

---

# Flambage plastique des coques cylindriques raidies axialement

Stéphane Chapuliot — Alain Combescure

CEN Saclay  
DEMT/SEMT/LAMS  
91190 Gif-sur-Yvette

---

**RÉSUMÉ.** Cet article présente une nouvelle méthode de calcul du seuil de flambage plastique des coques cylindriques raidies. Il comprend le calcul incrémental de la plasticité et l'évaluation de la raideur tangente de la structure. Dans cette approche la coque raidie est considérée comme une coque multicouche : une couche isotrope représente la coque et une couche orthotrope équivalente représente la famille de raidisseurs. En chaque couche une fonction seuil de la forme définie par Ilyushin fonction des six efforts résultants de coque  $\{N\}, \{M\}$  et d'une déformation plastique équivalente, est utilisée comme potentiel plastique. Trois types de matrices tangentes de rigidité sont données pour le calcul de la matrice de raideur de la structure. La première utilise la loi d'écoulement, la deuxième la méthode du module tangent et la troisième la théorie de la plasticité finie. Une étude numérique et une expérimentation sur le flambage plastique d'un cylindre raidi axialement sont comparées.

**ABSTRACT.** A new analysis for plastic stability of axially stiffened shells is presented. It includes incremental analysis of plasticity and the evaluation of the appropriate tangent stiffness. In this approach a stiffened shell is considered as a multi-layer shell with one isotropic layer for the shell and one orthotropic layer for the stiffeners. Then in each layer an Ilyushin type of yield criterion, that is a direct function of the six stress resultants  $\{N\}, \{M\}$  and an equivalent plastic strain, is treated as a plastic potential. Flow rule is applied for plasticity and three various stress-strain matrix are given for the plastic stability analysis based on the flow theory, the tangent modulus theory and the deformation theory. A numerical study and an experiment on the plastic buckling of axially stiffened shell are compared.

**MOTS-CLÉS :** coque raidie, couche orthotrope équivalente, flambage, homogénéisation, module tangent, plasticité, raidisseur.

**KEY WORDS :** stiffened shell, equivalent orthotropic layer, buckling, smeared technic, tangent modulus, plasticity, stiffener.

---

## Introduction

L'utilisation fréquente des coques cylindriques raidies comme composantes des structures offshores ou aéronautiques est à l'origine de la plupart des études se rapportant à leur instabilité.

Il y a cependant une différence importante entre les coques utilisées dans l'industrie aérospatiale et l'industrie offshore. En règle générale les coques utilisées dans cette dernière catégorie sont renforcées par un petit nombre de raidisseurs à fortes sections. La fabrication de telles structures engendre des défauts et contraintes résiduelles importantes qui conduisent à une instabilité locale.

Par contre les coques du type aéronautiques sont renforcées par un grand nombre de faibles raidisseurs et comportent beaucoup moins de défauts et contraintes résiduelles. Leur mode critique de bifurcation apparaît souvent dans le domaine plastique de façon globale. C'est le type de structures que nous étudions dans cet article.

Dans le cas des coques cylindriques renforcées par un grand nombre de raidisseurs axiaux régulièrement espacés une approche multicouche est utilisée. En ce qui concerne le domaine élastique cette méthode est équivalente à la méthode d'homogénéisation classique. Par contre, dans le domaine plastique, elle diffère car une loi d'écoulement est appliquée à chaque couche. La raideur globale de la structure est ensuite obtenue par l'addition des différentes matrices tangentes, de la coque et des raidisseurs.

Une étude numérique comparée à des résultats expérimentaux est présentée en fin d'article.

### 1. Matrice de rigidité élastique

L'approche générale de la méthode est de relier les déplacements du raidisseur aux déplacements de la coque moyennant quelques hypothèses. Dans notre modèle la coque raidie est considérée comme une coque multicouche. C'est la même approche que celle de la méthode d'homogénéisation, qui distribue la rigidité des raidisseurs sur la totalité de la coque, à la différence près que nous répartissons la rigidité globale en couches : Une couche pour la coque et une couche pour chaque famille de raidisseurs régulièrement répartis le long de la circonférence du cylindre.

#### 1.2. Rigidité d'une couche "coque"

La matrice de rigidité est la matrice classique des plaques de LOVE-KIRCHHOFF :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h \cdot [G] & [0] \\ [0] & \frac{h^3}{12} \cdot [G] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} \text{ avec } [G] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.3. Rigidité d'une couche équivalente "raidisseur"

Nous supposons que la structure et le chargement sont axisymétriques. Tous les déplacements du raidisseur sont calculés à partir de ceux du plan moyen de la coque. Ils varient de façon linéaire suivant la direction normale à la coque et, du fait de l'hypothèse d'axisymétrie, sont constants dans la direction circonférencielle. Le raidisseur est considéré comme une poutre, sa section est constante, elle reste plane et ne se distord pas. Il est soumis aux efforts généralisés de poutre qui sont : L'extension  $N^r$ , la flexion  $M^r$ , le cisaillement  $T^r$  et la torsion  $M_t^r$  (Figure 1). Les contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  sont négligées : il n'y a pas d'interaction entre coque et raidisseurs. Les efforts de poutre sont calculés par :

$$N^r = \int_A \sigma_{11} \cdot dA, \quad M^r = \int_A z \cdot \sigma_{11} \cdot dA, \quad T^r = \int_A \sigma_{12} \cdot dA$$

et  $M_t^r = \int_A z \cdot \sigma_{12} \cdot dA$  (Les contraintes  $\sigma_{13}$  sont négligées) (3)

Nous pouvons écrire le travail des déformations internes rapporté à une surface de coque unitaire:

$$\tau_{def} = \frac{1}{2\pi \cdot r \cdot \Delta h} \int_{\Delta h} n \cdot (\epsilon^r \cdot N^r + \chi^r \cdot M^r + \tau^r \cdot T^r + \theta^r \cdot M_t^r) \cdot dh \quad (4)$$

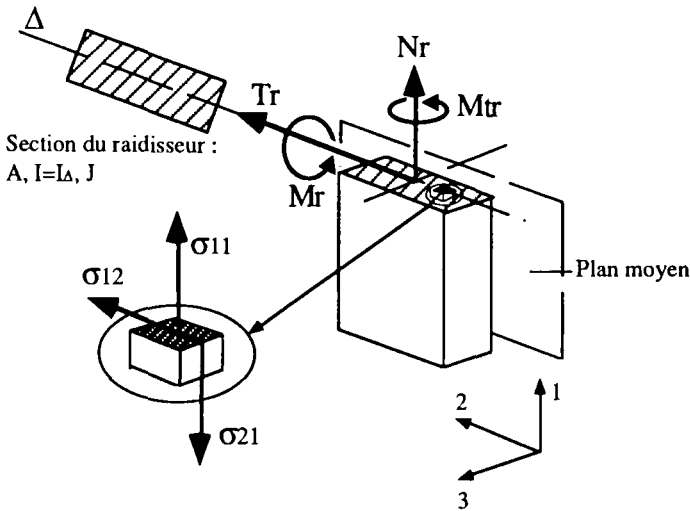


Figure 1. Efforts du raidisseur

Nous considérons que  $\Delta h$  est suffisamment petit pour que les contraintes soient constantes suivant la direction axiale 1. Nous appelons  $b$  la distance entre 2

raidisseurs et n leur nombre ( $n.b=2.\pi.r$ ) et :

$$\tau_{def} = \frac{1}{b} (\epsilon^r . N^r + \chi^r . M^r + \tau^r . T^r + \theta^r . Mt^r) \quad (5)$$

La déformation axisymétrique d'un cylindre est donnée par [Zie 11]:

$$\begin{cases} \epsilon_s = \partial u / \partial s \\ \epsilon_\theta = w / r \\ \epsilon_{s\theta} = \partial v / \partial s \end{cases} \quad \begin{cases} \chi_s = -\partial^2 w / \partial s^2 \\ \chi_s = 0 \\ \chi_{s\theta} = 2. \partial v / (r. \partial s) \end{cases} \quad (6)$$

- s est la direction tangente à la coque pour  $\theta$  constant.
- $\theta$  est la direction tangente à la coque pour z constant.
- w est le déplacement normal à la coque.
- u est le déplacement axial tangentiel.
- v est le déplacement circonférenciel tangentiel.

Nous définissons par  $(\epsilon'_0, \tau'_0, \chi'_0, \theta'_0)$  les déformations du raidisseur exprimées dans le repère lié au plan moyen de la coque et  $(\epsilon^r, \tau^r, \chi^r, \theta^r)$  celles liées au centre de la section excentré de g du plan moyen de référence..

$$\begin{cases} \epsilon'_0 = \partial u / \partial s = \epsilon_s \\ \chi'_0 = -\partial^2 w / \partial s^2 = \chi_s \\ \tau'_0 = \partial v / \partial s = \epsilon_{s\theta} \\ \theta'_0 = \partial v / (r. \partial s) = \frac{\chi_{s\theta}}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \epsilon^r = \epsilon'_0 + g. \chi'_0 \\ \chi^r = \chi'_0 \\ \tau^r = \tau'_0 + g. \theta'_0 \\ \theta^r = \theta'_0 \end{cases} \quad (7)$$

La section du raidisseur est rectangulaire. Si ce n'est pas le cas, il faut la décomposer en rectangles qui formeront des couches orthotropes équivalentes différentes (Figure 2).

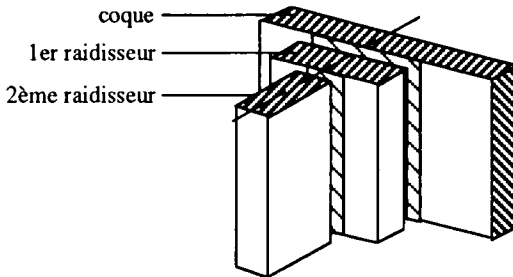


Figure 2. Décomposition du raidisseur

Les efforts généralisés sont calculés à partir des déformations et des caractéristiques géométriques de la section du raidisseur:

$$N' = EA \cdot \varepsilon'_0, M' = EI \cdot \chi'_0, T' = 2 \cdot GA_r \cdot \tau'_0, Mt_r = GJ \cdot \theta'_0 \quad (8)$$

Le travail des déformations internes peut s'écrire sous forme matricielle en fonction des déformations de la coque : (8)

$$\tau_{def} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{EA}{b} & 0 & 0 & g \frac{EA}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{GA_r}{b} & 0 & 0 & g \frac{GA_r}{2b} \\ & & & g^2 \frac{EA}{b} + \frac{EI}{b} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{GJ}{4b} + g^2 \frac{GA_r}{4b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix}$$

(sym.)

Nous avons la l'expression de la matrice de rigidité de la couche orthotrope équivalente. Elle est identique aux matrices homogénéisées obtenues par d'autres auteurs excepté en ce qui concerne les termes de cisaillement (selon les hypothèses adoptées). BLOCK, CARD et MIKULAS [BLO 2] négligent la rigidité de cisaillement face à celle de la coque. Cette approximation est souvent justifiée compte tenu de la section des raidisseurs. GACHON [GAC 6] a introduit un coefficient  $\alpha$  qu'il convient d'adapter suivant la géométrie du raidisseur et le type de chargement.

La matrice que nous présentons est exprimée dans le plan moyen de la coque. Pour l'exprimer dans le plan moyen du raidisseur il suffit de prendre  $g=0$ .

## 2. Plasticité

Un critère de plasticité est appliqué en chaque couche de façon identique connaissant l'état de contrainte. S'il est violé, alors l'écoulement plastique est calculé. Cette technique nous permet de traiter le cas de la plastification locale des renforts ou de la coque voire même le cas ou coque et raidisseurs sont constitués de matériaux différents.

Le critère que nous utilisons à été initialement défini par ILYUSHIN [ILY 8] pour les coques élasto-plastiques parfaites. Il est fonction des six contraintes généralisées de coque. Ce type de critère n'est pas aussi précis qu'une analyse élasto-plastique avec un critère VON MISES intégré dans l'épaisseur mais est beaucoup plus économique en temps calcul et place mémoire.

CRISFIELD [CRI 4] [CRI 5] et YAM [YAM 10] ont introduit, pour prendre en compte l'écroissage des efforts de flexion  $\{M\}$ , une variable cinématique  $\zeta$  définie à partir des déformations plastiques totales  $\{\chi_p\}$ . Nous allons maintenant en plus prendre en compte les matériaux à écroissage isotrope. Deux fonctions  $\gamma$  et  $\beta$  de la variable cinématique  $\zeta$  et de la courbe de traction du matériau sont introduites dans le modèle d'ILYUSHIN. Le critère qui est le même pour la couche isotrope ou la couche orthotrope s'écrit à partir des efforts généralisés exprimés dans son plan moyen :

$$f = \frac{\bar{N}}{N_0^2} + \frac{s}{\gamma\sqrt{3}} \cdot \frac{\overline{NM}}{N_0M_0} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\bar{M}}{M_0^2} = \beta^2 \quad (9)$$

$$\bar{N} = N_x^2 + N_y^2 - N_xN_y + 3.N_{xy}^2$$

$$\bar{M} = M_x^2 + M_y^2 - M_xM_y + 3.M_{xy}^2$$

avec :  $\overline{NM} = N_xM_x + N_yM_y - \frac{N_xM_y + N_yM_x}{2} + 3.N_{xy}M_{xy}$  (10)

$$s = \frac{|\overline{NM}|}{\overline{NM}}$$

En ce qui concerne le raidisseur, nous supposons que les contraintes de cisaillement ne génèrent pas de déformations plastiques. Nous prendrons dans la formule précédente  $N_{xy}=M_{xy}=0$ .  $\beta$  et  $\gamma$  sont calculés en annexe I avec la courbe de traction du matériau, de telle sorte que nous avons une solution exacte dans le cas de la flexion pure et de la compression pure d'une plaque.

La loi d'écoulement est appliquée en négligeant les variations de  $\gamma$  ( $d\gamma=0$ ). Cette approximation facilite les calculs tout en jouant très peu sur la précision. La forme quadratique  $f$  est alors mise sous forme matricielle pour simplifier l'écriture : ( $[F]$  est donnée en annexe II)

$$f = \left\{ \begin{matrix} \{N\} \\ \{M\} \end{matrix} \right\}^T [F] \left\{ \begin{matrix} \{N\} \\ \{M\} \end{matrix} \right\} = \beta^2 \quad (11)$$

Le critère seuil  $f$  est traité comme un potentiel plastique, les déformations plastiques sont :

$$\left\{ \begin{matrix} \{d\varepsilon_p\} \\ \{d\chi_p\} \end{matrix} \right\} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \left\{ \begin{matrix} \{N\} \\ \{M\} \end{matrix} \right\}} = 2d\lambda \cdot [F] \left\{ \begin{matrix} \{N\} \\ \{M\} \end{matrix} \right\} \quad (12)$$

La contrainte équivalente doit rester sur la surface seuil :

$$df = 2 \cdot \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}^T [F] \begin{Bmatrix} \{dN\} \\ \{dM\} \end{Bmatrix} = 2 \cdot \beta \cdot d\beta \quad (13)$$

De la même façon que YAM [YAM 10] nous considérons que la déformation plastique équivalente est proportionnelle au travail des déformations plastiques :

$$N_0 \cdot \beta \cdot d\zeta = \begin{Bmatrix} \{d\varepsilon_p\} \\ \{d\chi_p\} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = 2 \cdot d\lambda \cdot \beta^2 \quad (14)$$

$$\text{Ainsi } d\zeta = 2 \cdot d\lambda \cdot \frac{\beta}{N_0} \text{ et } d\beta = \frac{2 \cdot \alpha_T \cdot \beta}{N_0} d\lambda \quad (15)$$

$\alpha_T$  est le module tangent défini par  $d\beta = \alpha_T \cdot d\zeta$ . L'incrément de contraintes généralisées se calcule par :

$$\begin{Bmatrix} \{dN\} \\ \{dM\} \end{Bmatrix} = [D] \left( \begin{Bmatrix} \{d\varepsilon\} \\ \{d\chi\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{d\varepsilon_p\} \\ \{d\chi_p\} \end{Bmatrix} \right) \quad (16)$$

Nous trouvons alors le facteur plastique  $d\lambda$  :

$$d\lambda = \frac{\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}^T [F] [D] \begin{Bmatrix} \{d\varepsilon\} \\ \{d\chi\} \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}^T \left( [F] [D] [F] + \frac{\alpha_T}{N_0} [F] \right) \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}} \quad (17)$$

Et la matrice tangente de rigidité :

$$[D_T] = [D] \left( [I] - \frac{\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}^T [F] \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} [F] [D]}{\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}^T \left( [F] [D] [F] + \frac{\alpha_T}{N_0} [F] \right) \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}} \right) \quad (18)$$

Les dérivées partielles de la surface seuil ne sont pas continues pour  $\overline{NM} = 0$ . Ces cas particuliers sont traités par CRISFIELD [CRI 4] en prenant  $s=0$  pour  $\overline{NM} < \alpha$  ( $\alpha$  est un réel arbitraire).

Nous utilisons un processus particulier : Quand  $\overline{NM}$  est nul la direction de l'incrément élastique est comparée avec la direction des normales aux deux surfaces  $\{df_1\}$  et  $\{df_{-1}\}$  (Figure 3).

Nous définissons (Figure 3):

$$\{df_1\} = \frac{\partial f}{\partial \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}} (s=1) , \quad \{df_{-1}\} = \frac{\partial f}{\partial \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}} (s=-1)$$

$$\text{et } \{df_0\} = \frac{\partial f}{\partial \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}} (s=0) \quad (19)$$

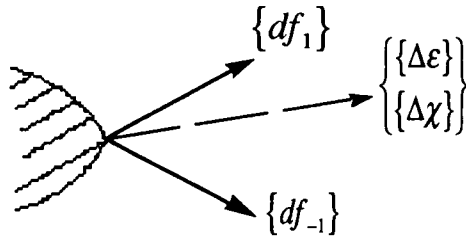


Figure 3. Cone des normales.

L'incrément élastique est exprimé en fonction de  $\{df_1\}$ ,  $\{df_{-1}\}$  et  $\{R\}$  (vecteur normal au plan défini par  $\{df_1\}$  et  $\{df_{-1}\}$ ):

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta\epsilon\} \\ \{\Delta\chi\} \end{Bmatrix} = a_1 \cdot \{df_1\} + a_{-1} \cdot \{df_{-1}\} + a_R \cdot \{R\}$$

avec  $\{R\}^T \cdot \{df_1\} = \{R\}^T \cdot \{df_{-1}\} = 0 \quad (20)$

Si  $a_1 > 0$  et  $a_{-1} > 0$  l'incrément élastique est à l'intérieur du cône formé par les normales.  $\{df\}$  sera pris de telle sorte que le point image (après écrouissage) se trouve sur la surface seuil en un point où  $\overline{NM} = 0$ .

Si  $a_1 > 0$  ou  $a_{-1} < 0$  l'incrément élastique est à l'extérieur du cône. Dans le cas où  $a_{-1} < 0$   $\{df\}$  sera pris égal à  $\{df_1\}$  et dans le cas opposé où  $a_1 < 0$   $\{df\}$  sera pris égal à  $\{df_{-1}\}$ .

Le critère de plasticité que nous venons de présenter s'applique donc séparément et de la même façon pour chaque couche. Seule la matrice de rigidité différencie les matériaux. Pour une couche isotrope la matrice  $[D]$  doit être prise comme celle définie par (1), alors que pour une couche orthotrope on utilise celle définie par (8) (avec  $g=0$  puisque le calcul s'effectue dans le plan moyen de la couche).



### 3. Flambage

Pour déterminer la stabilité d'une structure il convient de calculer sa raideur tangente. Pour cela il faut connaître la matrice de rigidité tangente en chaque point. Etant donné que la rigidité est répartie en plusieurs couches, le calcul sera fait sur chacune d'elle. Pour cela nous disposons de l'état de contrainte et de la valeur de la déformation plastique équivalente.

Trois méthodes de calcul, avec la loi de comportement que nous avons présenté précédemment, sont proposées. Elles sont toutes trois des approximations car elles donnent la matrice intégrée sur toute la hauteur de la couche, donc ne tiennent pas compte d'une éventuelle relaxation locale lorsqu'il y a flexion. Pour éviter ce genre de problèmes, il suffit de créer des couches plus minces, donc d'augmenter le nombre de couches.

#### 3.1. Méthode du module tangent

Le module tangent de la couche est directement lu sur la courbe de traction du matériau connaissant la valeur de la déformation plastique équivalente  $\zeta$ .

$$[D_T] = \frac{E_T}{E} [D] \quad (21)$$

La matrice  $[D]$  que nous utilisons pour ce calcul est soit celle de la formule (1) soit celle de la formule (8) (avec  $g < 0$  pour avoir la matrice tangente exprimée dans le plan moyen de la coque). Cette méthode est de loin la plus simple à utiliser. Elle donne des résultats qui sont en règle générale conservatifs.

#### 3.2. Loi d'écoulement

La matrice tangente est la matrice obtenue avec la loi d'écoulement (18). Elle est exprimée dans le plan moyen de la couche, il faudra donc par la suite la donner dans le plan moyen de référence.

#### 3.3. Théorie de la plasticité finie

La troisième méthode est une application de la théorie de déformation. La matrice tangente de rigidité est évaluée, quand la couche a pénétré dans le domaine plastique, grâce au module tangent  $\alpha_T$  et sécant  $\alpha_S$  défini par ( $\beta = \alpha_S \cdot \zeta$ ). L'incrément de déformation élastique se calcule dans le plan moyen de la couche par :

$$\begin{Bmatrix} \{\{\varepsilon_e\}\} \\ \{\{\chi_e\}\} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

La déformation plastique se calcule avec notre modèle approché et l'hypothèse de chargement proportionnel :

$$\begin{Bmatrix} \{\epsilon_p\} \\ \{\chi_p\} \end{Bmatrix} = 2\lambda_s [F] \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$\zeta$  est proportionnel au travail des déformations plastiques, nous avons alors  $\zeta = 2\lambda_s \beta$ . Les déformations totales peuvent se calculer par :

$$\begin{Bmatrix} \{\epsilon\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} = \left( [D]^{-1} + \frac{N_0}{\alpha_s} [F] \right) \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Nous dérivons l'équation précédente en négligeant les variations de  $\gamma$  :

$$\begin{Bmatrix} \{d\epsilon\} \\ \{d\chi\} \end{Bmatrix} = \left( [D]^{-1} + \frac{N_0}{\alpha_s} [F] \right) \begin{Bmatrix} \{dN\} \\ \{dM\} \end{Bmatrix} - N_0 \cdot \frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} \cdot [F] \begin{Bmatrix} \{dN\} \\ \{dM\} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Nous avons :  $-\frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} = \frac{d\zeta}{\beta} - \frac{d\beta}{\alpha_s \cdot \beta}$  et  $-\frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} = \left( \frac{1}{\alpha_T} + \frac{1}{\alpha_s} \right) \frac{d\beta}{\beta}$  (26),

et quand la section est plastifiée :  $\frac{d\beta}{\beta} = \frac{1}{\beta^2} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}^T [F] \begin{Bmatrix} \{dN\} \\ \{dM\} \end{Bmatrix}$  (27)

L'expression de la matrice tangente inverse de rigidité est alors obtenue par :

$$\begin{Bmatrix} \{d\epsilon\} \\ \{d\chi\} \end{Bmatrix} = \left( [D]^{-1} + \frac{N_0}{\alpha_s} [F] + \frac{N_0}{\beta^2} \left( \frac{1}{\alpha_T} - \frac{1}{\alpha_s} \right) [F] \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix}^T [F] \right) \begin{Bmatrix} \{dN\} \\ \{dM\} \end{Bmatrix}$$

ou  $\begin{Bmatrix} \{d\epsilon\} \\ \{d\chi\} \end{Bmatrix} = [D_T]^{-1} \begin{Bmatrix} \{dN\} \\ \{dM\} \end{Bmatrix}$  (28)

### 3.4. Assemblage des matrices

La matrice de rigidité obtenue par la méthode du module tangent peut être directement utilisée pour calculer la raideur de la structure puisqu'elle est exprimée dans le plan moyen de la coque. Par contre les deux suivantes sont calculées dans le plan moyen de la couche, il faut les exprimer dans le plan de la coque.

La matrice tangente de rigidité exprimée dans le repère local de la couche a la forme :

$$[D_T] = \begin{bmatrix} [CC] & [CD] \\ [CD] & [DD] \end{bmatrix} \quad (29)$$

Exprimée dans le repère global elle aura alors la forme :

$$[D_T] = \begin{bmatrix} [CC] & g.[CC] + [CD] \\ g.[CC] + [CD] & g^2.[CC] + g.[CD] + [DD] \end{bmatrix} \quad (31)$$

De nombreux auteurs ont comparé les différentes méthodes que nous venons de présenter et donné leur domaine de validité. BATDORF [BAT 1] et HUTCHINSON [HUT 7] sont d'accord sur le fait que dans la majorité des cas la théorie de déformation donne de meilleurs résultats que la loi d'écoulement. En particulier dans le cas d'une coque comprimée jusqu'au domaine plastique puis soumise à du cisaillement ou c'est la loi d'écoulement ne convient pas car les termes de rigidité ne sont pas affectés par l'écoulement dans la direction normale. La méthode du module tangent donne elle des résultats conservatifs inférieurs à ceux des autres méthodes. COMBESCURE [COM 4] donne des restrictions quand à l'utilisation des différentes méthodes. La matrice obtenue avec la loi d'écoulement peut surestimer fortement les résultats car elle est calculée à partir de l'état des contraintes pour une charge donnée et ne tient pas compte de la direction que peuvent prendre celles-ci lors de la bifurcation. Il conseille même de ne pas utiliser cette méthode si l'on ne prend pas en compte dans la modélisation des défauts de la structure. La méthode du module tangent donne elle des résultats conservatifs dans tous les cas qui peuvent devenir trop conservatifs en cas de chargement bi-axial traction/compression. Quand à la théorie de déformation qui donne de bons résultats dans de nombreux cas de chargement, elle ne doit pas être utilisée si la structure comporte des défauts importants.

Les trois méthodes de calcul sont développées dans le code de calcul INCA du système CASTEM. On peut ainsi évaluer la stabilité de la structure par la méthode de son choix une fois le calcul incrémental effectué.

#### **4. Validation : Flambage plastique d'un cylindre soumis à une compression axiale et une pression interne**

Un cylindre encastré à ses deux extrémités, soumis à une pression interne puis à une compression axiale est testé au flambage.

L'essai à été effectué par LIMAM et JULLIEN [LIM 9] sur un cylindre en cuivre électro-déposé raidi par 60 raidisseurs axiaux. Le cylindre à un rayon nominal de 135 mm, une longueur de 270 mm, une épaisseur de 0,2 mm dans la partie courante et de 1,2 mm aux extrémités (Figure 4).

La structure est modélisée par trois couches. L'une d'elles représente la coque et les deux autres le raidisseur (étant donné qu'il a une section en T). Le cylindre est soumis à une pression interne de 0,18 Mpa, puis est comprimé axialement jusqu'à

l'instabilité. Les trois méthodes de calcul de matrice tangente sont utilisées. Les résultats sont présentés tableau 1, la Figure 5 montre le mode de flambage et la répartition des contraintes équivalentes le long d'une génératrice du cylindre pour chaque couche au chargement limite de 18,40 kN.

Comme on peut le voir une plastification locale apparaît dans la zone de raccord des extrémités et de la partie courante. La structure flambe alors dans cette zone. Les charges de flambage calculées par les différentes méthodes sont très proches les unes des autres. Celle du module tangent étant comme prévu la plus conservatrice. La proximité des résultats des théories de plasticité finie et d'écoulement s'explique par le fait que la structure réelle comporte très peu de défauts et que la direction des contraintes ne change pas lors de l'apparition de l'instabilité.

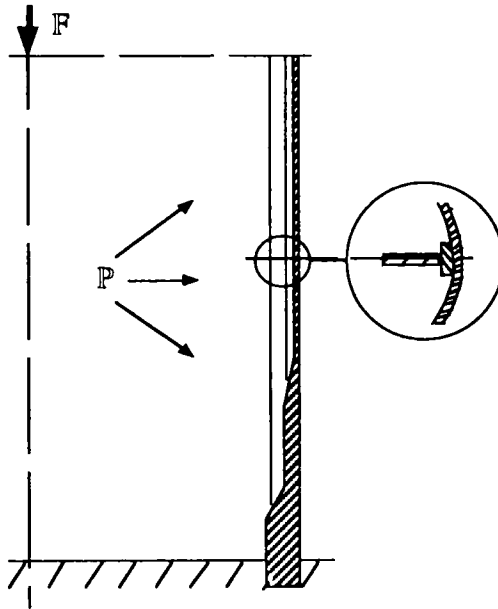


Figure 4. Géométrie du cylindre

	F (kN)	U (µm)
Expérimental	18,26	470
Loi d'écoulement	18,40	471
théory de déformation	17,56	450
module tangent	17,27	442

U : déplacement axial maximum.  
 F : chargement axial.

**Tableau 1. Charges limites.**

La structure que nous modélisons ici est le parfait exemple de structure à modéliser par homogénéisation car elle comporte 60 raidisseurs qui ne constituent que 4% du volume de matière total. De plus la coque est mince ce qui justifie l'utilisation du critère d'ILYUSHIN intégré dans l'épaisseur. Si le nombre de raidisseur diminue cette méthode ne convient plus, les prédictions de flambage seront supérieures à la réalité car la méthode ne prend pas en compte les phénomènes locaux.

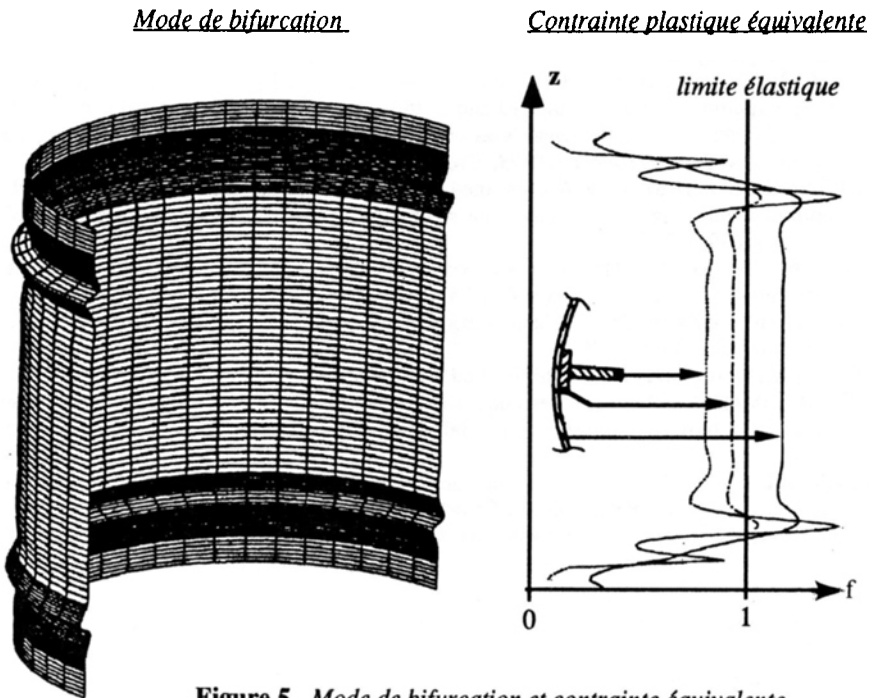


Figure 5. Mode de bifurcation et contrainte équivalente

## 5. Conclusion

Cette méthode de calcul de flambage des coques cylindriques raidies axialement peut de la même façon être utilisée pour un raidissage circonférentiel, à condition qu'il soit suffisamment dense. seule la matrice de rigidité équivalente sera modifiée. La principale nouveauté de notre méthode est de traiter le problème de l'homogénéisation en plusieurs couches, ce qui permet par la suite de poursuivre le calcul dans le domaine plastique grâce à un critère de plasticité appliqué à chaque couche.

En ce qui concerne le calcul de bifurcation, le choix de la méthode de calcul de la matrice tangente de rigidité est laissé à l'utilisateur selon le type de calcul, les

phénomènes pris en compte... Il est de toute façon sage d'utiliser les trois, sachant que la méthode du module tangent nous donne une minoration tandis que la loi d'écoulement nous donne bien souvent une majoration de la réalité. La validation que nous avons présenté en est le parfait exemple.

**Références**

[BAT 1] BATDORF S.B., « Theories of plastic buckling », *J. Aeronaut. Sci.*, vol. 16, pp. 405-408, 1949.  
 [BLO 2] BLOCK D.D., CARD M.F., MIKULAS M.M., « Buckling of eccentrically orthotropic cylinders », *NASA TN D-2960*, August 1965.  
 [COM 3] COMBESURE A., « Upon the different theories of plastic buckling, Buckling of shell structures on land, in the sea and in the air », *Elsevier applied sciences*, 1991.  
 [CRI 4] CRISFIELD M.A., « Large elastoplastic buckling analysis of plates using finite elements », *TRRL report LR593*, Crowthorne, Berkshire, 1973.  
 [CRI 5] CRISFIELD M.A., « A combined RAYLEIGH-RITZ finite element method for nonlinear analysis of stiffened plate structures », *Computers and structures*, vol. 8, pp. 679-689, 1977.  
 [GAC 6] GACHON H., Théorie nonlinéaire des plaques et coques, Trame de cours de mécanique des structures, fascicule n° 5, (ENSAM Paris).  
 [HUT 7] HUTCHINSON J.W., « Plastic buckling », *Advances in applied mechanics*, vol. 14, edited by C.S. YIH, 1974.  
 [ILY 8] ILYUSHIN A.A., *Plasticité*, Edition Eyrolles, Paris, 1956.  
 [LIM 9] LIMAM A., Flambage des coques cylindriques sous combinaison de chargements, pression interne et compression axiale, thèse de doctorat, INSA Lyon, septembre 1991.  
 [YAM 10] YAM L.C.P., New developments in theory and method of analysis for inelastic plates and shells, TRRL report, Crowthorne, Berkshire (Part1).  
 [ZIE 11] ZIENKIEWICH O.C., *La méthode des éléments finis*, Edition McGraw-Hill , 1979.

**ANNEXE 1 : Calcul des fonctions  $\gamma$  et  $\beta$**

*Traction pure :*

Le critère que nous avons défini nous donne :  $F = N^2 / N_0^2$  donc  $\beta = N / N_0$

$$d\epsilon_p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial N} = 2 \cdot d\lambda \cdot \frac{N}{N_0}$$

La déformation équivalente est calculée par :  $d\zeta \cdot \beta \cdot N_0 = d\epsilon_p \cdot N = 2 \cdot d\lambda \cdot \beta^2$ .

Nous obtenons donc :  $d\zeta = d\epsilon_p \Rightarrow \zeta = \epsilon_p$ .

L'effort axial en traction pure est :  $N = h \cdot \sigma \Rightarrow \beta = \frac{\sigma}{\sigma_0}$ ,

et la déformation plastique :  $\epsilon_p = \epsilon - \epsilon_e = \epsilon - \epsilon_0 \cdot \frac{\sigma}{\sigma_0}$ .

La fonction  $\beta(\zeta)$  est maintenant définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \varepsilon - \varepsilon_0 \cdot \frac{\sigma}{\sigma_0} \\ \beta = \frac{\sigma}{\sigma_0} \end{array} \right.$$

**Flexion pure :**

Notre critère donne:  $f = \frac{M^2}{\gamma^2 \cdot M_0^2} = \beta^2 \Rightarrow \gamma = \frac{M}{\beta \cdot M_0}$

$$d\chi_p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial M} = 2 \cdot d\lambda \cdot \frac{M}{\gamma^2 \cdot M_0^2}.$$

La déformation équivalente est calculée par :  $d\zeta \cdot \beta \cdot N_0 = d\chi_p \cdot M = 2 \cdot d\lambda \cdot \beta^2$ .

Nous obtenons donc :  $d\zeta = \gamma \cdot h \cdot \frac{d\chi_p}{6}$  et sachant que nous négligeons les

variations de  $\gamma$  :  $\zeta = \gamma \cdot h \cdot \frac{\chi_p}{6}$

La courbure plastique est :  $\chi_p = \chi - \chi_e = \chi - \chi_0 \cdot \frac{M}{M_0}$

$$\text{donc } h \cdot \frac{\chi_p}{2} = \varepsilon - \varepsilon_0 \cdot \frac{M}{M_0}$$

Le moment de flexion est calculé par :  $M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \cdot \sigma(z) \cdot dz = \frac{h}{2 \cdot \varepsilon^2} \int_0^\varepsilon e \cdot \sigma(e) \cdot de$

Nous définissons donc la fonction  $\gamma(\zeta)$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{\gamma}{3} \cdot \left( \varepsilon - \varepsilon_0 \cdot \frac{M}{M_0} \right) \\ \gamma = \frac{M}{\beta \cdot M_0} = \frac{3}{\beta \cdot \sigma_0 \cdot \varepsilon_0^2} \int_0^\varepsilon e \cdot \sigma(e) \cdot de \end{array} \right.$$

**ANNEXE 2 : Opérateur seuil**

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_0^2} [A] & \frac{1}{2s\sqrt{3} \cdot \gamma \cdot N_0 \cdot M_0} [A] \\ \frac{1}{2s\sqrt{3} \cdot \gamma \cdot N_0 \cdot M_0} [A] & \frac{1}{\gamma^2 \cdot M_0^2} [A] \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } [A] = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$