

---

# Résolution auto-adaptative par éléments finis de problèmes de diffusion fortement non linéaires

Stéphane Bonelli\* — Frédéric Golay\*\* — Olivier Débordes

*Equipe « Modèles Numériques »  
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (CNRS)  
et Institut Méditerranéen de Technologie  
Technopôle de Château Gombert  
13451 Marseille cedex 20*

*\* et CEMAGREF  
BP 31, Le Tholonet  
13612 Aix-en-Provence cedex 01*

*\*\* et FRAMASOFT-CSI  
10 rue Juliette Récamier  
BP 3083  
69398 Lyon cedex 03*

---

*RÉSUMÉ. Dans de nombreux problèmes instationnaires et non linéaires, la détermination de l'incrément de temps nécessaire au bon déroulement d'une simulation par éléments finis est trop souvent fastidieuse. Nous proposons donc une stratégie de pas autoadaptatifs et nous l'appliquons à la résolution par éléments finis des équations de diffusion. Après une analyse du principe de la méthode sur des cas simples, nous résolvons deux problèmes de diffusion fortement non linéaires, afin de démontrer l'efficacité d'une telle approche. Le premier consiste en la simulation de la polymérisation d'une structure composite (couplage thermo-chimique) et le second consiste en la simulation du remplissage d'un barrage en terre (écoulement en milieu poreux indéformable non saturé).*

*ABSTRACT. For many non stationary problems, the time steps necessary to finite element computing are most of the time very difficult to determine. Thus, we propose an automatic method and we apply it to solve diffusion's equations. After analysing on simple cases the principle of this method, we solve two problems highly non linear. The first one consists on the curing process of a composite structure (thermo-chemical coupling), and the second consists on the simulation of an earthdam's filling (flow in porous media).*

*MOTS-CLÉS : thermique, écoulement non saturé, éléments finis, résolution adaptative.*

*KEY WORDS : thermic, unsaturated flow, finite element, automatic solving.*

---

## Introduction

Dans de nombreux problèmes instationnaires ou non-linéaires, la détermination de l'incrément de temps (ou de sollicitation) nécessaire au bon déroulement d'une simulation par éléments finis dépend quasi exclusivement de l'expérience et de l'intuition de l'ingénieur. Il en résulte, notamment pour des problèmes industriels complexes, des temps de modélisation très vite prohibitifs.

A partir des travaux déjà effectués concernant l'intégration locale [GOL92,BON91,DAB93], et des méthodes proposées par [DEB88], nous mettons en oeuvre une stratégie de pas adaptatifs et nous l'appliquons à la résolution par éléments finis des équations de diffusion.

Après une analyse du principe de la méthode sur des cas simples qui serviront de validation, nous résoudreons deux problèmes fortement non-linéaires, afin de justifier l'opportunité d'une telle approche.

Le premier problème consiste en la simulation de la polymérisation d'une structure composite (couplage thermo-chimique). Dans ce cas, la non-linéarité essentielle est due au dégagement exothermique de la réaction chimique.

Le deuxième problème consiste en la simulation du remplissage d'un barrage en terre (écoulement en milieu poreux indéformable non saturé). Dans ce cas, ce sont les fortes variations des caractéristiques des matériaux et des sollicitations qui engendrent une non-linéarité difficile à traiter numériquement.

## 1. Rappels: formulation éléments finis des équations de diffusion

### 1.1. Les équations de la thermique avec exothermie de réaction

A partir de l'équation de Fourier et de l'équation de conservation, on écrit [1], l'équation anisotrope de la chaleur, à laquelle on adjoint un terme 'source' inhérent à la réaction exothermique de polymérisation [2],

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + f_v + \rho H_{\text{tot}} \dot{\alpha} = 0 \quad [1]$$

$$\dot{\alpha} = f(\alpha, T, t) \quad [2]$$

où  $T$  est la température,  $k$  la matrice de conductivité thermique,  $C$  la chaleur spécifique,  $\rho$  la masse volumique,  $f_v$  une source de chaleur,  $H_{\text{tot}}$  l'enthalpie totale de réaction,  $\alpha$  le degré d'avancement de la réaction et  $f$  l'équation de la cinétique [GOL92].

Ces équations fondamentales sont complétées par des conditions aux limites de type température imposée [3], ou convectif et radiatif [4], ou encore flux thermique imposé [5]. On rappelle ici, que toutes les caractéristiques sont a priori fonctions de l'espace, de la température et du temps.

$$T = \overline{T} \quad [3]$$

$$k \text{ grad} T \cdot n = h (T_0 - T) + \sigma \varepsilon_0 (T_0^4 - T^4) \quad [4]$$

$$k \text{ grad} T \cdot n = f_s \quad [5]$$

## 1.2. Les équations des écoulements en milieu poreux indéformable

A partir de l'équation de Darcy et de l'équation de conservation de la masse, on écrit [6], l'équation anisotrope de Richard pour un écoulement en milieu poreux indéformable non saturé.

$$\text{div}(k \text{ grad} H) - C \frac{\partial H}{\partial t} + f_v = 0 \quad [6]$$

où  $H$  est la charge hydraulique,  $k$  la matrice de perméabilité,  $C$  la capacité hydraulique et  $f_v$  une sollicitation volumique [BON93].

Cette équation est complétée par des conditions aux limites de type charge hydraulique imposée [7], ou encore flux imposé [8]. Toutes les caractéristiques sont a priori fonctions de l'espace, de la charge hydraulique et du temps .

$$H = \overline{H} \quad [7]$$

$$k \text{ grad} H \cdot n = f_s \quad [8]$$

## 1.3. La formulation éléments finis

### 1.3.1 Correspondance

[1] et [6] sont des équations de diffusion que l'on peut écrire d'une façon unique:

$$\text{div}(k \text{ grad} U) - C \frac{\partial U}{\partial t} + q_v = 0 \quad [9]$$

avec les conditions aux limites:

$$U = \overline{U} \quad [10]$$

$$k \text{ grad} U \cdot n = q_s \quad [11]$$

où l'on utilise les notations suivantes:

	Thermique	Hydraulique
U	Température T(X,t)	Charge hydraulique H(X,t)
Unité	-	m
C	Chaleur spécifique*masse volumique $\rho(X,T,t) * C(X,T,t)$	Capacité C(X,H,t)
Unité	J / m <sup>3</sup>	1 / m
k	Conductivité thermique anisotrope k(X,T,t)	Perméabilité anisotrope k(X,H,t)
Unité	W / °C m	m / s
q <sub>S</sub>	Flux thermique à la frontière $f_s(X,T,t) + \sigma \epsilon_0(X,T,t)(T_0^A(X,t) - T^A)$ $+ h(X,T,t)(T_0(X,t) - T)$	Flux hydraulique à la frontière f <sub>s</sub> (X,H,t)
Unité	W / m <sup>2</sup>	m / s
q <sub>v</sub>	Source thermique $\rho H_{tot} \dot{\alpha}(X,T,t,\alpha) + f_v(X,T,t)$	Sollicitation volumique f <sub>v</sub> (X,T,t)
Unité	W / m <sup>3</sup>	1 / s

1.3.2 *Discrétisation spatiale*

La formulation par éléments finis des équations [9-11] se ramène classiquement, via une écriture variationnelle, à la résolution du système suivant :

$$[C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F_S\} + \{F_V\} \tag{12}$$

ou encore en développant:

$$\sum_e \int_{V^e} \{N\} C \langle N \rangle dV^e \{\dot{U}\} + \sum_e \int_{V^e} [B]^T [k] [B] dV^e \{U\} = \sum_e \int_{S^e} \{N\} (q_s) dS^e + \sum_e \int_{V^e} \{N\} (q_v) dV^e$$

$$U(X,t) = \sum_j N_j^e(X) U_j^e(t) = \langle N \rangle \{U\} \quad \text{grad } U = [B] \{U\}$$

où N<sub>j</sub><sup>e</sup> représente les fonctions d'interpolation au noeud j et T<sub>j</sub><sup>e</sup> les températures nodales de l'élément e.

Remarque.1: Dans le cas thermique, la puissance calorifique inhérente au dégagement exothermique de la réaction de polymérisation est intégrée en chaque point d'intégration de l'élément. On peut alors discerner deux types d'équations différentielles: l'une au niveau "local" qui détermine le degré d'avancement de la réaction et par là même la puissance exothermique, et l'autre au niveau "global" qui détermine le champ de température au sein de la structure. L'expression et la résolution de [2] ne seront pas exposées ici (cf. [GOL88], [GOL92],...)

**Remarque 2:** L'équation [12], et les expressions détaillées qui la suivent, sont écrites dans le repère global; comme les orientations matérielles du matériau composite dépendent de la position, et comme l'expression de la matrice de conductivité  $[k]$  est simple dans le repère matériel local, il est préférable d'effectuer les changements de repère global-local chaque fois que le calcul de grandeurs ponctuelles, telles que  $[B]^T[k][B]$ , est requis.

**Remarque 3:** Nous avons écrit la matrice capacité  $[C]$  sous sa forme consistante. Dans certains cas, nous utilisons également des méthodes de 'lumping' (diagonalisation de la matrice capacité).

### 1.3.3 Résolution du problème global non-linéaire

Sur un intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$  on cherche à résoudre [12] en appliquant la méthode du point milieu généralisée. En utilisant les notations  $\{U(t)\}=\{U_t\}$  et  $[K(U_t)]=[K_t]$ , on écrit [12] à l'instant  $t+\theta\Delta t$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) en supposant une variation linéaire des inconnues, soit :

$$\{U_{t+\theta\Delta t}\} = (1-\theta)\{U_t\} + \theta\{U_{t+\Delta t}\} \quad \dot{U} = \frac{U_{t+\Delta t} - U_t}{\Delta t}$$

$$\{R(\theta, \Delta t)\} = [C_{t+\theta\Delta t}](\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\}) + \Delta t [K_{t+\theta\Delta t}](\theta\{U_{t+\Delta t}\} + (1-\theta)\{U_t\}) - \Delta t (\{F_{S_{t+\theta\Delta t}}\} + \{F_{V_{t+\theta\Delta t}}\}) = 0 \quad [13]$$

Le problème [13] est non-linéaire du fait de la dépendance en température (ou en charge hydraulique) de  $[C]$ ,  $[K]$ ,  $\{F_S\}$  et  $\{F_V\}$ . On cherche alors à résoudre le système par une méthode mixte de type substitution et de type Newton-Raphson.

D'après [GOL92], on est alors amené à résoudre à chaque itération  $i$  :

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial U} \right]_{i-1} \{\delta U^i\} = - \{R(U_{t+\Delta t}^{i-1})\} \quad [14]$$

avec

$$\{U_{t+\Delta t}^i\} = \{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} + \{\delta U^i\}$$

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial U} \right]_{i-1} = [C_{t+\theta\Delta t}^{i-1}] + \theta \Delta t [K_{t+\theta\Delta t}^{i-1}] - \Delta t \left[ \frac{\partial F_{S_{t+\theta\Delta t}}^{i-1}}{\partial U} \right]$$

## 2. Un algorithme à pas autoadaptatifs pour la résolution des équations de diffusion

### 2.1. Principe

*L'objectif d'un tel algorithme est de permettre la détermination d'un pas de temps optimal; c'est-à-dire un pas de temps tel que la convergence soit assurée sous n'importe quelle condition, avec une précision souhaitée et en un temps de calcul minimal.*

L'algorithme que nous proposons de mettre en oeuvre est le suivant:

- A) Choix de la taille du premier pas  $\Delta t$   
 Choix de trois précisions :  $ER_0 \geq ER_2 \geq ER_1$
- B) Calcul de U sur l'intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$ .  
 Si  $\|R(1, \Delta t)\| \leq ER_1 \longrightarrow D)$   
 Si  $\|R(1, \Delta t)\| > ER_1 \longrightarrow C)$
- C) Diminution du pas de temps :  $\longrightarrow B)$
- D) Calcul du résidu aux instants  $t+\Delta t/2$  et  $t+3\Delta t/2$
- E) Détermination de  $\Psi(\beta)$  telle que:  $\Psi(\beta) = \|R(1, \beta \Delta t)\|$
- F) Détermination de  $\beta_1$  et  $\beta_2 / \Psi(\beta_1) = \Psi(\beta_2) = ER_2; \beta_1 > 1 > \beta_2$   
 Si  $\Psi(1/2) \leq ER_0 \longrightarrow G)$   
 Si  $\Psi(1/2) > ER_0 \longrightarrow C)$
- G) Allongement de la solution à  $t+\beta_1 \Delta t$  et estimation du pas suivant  
 $t = t + \beta_1 \Delta t$   
 $\Delta t = \beta_1 \Delta t \longrightarrow B)$

### 2.2. Description de l'algorithme

#### 2.2.1 Etape A

Dans les cas présentés, nous ne déterminons pas de façon optimale le premier pas de temps. Cependant, certains auteurs proposent des méthodes que nous n'avons pas encore testées [MOU89].

#### 2.2.2 Etape B

L'étape B correspond à la résolution de [13] sur un intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$  par une méthode de type Newton-Raphson [14] en un nombre maximal d'itérations défini

par l'utilisateur, avec une méthode implicite ( $\theta=1$ ). La convergence est atteinte quand la norme du résidu est inférieure à une précision désirée ER1. Dans le cas contraire, on diminue le pas de temps par deux et on recommence.

Le critère de convergence ( $\|R(1,\Delta t)\| \leq ER1$ ) porte sur la norme du résidu (second membre de [14]), qui peut être, au choix de l'utilisateur:

- $\|R\| = \sqrt{\sum_i R_i^2}$
- $\|R\| = \text{Max}_i |R_i|$
- $\|R\| = \frac{\text{Max}_i |R_i|}{\text{Max}_{i,j=1,n} (|[C_{ij}][\Delta U_j]|, |\Delta t[K_{ij}][U_j]|)}$

Les deux premières normes sont absolues, et dépendent donc directement des échanges mis en jeu, alors que la troisième [BON93] est relative.

### 2.2.3 Etapes D et E

Afin de tester la validité de la discrétisation temporelle, on cherche à évaluer la norme du résidu aux alentours de l'intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$ . Pour ce faire, on calcule la norme du résidu aux instants  $t+\Delta t/2$  et  $t+3\Delta t/2$ , puis par interpolation des valeurs du résidu en ces deux instants et à l'instant  $t+\Delta t$  (calculé à l'étape B), on définit une fonction  $\Psi$  telle que :

$$\Psi(\beta) = \|R(1, \beta \Delta t)\| \quad \beta > 0$$

Pour déterminer  $\Psi(\beta)$ , nous avons testé deux types d'interpolation :

- une interpolation parabolique (figure 1);
- une interpolation "biparabolique" : deux demi-paraboles avec tangente horizontale au pas milieu (figure 2).

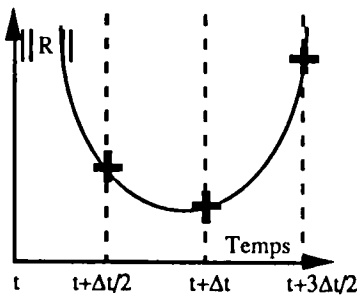


Figure 1. Modèle parabolique

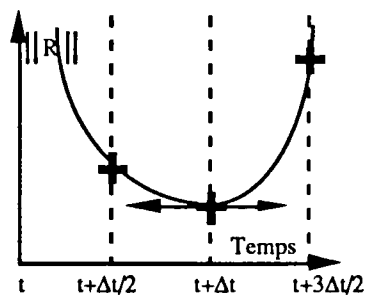


Figure 2. Modèle biparabolique

### 2.2.4 Etapes F et G

Initialement, nous avons défini trois précisions: ER2 qui représente la précision requise pour le calcul, ER1 qui représente la précision requise à la convergence et ER0 qui représente la précision requise à l'instant  $t+\Delta t/2$ . ER0 nous permet de vérifier que le pas de temps adopté est satisfaisant; c'est-à-dire que l'hypothèse suivant laquelle la solution varie linéairement avec le temps sur l'intervalle de temps  $\Delta t$  est encore "acceptable".

A ce stade, deux alternatives se présentent:

**Cas 1:** la précision au pas milieu est satisfaite. On cherche alors à "allonger" la solution; on détermine  $\beta_1$  ( $\beta_1 \geq 1$ ) tel que la solution à l'instant  $t+\beta_1\Delta t$  soit acceptable, c'est à dire  $\Psi(\beta_1) = ER2$ . Puis on accepte la solution à  $t+\beta_1\Delta t$  et on retourne à l'étape B avec un pas de temps  $\Delta t = \beta_1\Delta t$ .

**Cas 2:** la précision au pas milieu n'est pas satisfaite, il est nécessaire de diminuer le pas de temps. On cherche alors  $\beta_2 < 1$  tel que  $\Psi(\beta_2) = ER2$  et on recommence à l'étape B sur l'intervalle  $[t, t+\beta_2\Delta t]$ .

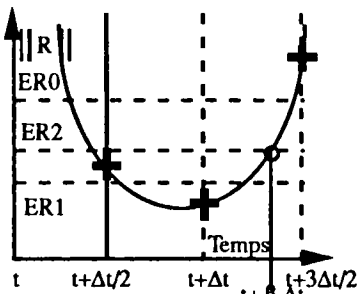


Figure 3. Cas 1

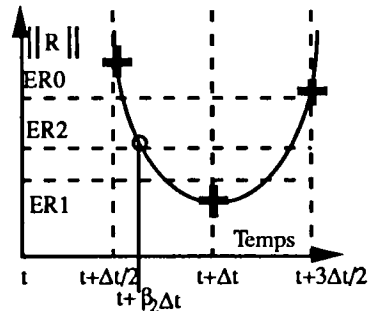


Figure 4. Cas 2

Après comparaison des deux types d'interpolation, nous avons constaté, qu'il était préférable "d'allonger" la solution par une interpolation bi-parabolique, et de diminuer le pas de temps par une interpolation parabolique.

## 3. Application à la thermochimie

### 3.1 Validation et analyse

Afin d'analyser les possibilités de l'algorithme, nous allons simuler par éléments finis la polymérisation d'une plaque épaisse Carbone/Epoxy (Figures 5 et 6), d'abord en utilisant un pas de temps constant, puis en utilisant des pas de temps autoadaptatifs. Ce problème, déjà traité [GOL88, GOL92], est significatif de par les très fortes non-linéarités dues aux réactions de polymérisation et à la dépendance en température du coefficient d'échange de chaleur par convection.



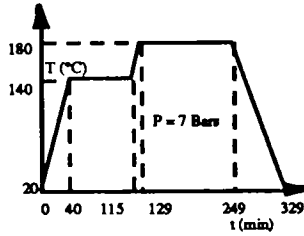


Figure 5. Cycle de cuisson

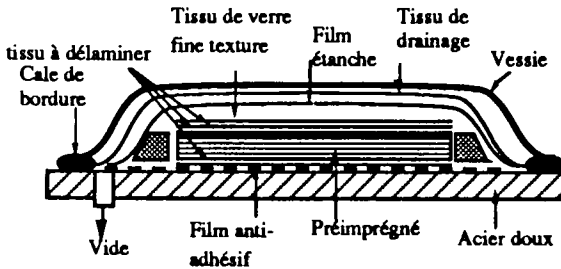


Figure 6. Environnement de polymérisation

Sur ce problème nous avons observé un écart d'au plus 8% entre les résultats du calcul et les mesures expérimentales.

Dans le tableau n°1 ci-après, nous reportons pour chaque triplet de précision testé (ER0, ER1, ER2), le nombre de pas et d'itérations nécessaires à la complète résolution du problème, ainsi que le temps CPU écoulé sur une station IBM RS6000/550.

CAS	C0	C1	C2	C3	C4	C5
Précision ER0	pas constant 60 s	$5.10^{-5}$	$5.10^{-4}$	$5.10^{-4}$	$2.10^{-4}$	$5.10^{-3}$
Précision ER1		$1.10^{-5}$	$5.10^{-5}$	$1.10^{-4}$	$5.10^{-5}$	$5.10^{-4}$
Précision ER2		$1.10^{-5}$	$1.10^{-4}$	$1.10^{-4}$	$1.10^{-4}$	$1.10^{-3}$
Temps CPU en s	156.3	153.7	66.7	65.7	80.4	31.5
Nombre d'itérations	1676	924	402	386	490	184
Nombre de pas	329	250	97	97	114	42

Tableau 1. Performances en fonction des précisions choisies

Sur la figure 7, nous constatons une bonne concordance entre le calcul effectué à pas constants et les calculs effectués avec des pas de temps autoadaptatifs. Des différences ne sont visibles que lors du pic exothermique fortement non-linéaire, pour des précisions requises (ER2 cas C5) médiocres.

Le gain en temps de calcul entre les cas C0 et C1 n'est pas significatif, si ce n'est que dans le second cas, nous sommes certains de passer toutes les difficultés du calcul avec une excellente précision, alors que dans le premier cas, nous avons du "tâtonner" (non-convergence, relance du calcul...etc...) afin de déterminer un pas de temps qui convienne. En fait, c'est en temps complet 'de modélisation' que la méthode proposée

apporte une nette amélioration. Notamment, avec une précision médiocre (cas C5), il est possible de dégrossir rapidement un problème.

Dans les cas C2 et C3 on constate que ER1 n'a aucune influence sur le nombre de pas effectués. Par contre on augmente sensiblement (et inutilement) le nombre d'itérations et donc le temps de calcul. Un rapport de 1 à 2 entre ER2 et ER1 est suffisant.

ER0, la précision requise à l'instant  $t+\Delta t/2$ , est le paramètre qui "pilote" en grande partie la gestion des pas de temps pour une précision requise donnée (cas C2 et C4). On ne peut définir a priori une valeur optimale de ER0. Cependant on constate bien évidemment, qu'il est déconseillé de prendre  $ER0=ER2$ . Dans ce cas là, on ne peut stabiliser les pas de temps. La valeur de  $\beta$  oscille alternativement entre 0.5 et 1.3. On observe ce phénomène sur la figure 8 pour le cas C4.

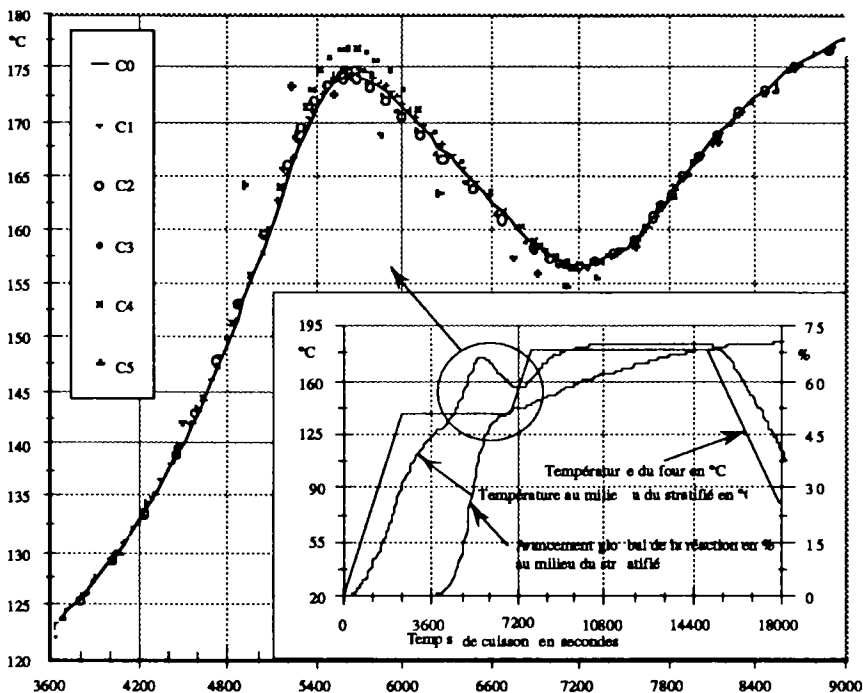


Figure 7. Evolution de la température au sein du stratifié pour diverses précisions

Sur la figure 8, qui représente la valeur du pas de temps au cours du calcul dans les divers cas traités, nous observons que le pas de temps évolue de façon croissante durant les intervalles de temps où la température du four varie linéairement. A chaque discontinuité de la sollicitation, le pas de temps diminue afin de satisfaire à la précision requise au pas milieu. Si l'on veut diminuer le nombre de pas de temps, il est alors souhaitable d'effectuer le calcul par morceaux. Lors du pic exothermique, c'est la non-linéarité inhérente au dégagement exothermique qui est responsable de la diminution des pas de temps.

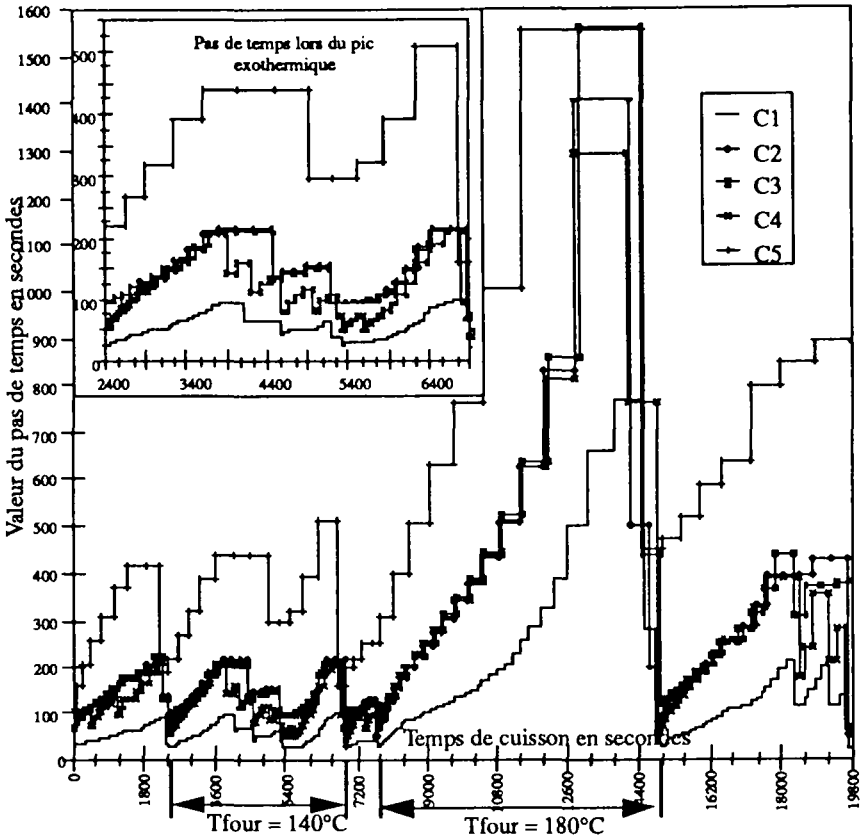


Figure 8. Evolution du pas de temps pour diverses précisions

### 3.2 Application industrielle : polymérisation du moyeu starflex

Sur un problème industriel complexe, le temps de calcul nécessaire à une simulation devient vite prohibitif. Il se présente alors deux alternatives: soit l'utilisateur choisit intuitivement un pas de temps très petit en espérant que le calcul aboutira sans dommages (mais au bout de combien de temps ?), soit il choisit un pas de temps grossier et doit relancer la modélisation en cas de non convergence!.

C'est afin de vérifier que notre approche de gestion de pas de temps peut devenir une aide à la modélisation de problèmes complexes que nous avons choisi de modéliser la polymérisation du 'Moyeu Starflex'. Dans cette étude nous testons la polymérisation de la structure avec une nouvelle résine. Cette structure composite, réalisée par la société EUROOPTER à Marignane, est une pièce vitale transmettant d'une part le couple entrainant de la boîte de réduction principale aux pales, et d'autre part les charges aérodynamiques et d'inertie des pales au mât rotor.

### 3.2.1 Présentation du problème

Le Starflex est constitué de composites Verre/Epoxy (Figure 9). Les tissus préimprégnés sont disposés dans un moule suivant des orientations prédéfinies. Par raison de symétrie on ne considère qu'un huitième de la structure en imposant une condition de flux nul dans les plans de symétrie.

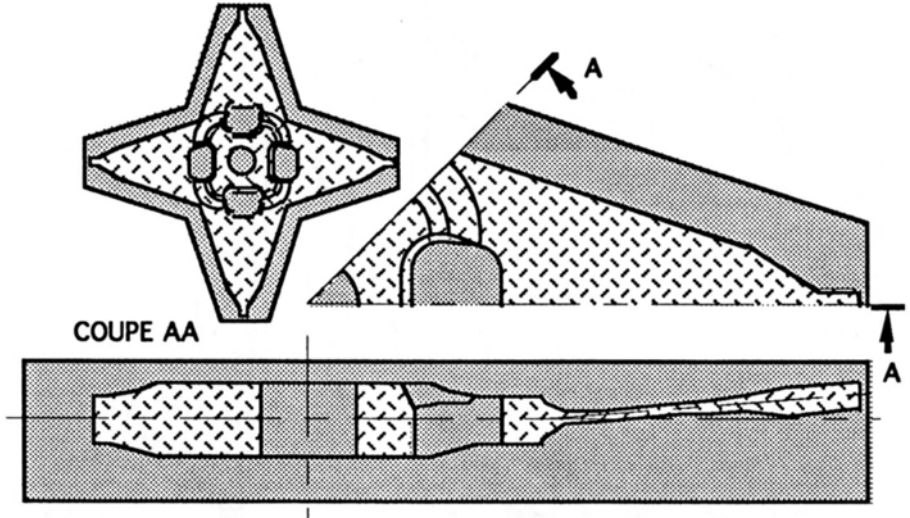


Figure 9. Géométrie du moyeu Starflex

Le moule est disposé entre deux plateaux chauffants qui ont pour fonction de compacter la structure et imposer un cycle de cuisson. Les parties inférieure et supérieure du moule sont donc à température imposée (évoluant dans le temps), alors que les faces latérales sont soit à flux nul (par raison de symétrie), soit à flux de type convectif (échange avec l'air ambiant) (Figure 10).

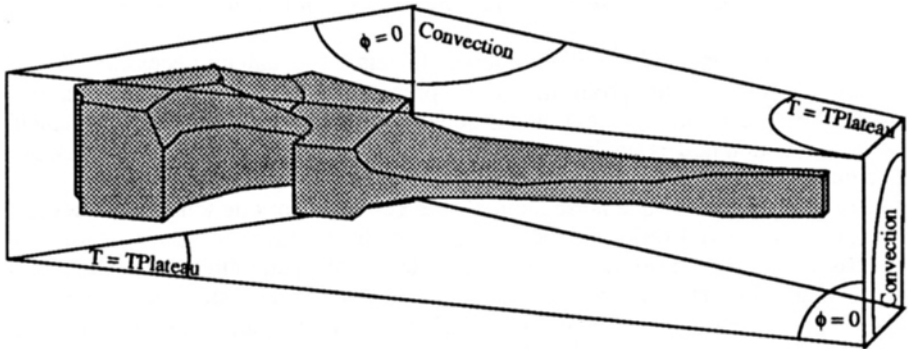


Figure 10. Conditions aux limites

Le maillage du Starflex tient compte de la séquence d'empilement des tissus. Chaque groupe d'éléments représente une séquence d'empilement telle que la théorie

de l'homogénéisation périodique puisse par la suite être appliquée, afin de déterminer les conductivités anisotropes du matériau homogène équivalent. Le maillage complet comporte 2672 éléments à interpolation quadratique et 10899 noeuds (Figure 11).

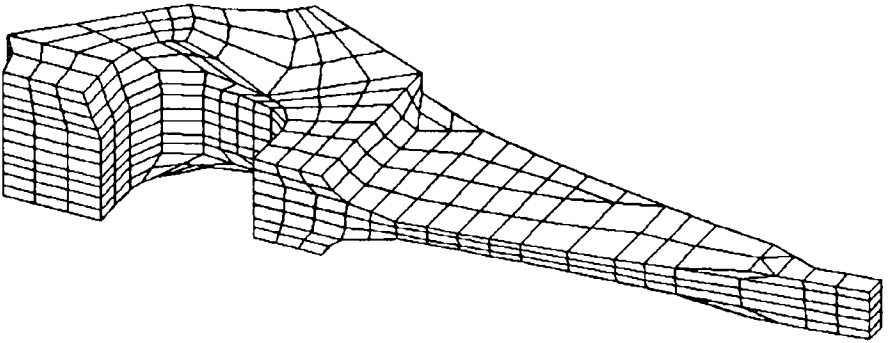


Figure 11. Discrétisation éléments finis du Starflex

### 3.2.2 Résultats

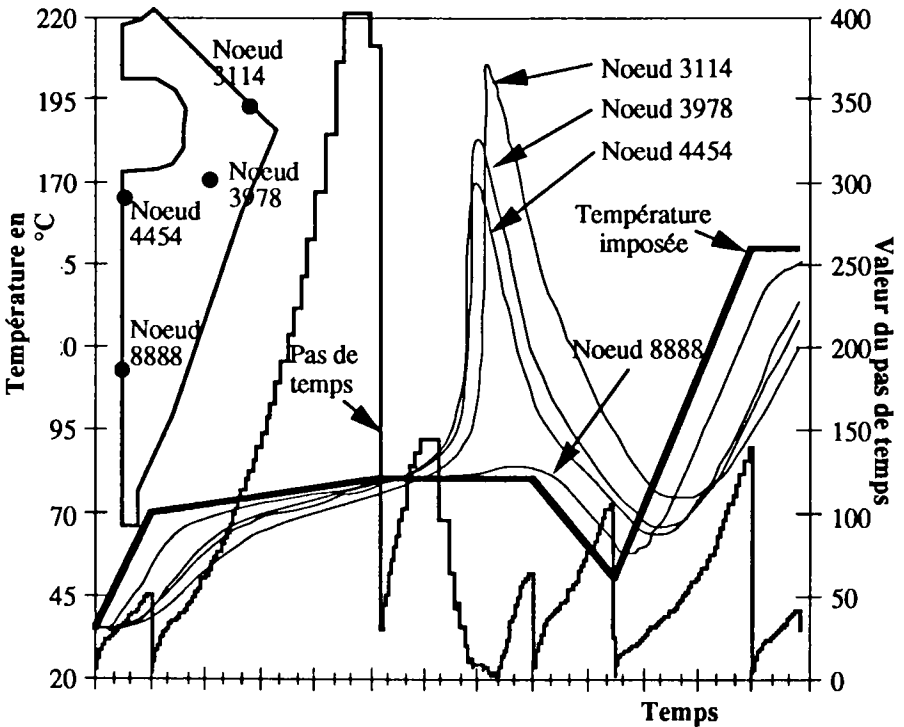


Figure 12. Evolution des températures et du pas de temps en cours de polymérisation

Sur la figure 12, nous représentons l'évolution du pas de temps au cours d'un

calcul réalisé avec les précisions requises sur la norme quadratique du résidu suivantes:  $ER_0=5$ ,  $ER_1=0.5$ ,  $ER_2=1$ . La précision  $ER_2$  choisie limite la valeur du résidu de telle sorte que l'écart de température correspondant à ce résidu (sur un problème stationnaire), soit de l'ordre de  $1^\circ\text{C}$ .

On constate une diminution du pas de temps lors du pic exothermique et à chaque changement de sollicitation car alors la précision au pas milieu n'est plus respectée. De part la complexité des phénomènes mis en jeu, l'algorithme adapte la valeur des pas de temps de quelques secondes à quelques centaines de secondes.

Le calcul complet, pour 10899 degrés de libertés et une largeur de bande maximale de 933, nécessite 622 pas et 2059 itérations, soit 12 heures de calcul sur un Cray Y-MP2 et 30 heures sur une station IBM RS6000/550.

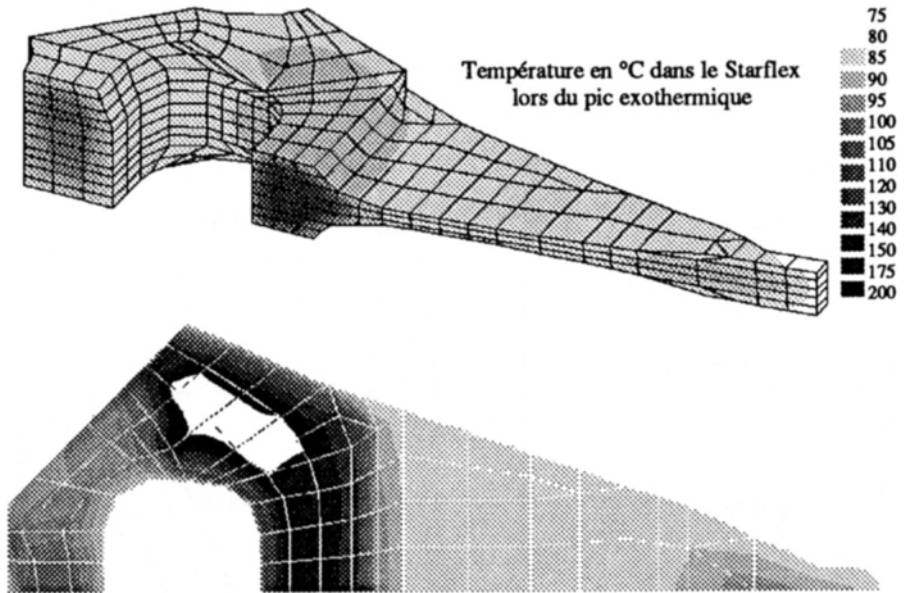


Figure 13. Températures au sein du Starflex lors du pic exothermique

D'après l'évolution des températures présentées sur la figure 12, on remarque que seule la partie centrale de la structure est soumise à une forte exothermie; la faible épaisseur du bras du starflex permet d'évacuer l'excès de chaleur. On constate ce phénomène sur la figure 13, où lors du pic on observe au sein de la structure un écart de température de l'ordre de  $120^\circ\text{C}$ .

A la fin du cycle de cuisson la structure est entièrement polymérisée (entre 97.5% et 100%) et de façon homogène. Cependant, les niveaux de température atteints et les forts gradients observés au cours de la cuisson simulée, nous incitent à optimiser ce cycle de polymérisation au stade expérimental actuel pour limiter les pics exothermiques.

### 4. Application à l'écoulement insaturé en milieu indéformable

#### 4.1 Validation et analyse

On simule un écoulement d'eau dans un massif de sable (figure 14). La charge hydraulique initiale est uniforme ( $H_0=0,65m$ ). Un flux constant est imposé sur une partie de la surface ( $q=0,148m/h$ ). Le massif est drainé à la base de la frontière latérale droite ( $x=3m, 0 \leq z \leq 0,65m$ ). Les caractéristiques hydrodynamiques du sable sont données dans [VAU79].

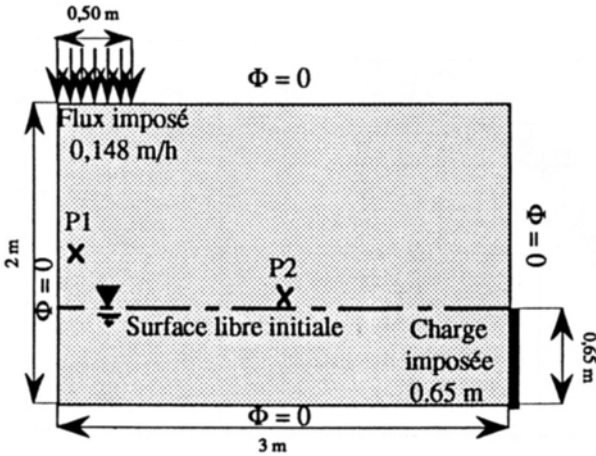


Figure 14. Descriptif de l'expérience.

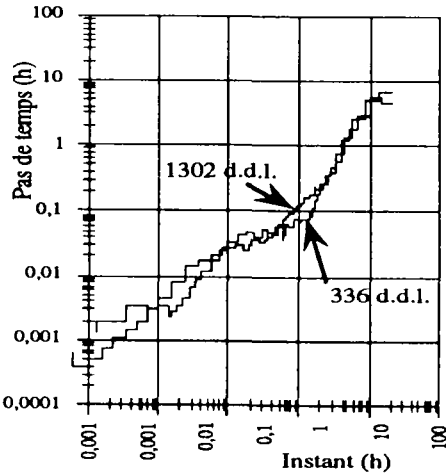


Figure 15. Evolution du pas de temps pour deux maillages linéaires.

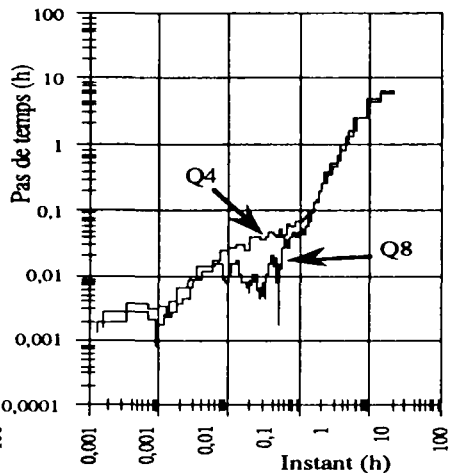


Figure 16. Evolution du pas de temps pour deux types d'éléments finis.

Les figures 15 et 16 permettent de constater que l'efficacité de la stratégie de pas de temps adaptatifs est peu liée à la discrétisation spatiale.

L'évolution du pas de temps est similaire pour deux raffinements (figure 15: deux maillages constitués d'éléments linéaires Q4 de 336 et 1302 degrés de liberté) et deux types d'approximation spatiale (figure 16: deux maillages de 300 éléments linéaires Q4 et quadratiques Q8). On remarque cependant de sévères réductions du pas de temps sur le maillage quadratique (Q8) au moment où l'eau infiltrée atteint la nappe phréatique (figure 16).

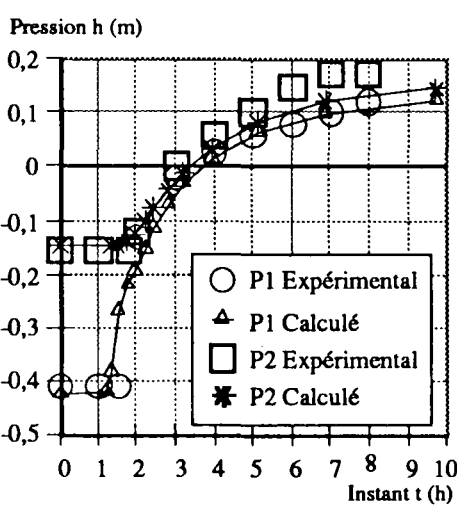


Figure 17. Pressions aux points P1 et P2. Comparaison Expérimental/Calcul.

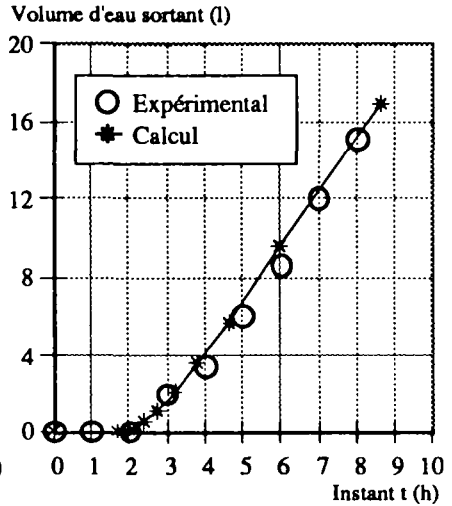


Figure 18. Volume d'eau sortant. Comparaison Expérimental/Calcul.

La figure 17 compare les pressions mesurées [VAU79] et calculées aux points P1 ( $x=0,11m$ ;  $z=1,09m$ ) et P2 ( $x=1,61m$ ;  $z=0,79m$ ). Ces points sont initialement non saturés, et se saturent en eau à  $t=3h$ .

Les pressions  $h$  sont exprimées en mètre de colonne d'eau, et se déduisent de la charge hydraulique  $H$  à partir de la cote verticale du point considéré par

$$h=H-z$$

La figure 18 compare les volumes d'eau sortant mesurés [VAU79] et calculés.

Le phénomène physique est correctement reproduit en pression et en flux, bien que le rôle de l'air ne soit pas pris en compte dans ce modèle. Les précisions requises sur la norme relative du résidu sont  $ER0=5.10^{-2}$ ,  $ER1=10^{-3}$  et  $ER2=10^{-2}$ , et le problème est résolu en 53 pas de temps entre  $t=0h$  et  $t=20h$ .



## 4.2 Application industrielle : barrage de la Verne

### 4.2.1 Présentation du problème

La géométrie d'un barrage est simple lorsqu'on en considère seulement une section plane (problème bidimensionnel). La diversité des matériaux constitutifs et le caractère insaturé (i.e biphase) de l'écoulement sont par contre deux sources de non linéarité matérielle qui imposent des méthodes numériques robustes.

Le barrage de la Verne (Var) a été instrumenté lors de son remplissage [FLE92]. Il est constitué de 8 matériaux, la fondation étant constituée de 2 matériaux (figure 19); les caractéristiques matérielles sont détaillées dans [BON93].

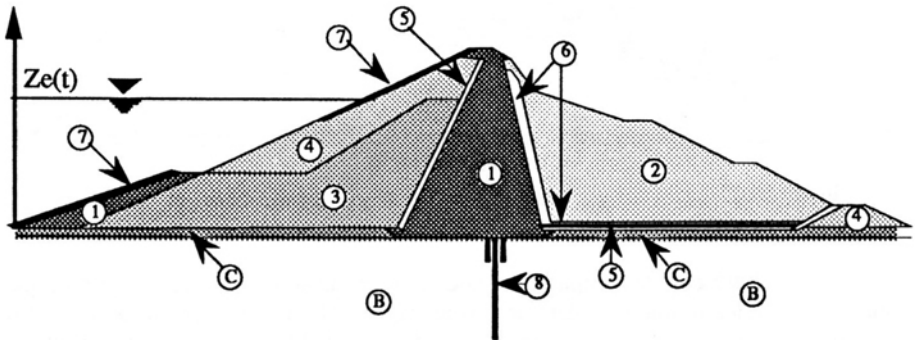


Figure 19. Constitution du barrage de la Verne

- 1/Noyau ( $10^{-8}$  m/s), 2/Recharge aval ( $10^{-5}$  m/s), 3/Recharge amont ( $10^{-5}$  m/s),  
 4/Recharge amont et butée de pied aval ( $10^{-5}$  m/s), 5/Filtre amont et tapis drainant  
 aval ( $10^{-4}$  m/s), 6/Filtre aval ( $10^{-4}$  m/s), 7/Enrochement de protection amont ( $10^{-3}$   
 $3$  m/s), 8/Voile injection béton ( $10^{-9}$  m/s), B/Fondation profonde (anisotrope -  $10^{-7}$  à  
 $10^{-8}$  m/s), C/Fondation de surface (anisotrope -  $10^{-7}$  à  $10^{-8}$  m/s)

Le maillage est constitué de 775 éléments linéaires et comporte 758 d.d.l (figure 20). La condition à la limite de remplissage est variable : sous la côte de retenue  $Ze(t)$ , la charge hydraulique est imposée et égale à  $Ze(t)$  (le flux entrant est inconnu), au-dessus de cette côte, le flux imposé est nul (la charge hydraulique est inconnue).

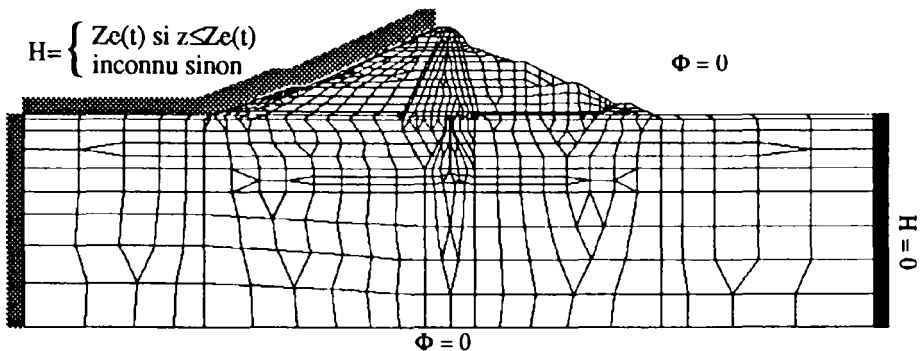


Figure 20. Maillage du barrage et conditions aux limites.

4.2.2 Résultats

L'évolution de la surface libre calculée au cours du remplissage est décrite figure 21. Il est clair que les matériaux à forte perméabilité ne jouent aucun rôle en écoulement, et qu'il peuvent être négligés dans ce type de calcul. Le barrage a cependant été modélisé dans sa totalité pour s'assurer que la stratégie de pas de temps adaptatifs est efficace pour de forts contrastes de perméabilité (de l'ordre de  $10^5$ ), afin d'être utilisée en couplage hydromécanique, où tous les matériaux doivent être pris en compte.

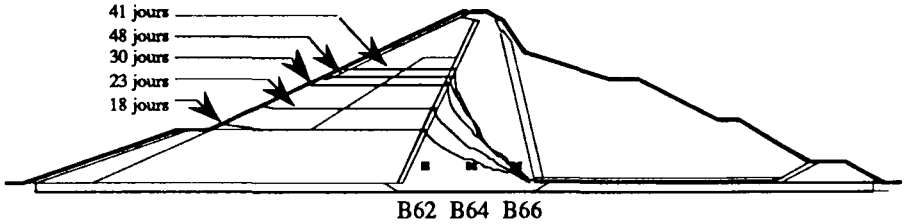


Figure 21. Cellules de mesures, Evolution de la surface libre en cours de remplissage.

La figure 22 présente la comparaison calcul/mesure in situ de la charge hydraulique pour les 3 cellules implantées dans le noyau (figure 21). Les écarts importants sont dus au fait que ce type de calcul ne peut faire l'économie d'un couplage hydromécanique [FLE91]. Toutefois, ce modèle simple reproduit correctement l'évolution de la pression au sein du noyau.

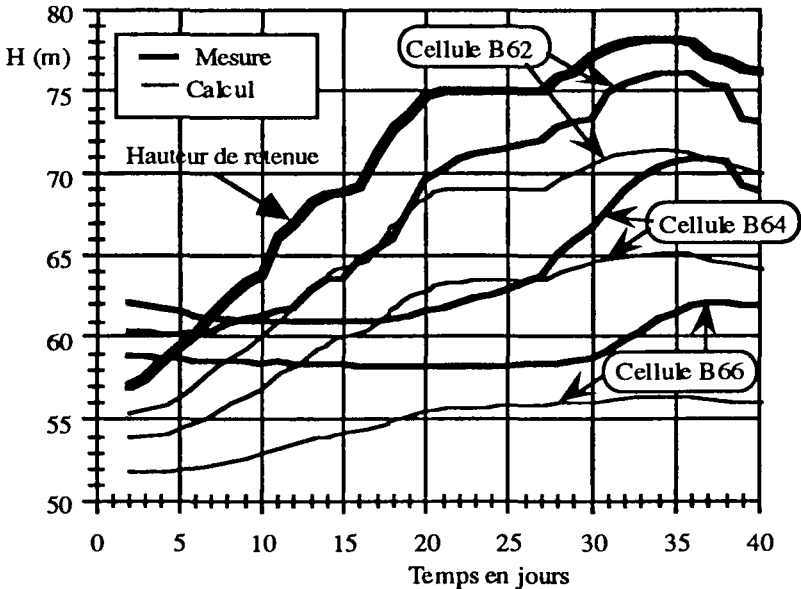


Figure 22. Comparaison calcul/mesure in situ ( $ER0=10^{-1}$ ,  $ER1=10^{-2}$  et  $ER2=5.10^{-2}$ )

La figure 23 compare l'évolution du pas de temps pour trois calculs, correspondant aux précisions requises  $ER2=10^{-1}$ ,  $5 \cdot 10^{-2}$  et  $10^{-3}$ , des rapports  $ER2=10 \cdot ER1$  et  $ER2=5 \cdot ER0$ . La réduction significative du pas de temps qui se produit à  $t \approx 16j$ , commune aux trois courbes, correspond au moment où le niveau de retenue dépasse la hauteur du matériau argilo-sableux situé en butée de pied amont : c'est l'une des difficultés majeures de ce calcul.

La figure 24 compare l'évolution des charges hydrauliques pour deux des calculs précédents ( $ER2=10^{-1}$  et  $5 \cdot 10^{-2}$ ), qui exhibent une différence significative des résultats (moins de 1%), mais bien inférieure à l'écart simulation/mesures. Les résultats en charges hydrauliques pour  $ER2=10^{-2}$  et  $10^{-3}$  sont par contre graphiquement indiscernables.

Sur des problèmes d'écoulement en milieu poreux indéformables, la présente stratégie de pas de temps adaptatifs permet un gain de temps appréciable en levant les difficultés de mise en œuvre numérique (choix du pas de temps), surtout lorsque les conditions aux limites sont non linéaires.

L'utilisation d'une norme relative, des rapports  $ER2=10 \cdot ER1$  et  $ER2=5 \cdot ER0$  et de l'ordre de grandeur  $ER2=1$  à 10%, exhibe des résultats satisfaisants, tant du point de vue des volumes de calcul que par comparaison aux grandeurs mesurées.

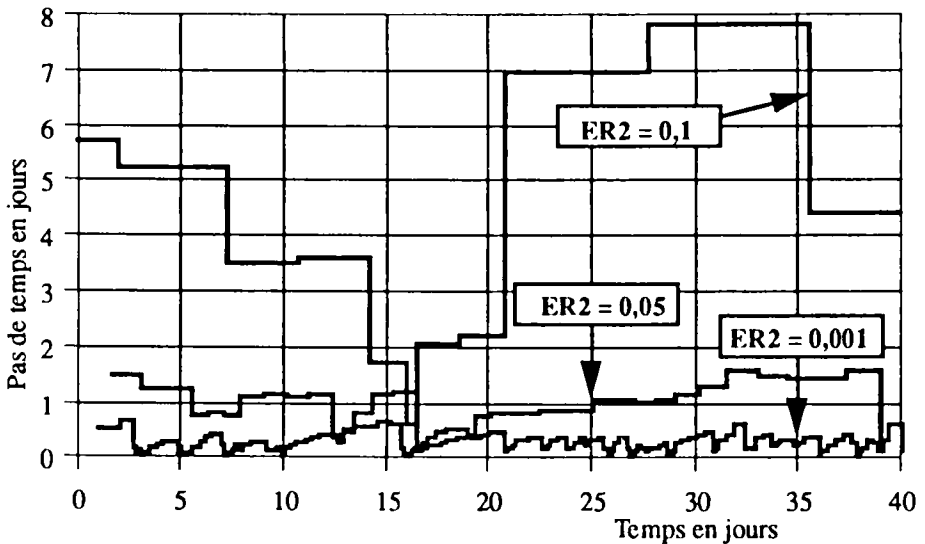


Figure 23. Evolution du pas de temps pour différentes précisions.

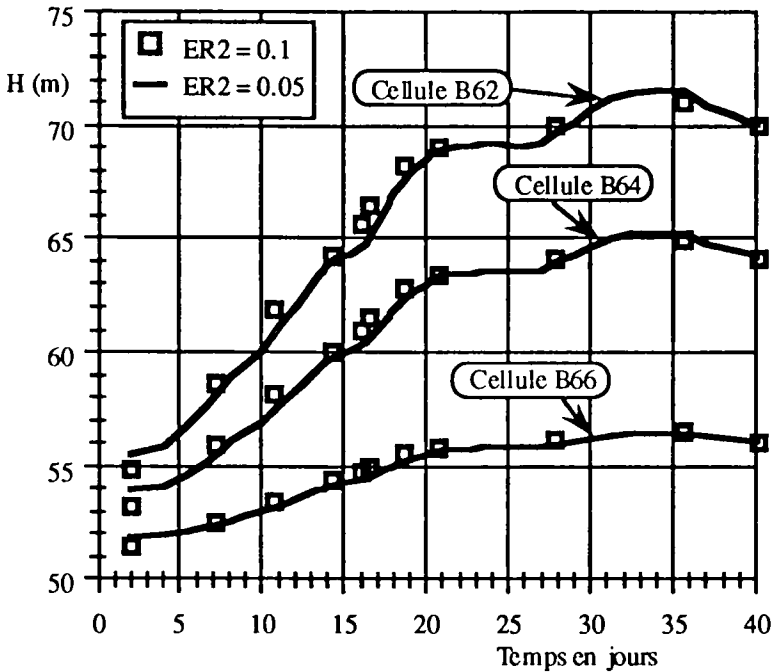


Figure 24. Comparaison des pressions calculées suivant la précision.

### Conclusion

Pour des problèmes industriels fortement non linéaires, la stratégie de pas de temps autoadaptatifs est déterminante pour diminuer le volume de calculs mis en jeu. Cette méthode nécessite plus d'assemblages par pas, mais a l'avantage de trouver un incrément de temps optimal en toute circonstance, si bien que globalement une simulation éléments finis autodaptative est plus rapide que les 'méthodes classiques' où la discrétisation temporelle est laissée à l'appréciation de l'utilisateur. De plus, avec un jeu de paramètres (ER0,ER1,ER2) peu contraignant, il est possible de cerner rapidement l'évolution d'un problème fortement non-linéaire, sans être confronté à des difficultés de convergence de l'algorithme.

Dans le cas présent nous l'avons appliquée à la simulation de la polymérisation de structures composites, puis à la simulation d'écoulements en milieu poreux non-saturé, mais elle a également été testée avec succès sur des problèmes élastoplastiques. Cette méthode est donc suffisamment générale, pour être appliquée à de nombreux domaines.

## Bibliographie

[VAU79] VAUCLIN M., KHANJI D., VACHAUD O., "Experimental and numerical study of a transient two-dimensional unsaturated-saturated water table recharge problem", *Water Resources Research*, Vol.15, n°5, pp 1089-1101, 1979.

[DEB87] DEBORDES O., EL MOUATASSIM M., TOUZOT G., "Local numerical integration of large strain elasto-plastic constitutive laws", second International Conference and short course on constitutive laws for Engineering Materials - Theory and Applications, 5-10 January 1987, Tucson Arizona.

[MOU89] EL MOUATASSIM M., "Modélisation en grandes transformations des solides massifs par éléments finis", thèse de l'Université de Technologie de Compiègne, Octobre 1989.

[BON91] BONELLI S., DEBORDES O., DEGOUTTE G., "Numerical integration of multimechanism elastoplastic constitutive laws for geomaterials", 3rd International Symposium on Plasticity and its Current Applications, Grenoble, 1991.

[GOL91] GOLAY F., "Contribution à la modélisation par éléments finis des phénomènes thermomécaniques apparaissant lors de l'élaboration de matériaux composites", Thèse de l'université Aix-Marseille II, 1991.

[FLE91] FLEUREAU J.M., FRY J.J., "Validation des modèles de couplage sur ouvrages réels", Rapport d'activité du groupe Interaction, GRECO Géomatériaux 1991.

[GOL92] GOLAY F., DEBORDES O., "Modélisation par éléments finis de la polymérisation de structures composites - Applications industrielles", *Revue Européenne des Eléments Finis* v1 n°1, pp51-73 1992.

[BON93] BONELLI S., "Contribution à la résolution de problèmes élastoplastiques de mécanique des sols et d'écoulements non saturés par la méthode des éléments finis", thèse de l'Université Aix-Marseille II, Juin 1993.

[DAB93] DABOUNOU J., TOUZOT G., "Intégration numérique de lois de comportement élastoplastique", à paraître 1993.