420,8	0,16
	3	6943	6959,6	0,24	7013,4	1,01	6943,0	0	6951,3	0,12
2	1	980,8	987,56	0,69	993,32	1,28	980,95	0,01	981,94	0,02
	2	3396	3408,3	0,36	3483,5	2,58	3396,5	0,01	3406,3	0,30
	3	5718	5733,0	0,26	5925,8	3,63	5719,1	0,02	5743,9	0,45
3	1	562,6	566,69	0,73	577,15	2,59	563,09	0,09	564,22	0,29
	2	2228	2246,0	0,81	2320,1	4,13	2228,9	0,04	2238,5	0,47
	3	4310	4334,7	0,57	4571,1	6,06	4311,1	0,02	4341,5	0,73
4	1	485,2	487,87	0,55	497,93	2,62	485,90	0,14	487,42	0,46
	2	1587	1603,1	1,01	1682,8	6,04	1588,2	0,07	1597,8	0,68
	3	3278	3308,2	0,92	3561,9	8,66	3280,0	0,06	3312,3	1,05
5	1	619,8	622,08	0,37	629,28	1,53	620,44	0,02	622,70	0,47
	2	1287	1299,0	0,93	1379,9	7,22	1288,4	0,11	1297,8	0,84
	3	2605	2633,1	1,08	2894,1	11,10	2606,7	0,06	2638,9	1,30
6	1	861,6	864,01	0,28	869,88	0,96	862,08	0,05	865,42	0,44
	2	1251	1260,0	0,72	1331,4	6,43	1253,0	0,16	1261,7	0,85
	3	2229	2252,6	1,06	2509,4	12,58	2231,2	0,10	2261,9	1,48
7	1	1168	1170,9	0,25	1176,9	0,76	1168,6	0,05	1173,2	0,44
	2	1413	1419,8	0,48	1476,4	4,49	1414,6	0,14	1423,0	0,71
	3	2108	2127,5	0,92	2363,3	12,11	2111,1	0,15	2138,9	1,47
8	1	1528	1531,3	0,22	1538,2	0,67	1528,5	0,03	1534,6	0,43
	2	1704	1709,8	0,34	1753,9	2,93	1705,2	0,07	1713,9	0,58
	3	2201	2216,8	0,72	2418,5	9,88	2203,9	0,13	2228,2	1,24

Tableau 1. Fréquences propres (en Hz) d'un cylindre encastré à sa base

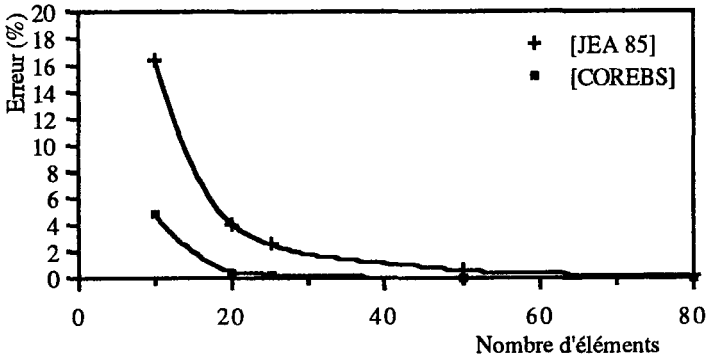


Figure 9. Convergence de $F_{mn} = F_{36}$

n	m	[SOE 80] (formule approchée)	[JEA 85] 80 éléts (324 ddls)	COREBS 25 éléts (249 ddls)
2	1	2772,073	1920,2	1922,3
	2	5251,236	3913,5	3914,3
	3	6997,411	5861,5	5860,0
4	1	880,185	764,62	765,9
	2	2088,134	1757,5	1759,4
	3	3441,769	2930,6	2932,0
6	1	568,293	533,59	533,85
	2	1120,601	1023,3	1024,1
	3	1914,931	1726,1	1727,0
8	1	741,975	717,33	717,33
	2	951,680	909,13	909,11
	3	1368,664	1289,1	1288,7
10	1	1104,267	1080,7	1080,7
	2	1189,133	1158,2	1158,2
	3	1382,992	1337,6	1337,0
12	1	1572,615	1549,1	1549,1
	2	1619,945	1591,2	1591,2
	3	1720,520	1684,3	1683,9
14	1	2131,815	2108,1	2108,1
	2	2166,822	2138,2	2138,2
	3	2232,557	2198,4	2198,3
16	1	2778,639	2754,7	2754,8
	2	2809,025	2780,1	2780,2
	3	2860,997	2827,0	2827,0

Tableau 2. Fréquences propres d'un cylindre encastrée aux deux extrémités

4.3. Hémisphère encastrée

Ce cas test est aussi largement utilisé dans la littérature [KUN 88, ALT 86, LUA 89, BAT 92, SEN 74]. Les dimensions et les propriétés de l'hémisphère sont montrées sur la figure 10.

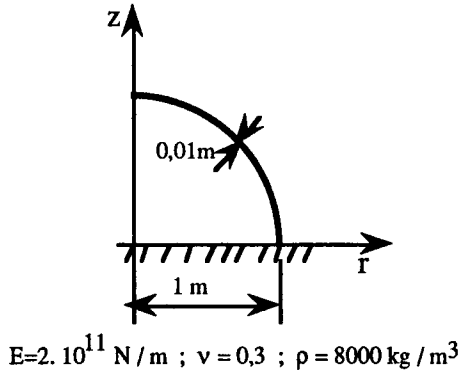


Figure 10. Hémisphère encastrée à la base

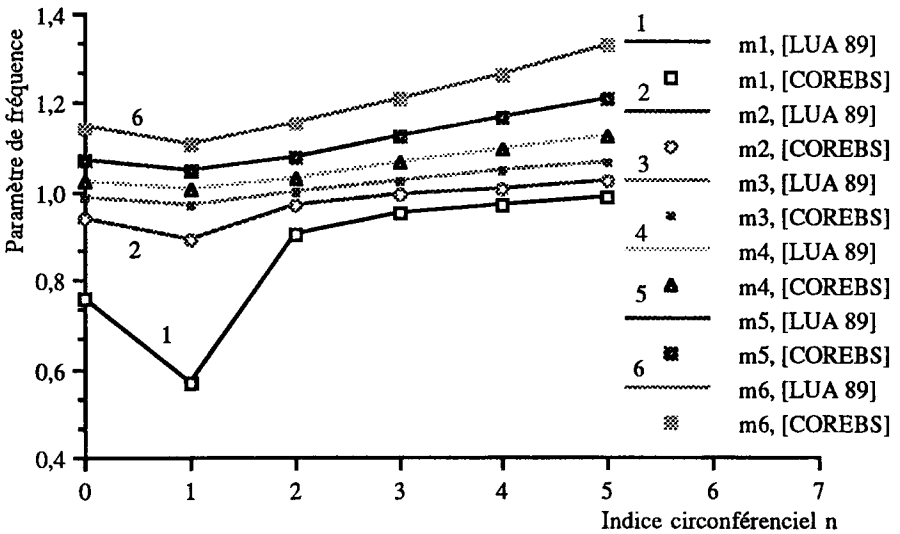


Figure 11. Paramètres de fréquence d'une hémisphère encastrée

Les fréquences propres calculées avec le présent élément sont comparées aux résultats exacts de KUNIEDA [KUN 88] et numériques de ALTMAN [ALT 86] obtenus par un élément fini mixte curviligne en 2D, de LUAH [LUA 89] par un élément fini B-spline de haute précision, et de BATOZ [BAT 92] à l'aide de l'élément mixte avec cisaillement transversal CAXI_L. Ces différents résultats sont récapitulés dans le tableau 3, en termes d'un paramètre de fréquence λ définie par :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho}{E}} a\omega \quad [21]$$

où

a, ρ , E et ω , sont respectivement le rayon de l'hémisphère, sa masse volumique, son module d'Young, et sa pulsation propre en rad/s.

n	m	1	2	3	4	5	6
0	KUNIEDA [KUN 88]	0,760	0,938	0,984	1,020	1,071	1,144
	ALTMAN [ALT 86]	0,760	0,938	-	-	-	-
	LUAH [LUA 89], 63ddls	0,762	0,938	0,984	1,021	1,071	1,146
	BATOZ [BAT 92], 100ddls	0,760	0,935	0,978	1,011	1,063	1,150
	COREBS [présent] 63 ddls	0,761	0,938	0,984	1,020	1,071	1,145
1	ALTMAN [ALT 86]	0,566	0,892	-	-	-	-
	LUAH [LUA 89], 63ddls	0,568	0,894	0,966	1,002	1,044	1,106
	BATOZ [BAT 92], 100ddls	0,568	0,894	0,968	1,005	1,052	1,127
	COREBS [présent] 63 ddls	0,568	0,893	0,966	1,002	1,044	1,105
2	ALTMAN [ALT 86]	0,902	-	-	-	-	-
	LUAH [LUA 89], 63ddls	0,901	0,966	0,998	1,031	1,079	1,153
	BATOZ [BAT 92], 100ddls	0,904	0,971	1,003	1,038	1,095	1,188
	COREBS [présent] 63 ddls	0,901	0,966	0,998	1,031	1,079	1,152
3	LUAH [LUA 89], 63ddls	0,948	0,990	1,024	1,066	1,123	1,207
	BATOZ [BAT 92], 100ddls	0,951	0,998	1,032	1,076	1,140	1,246
	COREBS [présent] 63 ddls	0,948	0,990	1,024	1,066	1,123	1,207
4	LUAH [LUA 89], 63ddls	0,969	1,005	1,045	1,095	1,165	1,264
	BATOZ [BAT 92], 100ddls	0,974	1,015	1,054	1,107	1,184	1,307
	COREBS [présent] 63 ddls	0,969	1,005	1,045	1,095	1,165	1,265
5	LUAH [LUA 89], 63ddls	0,985	1,021	1,066	1,126	1,211	1,327
	BATOZ [BAT 92], 100ddls	0,990	1,030	1,076	1,141	1,231	1,373
	COREBS [présent] 63 ddls	0,985	1,021	1,066	1,127	1,211	1,328

Tableau 3. Paramètre de fréquence $\lambda = \sqrt{(\rho/E)}a\omega$ d'une hémisphère encastrée

Les calculs sont effectués avec 18 éléments pour avoir le même nombre de ddls que LUAH [LUA 89] (6 éléments). BATOZ [BAT 92] a utilisé 24 éléments (plus de ddls).

Les résultats du tableau 3 sont aussi reportés sur la figure 11 sur laquelle on note la très bonne performance du présent élément. En effet, nous retrouvons exactement les résultats de LUAH [LUA 89] pour tous les modes calculés.

4.4. Hyperboloïde de révolution encastrée à sa base

Plusieurs chercheurs ont étudié ce cas test [LI 90, HEP 92, LUA 89, GOU 85, SEN 74, CAR 69]. La géométrie de la coque est montrée sur la figure 12. Les propriétés géométriques et physiques utilisées sont les suivantes :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(\frac{z-d}{b}\right)^2 = 1$$

$$b = \frac{ad}{\sqrt{r_b^2 - a^2}}$$

; a=63,906 m ; d=82,194 m ; L=100,787 m ; t=127 mm
 ; E=2,069 10¹¹ MN/m² ; ν=0,15 ; ρ=2405 Kg/m³

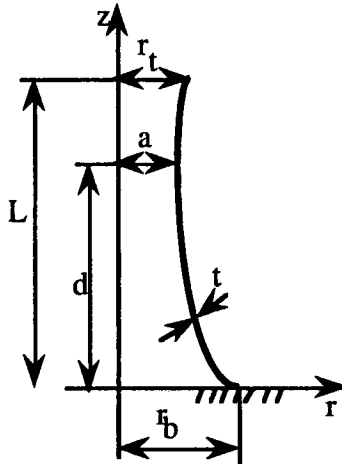


Figure 12. Hyperboloïde de révolution encastrée à la base

Les résultats avec le présent élément ainsi que ceux par le code MEF [FRA 91] et ceux de LUAH [LUA 89] et CARTER [CAR 69] sont résumés dans le tableau 4. Les valeurs de CARTER [CAR 69], présentées dans [LUA 89] sont obtenus par une méthode d'intégration numérique. Elles ont été retenues comme références auxquelles sont comparés les résultats des différents éléments finis.

L'erreur relative maximale des valeurs de LUAH [LUA 89] sur tous les modes calculés est de 0,25% alors que, pour le même nombre total de ddls, nous obtenons 0,90%. Le même nombre d'éléments COQX [FRA 91] ont été utilisés et l'erreur relative maximale observée est de 4,99%. Ces résultats montrent, encore une fois, le très bon comportement du présent élément même pour une discrétisation non uniforme de la géométrie de la coque.

5. Conclusion

n	m	CARTER [CAR 69] Référence	LUAH [LUA 89] 6 éléts 63 ddls	Erreur (%)	COREBS [présent] 18 éléts 63 ddls	Erreur (%)	MEF [FRA 91] 18 éléts 76ddls	Erreur (%)
0	1	-	6,2305	0	6,2310	0,01	6,2316	0,02
	2	7,7494	7,7493	~ 0	7,7514	0,03	7,7528	0,04
	3	11,4167	11,4114	- 0,05	11,4170	~ 0	11,4350	0,16
	4	11,9023	11,9114	0,08	11,4900	0,32	11,9620	0,50
1	1	3,2884	3,2887	0,01	3,2889	0,01	3,2909	0,08
	2	6,7905	6,7909	0,01	6,7917	0,02	6,8052	0,22
	3	10,5207	10,5182	- 0,02	10,5200	- 0,01	10,5470	0,25
2	1	1,7654	1,7659	0,03	1,7652	- 0,01	1,7697	0,24
	2	3,6931	3,6885	- 0,12	3,6888	0,12	3,7055	0,34
	3	6,9562	6,9536	- 0,04	6,9593	0,04	7,0093	1,44
3	1	1,3749	1,3756	0,05	1,3749	0	1,3827	0,57
	2	1,9904	1,9932	0,14	1,9918	0,07	2,0090	0,93
	3	4,3254	4,3363	0,25	4,3438	- 0,42	4,3952	1,61
4	1	1,1808	1,1811	0,02	1,1806	- 0,02	1,1924	0,98
	2	1,4475	1,4475	0	1,4459	- 0,11	1,4647	1,19
	3	2,7777	2,7777	0	2,7837	0,22	2,8331	1,99
5	1	1,0348	1,0332	- 0,15	1,0318	- 0,29	1,0452	1,01
	2	1,4293	1,4293	0	1,4345	0,36	1,4587	2,06
	3	2,0559	2,0566	0,03	2,0547	- 0,06	2,1025	2,27
6	1	1,1467	1,1479	0,10	1,1463	- 0,03	1,1612	1,26
	2	1,3231	1,3253	0,17	1,3326	0,72	1,3566	2,53
	3	2,0141	2,0145	0,02	2,0107	- 0,17	2,0651	2,53
7	1	1,3015	1,3028	0,10	1,3016	0,01	1,3177	1,24
	2	1,5134	1,5141	0,05	1,5189	0,36	1,5433	1,98
	3	1,9217	1,9230	0,07	1,9391	0,90	1,9983	3,99

Tableau 4. Fréquences propres (en Hz) d'une coque hyperbolique encastrée à sa base

La formulation et l'évaluation d'un nouvel élément fini axisymétrique courbe du type B-spline, pour l'analyse des vibrations libres des coques de révolution élastiques et homogènes, ont été présentées. L'élément a été validé par le calcul des fréquences propres de quatre cas tests largement utilisés dans la littérature : le cylindre encastré à sa base, le cylindre doublement encastré, l'hémisphère encastrée, et l'hyperboloïde de révolution encastrée à sa base.

Les résultats obtenus ont été comparés à des résultats analytiques, expérimentaux, et numériques trouvés dans la littérature. Les performances suivantes ont été observées :

- pour un même nombre d'éléments, l'élément présente le moins de degrés de liberté, tout en préservant une très bonne précision des résultats ;
- pour un même nombre de degrés de liberté, les résultats obtenus par cet élément sont aussi précis que des éléments de haute précision ;
- la convergence de cet élément est plus rapide que les éléments classiques du type Hermite.

Enfin nous précisons que cet élément reproduit correctement les modes de corps rigides à savoir, les modes de translation et de rotation, suivant l'axe de révolution Z pour l'harmonique $n=0$, et suivant l'axe r pour l'harmonique $n=1$.

Ces résultats très performants nous ont encouragés à continuer d'exploiter les atouts des B-splines, en éléments finis, pour généraliser leur utilisation aux coques de révolution sandwichs dont le cisaillement transversal ne peut être négligé. Un élément fini de ce type est en cours de développement. D'autres applications de l'élément à l'analyse dynamique des coques de révolution branchées sont aussi nécessaires pour valider la discrétisation en super éléments non vérifiée dans ce présent travail.

6. Remerciements

Les auteurs remercient la société STRACO à Compiègne pour le soutien financier de cette recherche.

7. Références

- [ALT 86] ALTMAN W., and NETO E. L. Vibration of thin shells of revolution based on a mixed finite element formulation. *Comput. Struct.*, 1986, 23(3), 291-303.
- [BAR 83] BARBE J., *Structures coques : équations générales et stabilité*. Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 1983.
- [BAT 92] BATOZ J. L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis, volume 3 : coques*. Hermès, Paris, 1992.
- [BHI 89] BHIMARADDI A., CARR A. J., MOSS P. J., « A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution », *Comput. Struct.*, 1989, 31(3), 299-308

- [BUS 84] BUSHNELL D., « Computerized analysis of shells - Governing equations ». *Comput. Struct.*, 1984, 18 (3), 471-536.
- [CAR 69] CARTER R. L., ROBINSON A. R., SCHNOBRICH W. C., « Free vibrations of hyperboloidal shells of revolution ». *J. Engng. Mech. Div.*, 1969, ASCE 95, 1033-1052.
- [COO 74] COOK R. D., *Concepts and applications of finite element analysis*. New York, John Wiley & sons, 1974.
- [DEL 80] DELPAK R. and HAGUE W.M., « An experimental and theoretical investigation of the frequencies and mode shapes of axisymmetric shell models ». *J. Sound Vibr.*, 1980, 72(2), 235-249.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*. 2^e éd. Paris, Maloine, 1984.
- [FAN 89] FAN S. C., and LUAH M. H., « Spline finite element for axisymmetric free vibrations of shells of revolution ». *J. Sound Vibr.*, 1989, 132(1), 61-72.
- [FRA 91] FRAMASOFT et C.S.I., Manuel de référence MEF/MOSAIC V2.6., mars 1991.
- [GOU 85] GOULD Ph. L., *Finite element analysis of shells of revolution*. London : Pitman, 1985.
- [GUE 93] GUERICH M., BENJEDDOU A., HAMDI M. A., « Interpolation par les B₃-splines uniformes : approche éléments finis ». In 4^e Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur. Alger : 22-24 novembre 1993 (à paraître).
- [GUP 86] GUPTA A. Cubic B-spline finite element for axisymmetric shells. Ph. D. Engineering Mechanics, Pennsylvania State Univ., 1986.
- [HAN 86] HANSEN J. S., HEPPLER G. R., « Basis functions for axisymmetric C⁰ shell element which satisfy rigid body requirements », in HUGHES T. J. R., HINTON E. (ed.), *finite element method for plate and shell structures*, vol. 1 : *Element technology*. Swansea, Pineridge Press, 1986.
- [HEP 92] HEPPLER G. R., WAHL L., « Finite element analysis of free-free shells of revolution ». *J. Sound Vibr.*, 1992, 152(2), 263-283.
- [HUA 89] HUANG H. C., *Static and dynamic analysis of plates and shells*. Berlin : Springer-Verlag, 1989.
- [JEA 85] JEAN Ph., Une méthode variationnelle par équations intégrales pour la résolution numérique de problèmes intérieurs et extérieurs de couplage élasto-acoustique. Doct. mécanique appliquée, Compiègne, 1985, annexe A.
- [KAR 87] KARDESTUNCER H., (ed.). *Finite element handbook*. New York : McGraw-Hill, 1987.
- [KER 90] KERBER Th., « Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leur remèdes ». *Rech. Aérop.*, 1990, n° 3, p. 45-76.
- [KIM 83] KIM J., *B-spline finite element analysis of arbitrary loaded shells of revolution*. Ph.D. Cornell Univ., 1983.
- [KUN 88] KUNIEDA H., « Flexural axisymmetric free vibrations of a spherical dome : exact results and approximate solutions ». *J. Sound Vibr.*, 1988, 92(1), 1-10.
- [LI 90] LI W. Y., THAM L. G., CHEUNG Y. K., « Free vibration analysis of doubly curved shells by spline finite strip method ». *J. Sound Vibr.*, 1990, 140(1), 39-53.
- [LUA 89] LUAH M. H., FAN S. C., « General free vibration analysis of shells of revolution using the spline finite element method ». *Comput. Struct.*, 1989, 33(5), 1153-1162.

- [LUC 79] LUCAS R. T. A. *Problèmes associés à la modélisation de coques de révolution par éléments finis*. Th. 3^e cycle : mécanique appliquée à la construction, Compiègne, 1979.
- [PRO 75] PROST J.P., DHATT G., *Analyse de la stabilité élastique des voiles minces de révolution par la méthode des éléments finis*. Rapport GCS-75-07-03. Québec : Univ. Laval, 1975.
- [SEN 74] SEN K.S., GOULD Ph., « Free vibration of shells of revolution using finite element method ». *J. Engng. Mech. Div.*, 1974, 100, EM2, 283-303.
- [SOE 80] SOEDEL W., « A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for a large variety of boundary conditions. » *J. Sound Vibr.*, 1980, 70(3), 309-317.
- [TOU 87] TOU S. K., WONG K. K., « High-precision finite element analysis of cylindrical shells ». *Comput. Struct.*, 1987, 26(5), 847-854.
- [TRO 92] TROMPETTE Ph., *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis - Statique et dynamique*. Paris, Masson, 1992.
- [VAL 77] VALID R., *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures*. Paris, Eyrolles, 1977.
- [WEB 67] WEBSTER J. J., « Free vibrations of shells of revolution using ring finite elements ». *Int. J. Mech. Sci.*, 1967, 9, 559-570.
- [ZIE 77] ZIENKIEWICZ O. C., *The finite element method*. 3rd ed., London, McGraw-Hill, 1977.