

---

# Simulation numérique des modèles de O.A. Ladyzhenskaya par la méthode des éléments finis

Daniel Le Roux\* — Hassan Manouzi\*\*

\* *Department of Atmospheric and Oceanic Sciences  
Mc Gill University  
Montreal H3A 2K6  
Canada*

\*\* *Département de Mathématiques et Statistique  
Université de Laval  
Ste-Foy, Québec G1K 7P4  
Canada*

---

**RÉSUMÉ.** On étudie dans cet article l'approximation par la méthode des éléments finis, du premier et du deuxième modèle de O.A. Ladyzhenskaya pour un fluide visqueux incompressible. Nous montrons l'unicité des formulations faible et discrète associées au problème :

$$\begin{cases} \text{rot} ([\nu_0 + \nu_1 |\text{rot } \mathbf{u}|^{r-2}] \text{rot } \mathbf{u}) - \text{grad} ([\nu_0 + \nu_1 |\text{div } \mathbf{u}|^{r-2}] \text{div } \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Nous présentons et discutons ensuite les résultats numériques de ces deux modèles pour le problème de la cavité entraînée.

**ABSTRACT.** In this paper we study the finite element approximation of the first and the second models for the motion of incompressible viscous flows proposed by O.A. Ladyzhenskaya. The uniqueness result of the weak and discrete formulations associated with the problem :

$$\begin{cases} \text{rot} ([\nu_0 + \nu_1 |\text{rot } \mathbf{u}|^{r-2}] \text{rot } \mathbf{u}) - \text{grad} ([\nu_0 + \nu_1 |\text{div } \mathbf{u}|^{r-2}] \text{div } \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

are established. Numerical results for these two models on a driven cavity problem are the presented and discussed.

**MOTS-CLÉS :** Navier-Stockes, modèles de Ladyzhenskaya, viscosité variable, éléments finis, système non linéaire.

**KEY WORDS :** Navier-Stockes, Ladyzhenskaya models, variable viscosity, finite element, nonlinear system.

---

## I Introduction

Lors du congrès international de mathématiques de 1966 O.A. Ladyzhenskaya proposa trois modèles susceptibles de décrire le mouvement des fluides visqueux incompressibles dans un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^3$  de frontière lipschitzienne  $\Gamma$ . Dans le cas non stationnaire elle montra que sous certaines conditions ces trois modèles possédaient une solution unique et étaient stables sur un intervalle de temps arbitrairement choisi.

Dans un article paru quatre ans plus tard [LAD2 70] elle proposa l'étude de la formulation stationnaire de ces modèles, caractérisée par les systèmes suivants :

### Premier modèle

$$(1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\mathcal{G}(\mathbf{u}) \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où  $\mathbf{u}$  représente le champ de vitesse,  $p$  la pression,  $\mathbf{f}$  la force par unité de masse avec :

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}) = \nu_0 + \nu_1 |\nabla \mathbf{u}|^{r-2} \quad \text{avec } \nu_0, \nu_1 \text{ et } r \geq 2$$

$$|\nabla \mathbf{u}| = \left( \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2} \quad n = 2 \text{ ou } 3$$

### Deuxième modèle

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{rot}(\mathcal{R}(\mathbf{u}) \operatorname{rot} \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{où : } \mathcal{R}(\mathbf{u}) = \nu_0 + \nu_1 |\operatorname{rot} \mathbf{u}|^{r-2} \quad \text{avec } \nu_0, \nu_1 > 0 \text{ et } r \geq 2$$

### Troisième modèle

$$(3) \quad \begin{cases} -\nu(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$$\text{où : } \nu(\mathbf{u}) = \nu_0 + \nu_1 \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^2 d\Omega \quad \text{ou} \quad \nu(\mathbf{u}) = \nu_0 + \nu_1 \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\Omega$$

Ces modèles mathématiques peuvent jouer un rôle important dans l'étude du mouvement des fluides, tant sur le plan théorique que numérique. Leurs applications peuvent toucher des domaines comme l'aéronautique, la météorologie, l'océanographie, et également dans l'industrie chimique et pétrolière.

Dans bien des cas il n'est pas toujours facile de savoir lequel est le plus approprié, spécialement dans le cas où l'écoulement devient turbulent.

S'il est bien admis que les équations de Navier-Stokes fournissent un modèle précis pour le mouvement des fluides visqueux incompressibles, certains scientifiques les abandonnent parfois en faveur des modèles utilisant des lois constitutives non linéaires comme dans l'étude de mouvements de fluides polymères viscoélastiques ou encore viscoplastiques.

Cependant les modèles introduits par O.A. Ladyzhenskaya [LAD2 70] ont une application différente du fait que la loi constitutive linéaire (la loi de Stokes) utilisée dans la dérivation des équations de Navier-Stokes suppose que les dérivées des composantes de la vitesse restent "petites"<sup>1</sup>.

Dans cette étude nous considérons le deuxième modèle dans le cas bidimensionnel et avec des conditions aux limites homogènes du type Dirichlet :

<sup>1</sup> Les gradients d'ordre supérieur à 1 sont négligés.

$$(4) \quad \begin{cases} \vec{\text{rot}}(\mathcal{R}(\mathbf{u}) \text{rot } \mathbf{u}) - \vec{\text{grad}}(\mathcal{D}(\mathbf{u}) \text{div } \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \vec{\text{grad}} p = \mathbf{f} & \text{sur } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{u}) &= \nu_o + \nu_1 |\text{rot } \mathbf{u}|^{r-2} && \text{avec } \nu_o, \nu_1 > 0 \text{ et } r \geq 2 \\ \mathcal{D}(\mathbf{u}) &= \nu_o + \nu_1 |\text{div } \mathbf{u}|^{r-2} && \text{avec } \nu_o, \nu_1 > 0 \text{ et } r \geq 2 \end{aligned}$$

et nous posons  $\nu_o = 1/Re$  où  $Re$  est le nombre de Reynolds.

Le terme en  $\vec{\text{grad}}(\mathcal{D}(\mathbf{u}) \text{div } \mathbf{u})$  introduit dans les équations (4) est nécessaire pour l'étude du problème discret, puisque le terme en rotationnel ne suffit pas à définir une norme dans les espaces faibles choisis. Cependant nous n'en tiendrons pas compte dans l'étude de la formulation faible continue du problème. L'origine de ce modèle [Gol 67] se trouve dans la dérivation de la loi de comportement. En effet dans le modèle de Navier-Stokes celle-ci est déterminée par le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \nu_o (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) - p I$$

où  $\nu_o$  est le coefficient de viscosité, avec  $\nu_o > 0$ , et  $I$  est le tenseur identité.

Le calcul de  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}$  permet alors de mettre en évidence le terme en laplacien où se trouvent contenues les forces internes de frottement puisque :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \nu_o \Delta \mathbf{u} - \nabla p$$

Pour le modèle (4) nous introduisons une nouvelle loi de comportement définie par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = [(\nu_o + \nu_1 |\text{rot } \mathbf{u}|^{r-2}) \text{rot } \mathbf{u}] I^* - p I$$

où  $\nu_1$  est une constante  $> 0$  et  $I^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

qui conduit immédiatement à :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}}^* = -\vec{\text{rot}} [(\nu_o + \nu_1 |\text{rot } \mathbf{u}|^{r-2}) \text{rot } \mathbf{u}] - \nabla p$$

d'où le terme dissipatif  $\vec{\text{rot}} [(\nu_o + \nu_1 |\text{rot } \mathbf{u}|^{r-2}) \text{rot } \mathbf{u}]$  introduit dans les équations (4). Enfin remarquons que lorsque  $\nu_1 = 0$  on retrouve le système de Navier-Stokes classique.

L'intérêt de ce modèle se justifie par des considérations suivantes: pour certaines valeurs du paramètre  $r$  introduit plus haut (par exemple  $r = 2$ ) le modèle reste conforme avec les hypothèses de Stokes pour décrire le mouvement d'un fluide [Ser 59]. Plus encore, les hypothèses de Stokes conduisent normalement à une relation non linéaire entre les champs de vitesse et de pression. Lorsque cette relation est linéarisée on obtient les équations de Navier-Stokes. Or si l'on conserve à la fois les hypothèses de Stokes et quelques uns des termes non linéaires de la relation on aboutit au modèle (4) de O.A. Ladyzhenskaya. Ce dernier provient donc d'une combinaison entre les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, des hypothèses qui définissent un fluide de Stokes et de la conservation de quelques termes non linéaires dans la loi constitutive résultante. Par conséquent, d'un certain point de vue, les équations de Navier-Stokes sont un cas particulier du modèle (4).

Nous verrons également que la condition qui garantit l'unicité des solutions du modèle stationnaire (4) est moins restrictive que la condition analogue du modèle de Navier-Stokes, parce qu'elle autorise l'unicité de la solution pour des nombres de Reynolds plus élevés.

Ces quelques considérations nous montrent déjà que le modèle de O.A. Ladyzhenskaya a un réel intérêt.

Nous faisons tout d'abord une étude théorique du modèle (4) en traitant le problème par une méthode d'éléments finis où nous utilisons l'élément fini  $P_2/P_1$  de Taylor-Hood et nous

choisissons pour le domaine  $\Omega$  une cavité entraînée en deux dimensions  $[0,1] \times [0,1]$ .

Après avoir ainsi défini le cadre mathématique de notre étude nous comparons les résultats numériques des deux premiers modèles définis par les équations (1) et (4) et en remarquant que ceux-ci correspondent bien aux prévisions théoriques. Nous mentionnons en particulier dans chacun des cas, l'importance du choix du paramètre  $r$  ainsi que le sens physique qu'il faut donner à ces modèles.

## II Etude mathématique du problème continu

On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions numériques indéfiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega$ .

Nous utilisons la notation standard pour les espaces usuels de Sobolev. Pour  $r \geq 2$ ,  $L^r(\Omega)$  est l'espace des fonctions de puissance  $r$ -ème sommable sur  $\Omega$  relativement à la mesure de Lebesgue,  $H^1(\Omega)$  est l'espace de Sobolev d'ordre 1 et  $H_0^1(\Omega)$  l'adhérence de  $(\mathcal{D}(\Omega))^2$  dans  $H^1(\Omega)$ . Nous introduisons aussi les espaces de Sobolev d'ordre  $r, r \geq 2$   $W^{1,r}(\Omega)$  et nous posons :

$$\begin{aligned} V &= \{u \in (H_0^1(\Omega))^2 / \operatorname{div} u = 0\} \\ V_r &= \{u \in (W_0^{1,r}(\Omega))^2 / \operatorname{div} u = 0\} \end{aligned}$$

Les espaces  $L^2(\Omega)$  et  $V$  sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire, des normes et semi-normes suivants :

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\Omega} u \cdot v \, d\Omega \quad u, v \in (L^2(\Omega))^2 \\ \|u\|_{0,2} &= (u, u)^{1/2} \end{aligned}$$

de même :

$$((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, d\Omega \quad u, v \in V$$

avec :

$$\nabla u : \nabla v = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$|u|_{1,2} = \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u\|_{1,2} = (\|u\|_{0,2}^2 + |u|_{1,2}^2)^{1/2}$$

Les espaces  $L^r$  et  $V_r$  sont des espaces de Banach réflexifs munis de la norme et semi-norme suivantes :

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,r} &= \left[ \int_{\Omega} |u|^r \, d\Omega \right]^{1/r} \quad \text{pour } u \in (L^r(\Omega))^2 \\ |u|_{1,r} &= \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^r \, d\Omega \right]^{1/r} \quad \text{pour } u \in V_r \end{aligned}$$

et nous notons respectivement par  $V'$  et  $V'_r$  leurs espaces duaux et par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  leur produit de dualité.

Nous indiquons également les expressions du rotationnel vectoriel et du rotationnel scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}, -\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \\ \operatorname{rot} u &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \text{avec } u = (u_1, u_2) \end{aligned}$$

Enfin les espaces  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}_r$  sont des espaces de Banach munis des normes suivantes :

$$\|u\|_{1,2} = (\|\operatorname{rot} u\|_{0,2}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{0,2}^2)^{1/2}$$

$$\|u\|_{1,r} = (\|\operatorname{rot} u\|_{0,r}^r + \|\operatorname{div} u\|_{0,r}^r)^{1/r}$$

Remarquons que l'égalité  $\|u\|_{1,2} = \|u\|_{1,2}$  est vraie pour tout  $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . D'après la formule de Green on obtient<sup>2</sup> :

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot}(\mathcal{R}(u) \operatorname{rot} u) \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{R}(u) \operatorname{rot} u \operatorname{rot} v \, d\Omega$$

On définit la forme trilinéaire

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, d\Omega$$

Enfin on pose<sup>3</sup> :

$$C_f = \sup_{\substack{v \in \mathbf{V} \\ v \neq 0}} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_{1,2}}$$

$$C_{fr} = \sup_{\substack{v \in \mathbf{V}_r \\ v \neq 0}} \frac{|\langle f, v \rangle|}{\|v\|_{1,r}}$$

$$\gamma_r = \sup_{\substack{v \in \mathbf{V}_r \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{1,2}}{\|v\|_{1,r}}$$

$$\mathcal{N} = \sup_{\substack{u, v \in \mathbf{V} \\ v \neq 0}} \frac{|b(u, u, v)|}{\|u\|_{1,2}^2 \|v\|_{1,2}}$$

**Lemme II.1** Pour tout  $u, v \in \mathbf{V}$  on a la propriété suivante<sup>4</sup> :

$$b(u, v, v) = 0$$

Soit maintenant l'opérateur  $\mathcal{A}(u) \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$  défini par :

$$\langle \mathcal{A}(u)v, w \rangle = (\mathcal{R}(u) \operatorname{rot} v, \operatorname{rot} w) + b(v, u, w)$$

Le problème que l'on veut résoudre est le suivant :

$$(5) \quad \begin{cases} \text{étant donné } f \text{ dans } \mathbf{V}'_r, \text{ trouver } u \in \mathbf{V}_r \text{ solution de :} \\ \mathcal{A}(u)u = f \end{cases}$$

L'existence de la solution faible homogène de (5) a été établie par O. A. Ladyzhenskaya [Lad1 70, Lad2 70]. Ce résultat s'étend sans difficultés au cas non homogène.

Les lemmes et les théorèmes suivants vont nous permettre de préciser les propriétés de la formulation faible, de l'estimation a priori et de montrer l'unicité de la solution.

**Lemme II.2** On a les relations de monotonie suivantes :

$$(i) \quad (\mathcal{R}(u) \operatorname{rot} u, \operatorname{rot}(u - v)) - (\mathcal{R}(v) \operatorname{rot} v, \operatorname{rot}(u - v)) \geq \nu_0 \|\operatorname{rot}(u - v)\|_{0,2}^2 + \nu_1 \|\operatorname{rot}(u - v)\|_{0,r}^r \quad \forall u, v \in \mathbf{V}_r$$

<sup>2</sup>Puisque l'intégrale de bord est nulle.

<sup>3</sup>En remarquant que, dans le cas continu  $\|u\|_{1,2} = \|\operatorname{rot} u\|_{0,2}$ , si  $u \in \mathbf{V}$ .

<sup>4</sup>[Tem 77]

$$(ii) \quad \langle \mathcal{A}(u)u - \mathcal{A}(v)v, u - v \rangle \geq \nu_0 \|rot(u - v)\|_{0,2}^2 + \nu_1 \|rot(u - v)\|_{0,r}^r \quad \forall u, v \in V_r$$

Soit  $u$  une solution faible de (5). En posant  $v = 0$  dans (ii) et sachant que  $\mathcal{A}(u)u = f$  on obtient :

$$\nu_0 \|rot u\|_{0,2}^2 + \nu_1 \|rot u\|_{0,r}^r \leq \langle \mathcal{A}(u)u, u \rangle = \langle f, u \rangle$$

On en déduit immédiatement les estimations a priori suivantes :

**Théorème II.1** *Pour toute solution faible  $u \in V_r$  de (5) nous avons :*

$$\|rot u\|_{0,r}^{r-1} \leq \frac{C_f r}{\nu_1} \quad , \quad \|rot u\|_{0,2} \leq \Psi_r(C_f)$$

où  $\Psi_r$  est la fonction inverse de

$$\Phi_r : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\Phi_r(x) = \nu_0 x + \nu_1 \gamma_r^{-r} x^{r-1} \quad \text{pour } x > 0$$

Remarquons que la dérivée de la fonction  $\Phi_r(x)$  est strictement positive :

$$\Phi_r'(x) = \nu_0 + \nu_1(r-1)\gamma_r^{-r} x^{r-2} > 0 \quad \text{pour } x > 0$$

$\Phi$  est alors une fonction monotone croissante pour  $x > 0$ , de plus continue pour  $x > 0$ , aussi l'existence de la fonction  $\Psi$  sera toujours assurée pour  $x > 0$ .

On en déduit le théorème suivant<sup>5</sup> :

**Théorème II.2** *Soient  $u$  et  $u'$  deux solutions du système (5) et soit  $w = u - u'$ . On a alors l'une des alternatives suivantes :*

- (i)  $w = 0$
- (ii)  $\|rot w\|_{0,2}^{r-2} \leq \nu_1^{-1} \gamma_r^r [\mathcal{N} \Psi_r(C_f) - \nu_0]$

Le résultat suivant en est une simple conséquence.

**Théorème II.3** *La condition*

$$\mathcal{N} \Psi_r(C_f) \leq \nu_0$$

*qui est équivalente à :*

$$C_f \leq \Phi_r(\nu_0/\mathcal{N})$$

*entraîne l'unicité de la solution du problème (5).*

Remarquons que l'équation de Navier-Stokes possède une solution unique lorsque [GR 79] :

$$(6) \quad \mathcal{N} C_f < \nu_0^2$$

Dans l'introduction nous avons annoncé que la condition d'unicité de la solution du système (4) était moins pessimiste que celle du modèle de Navier-Stokes.

Nous allons le vérifier en revenant à la définition de la fonction  $\Phi_r$  :

$$\Phi_r : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\Phi_r(x) = \nu_0 x + \nu_1 \gamma_r^{-r} x^{r-1} \quad \text{pour } x > 0$$

Il suit immédiatement que :

$$\Phi_r(x) > \nu_0 x$$

<sup>5</sup> En utilisant les Lemmes II.1 et II.2 et le Théorème II.1.

et donc :

$$\Psi_r(x) < \frac{x}{\nu_0} \quad \text{puisque } x > 0 \text{ et } r > 2$$

Ce résultat montre que chaque fois que (6) est réalisée la condition du Théorème II.3 l'est également. C'est pourquoi celle-ci est moins restrictive que (6) pour  $\nu_0$ , et donc pour  $\text{Re}$ . Nous reviendrons sur ce point dans l'interprétation des résultats numériques.

Remarquons que la plupart des résultats obtenus jusqu'à présent sont similaires à ceux obtenus par [ DG 90, DG 91] dans l'étude du premier modèle de O.A. Ladyzhenskaya.

### III Approximation numérique

#### III.1 Discrétisation par éléments finis

Soit  $T^h$  une triangulation régulière d'éléments finis et  $h$  un paramètre de discrétisation. Définissons les espaces  $X^h$  et  $Q^h$  de dimension finie tels que :

$$X^h \subset W_0^{1,r} \quad \text{et} \quad Q^h \subset L^2$$

On considère la forme bilinéaire :

$$c(v, q) = (q, \text{div } v) \quad \text{pour } (v, q) \in (H_0^1)^2 \times L^2$$

et un sous-espace  $V^h$  de  $(X^h)^2$  défini par :

$$V^h = \{ v^h \in (X^h)^2 / c(v^h, q^h) = 0 \quad \text{pour tout } q^h \in Q^h \}$$

Notons qu'en général  $V^h \not\subset V$  n'est pas une approximation conforme de l'espace  $V$ . Pour  $u, v$ , et  $w \in (W_0^{1,r})^2$  nous introduisons alors une extension de la forme trilineaire  $b(u, v, w)$  telle que :

$$\hat{b}(u, v, w) = \frac{1}{2} [b(u, v, w) - b(u, w, v)]$$

Si  $u, v$ , et  $w \in V$  nous avons alors :

$$\hat{b}(u, v, w) = b(u, v, w)$$

qui coïncide avec la définition originale.

Nous utilisons l'élément  $P_1/P_2$  de Taylor-Hood caractérisé par le fait que la restriction de  $v^h$  à chaque élément est un polynôme de degré 2 (pour chacune des composantes), et pour  $q^h$  un polynôme de degré 1.

On peut remarquer que cet élément est en  $O(h^2)$  pour la norme de  $H^1$ , et il a été démontré [BP 77, Tal 80] qu'il vérifie les hypothèses nécessaires du théorème III.2 ci-après.

Pour  $u \in (W_0^{1,r})^2$ , soient les formes bilinéaires  $a_1$  et  $a_2$  définies par :

$$a_1(u; v, w) = \int_{\Omega} \mathcal{R}(u) \text{rot } v \text{rot } w \, d\Omega \quad v, w \in (W_0^{1,r})^2$$

$$a_2(u; v, w) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(u) \text{div } v \text{div } w \, d\Omega \quad v, w \in (W_0^{1,r})^2$$

en utilisant la formule de Green on obtient<sup>6</sup> :

<sup>6</sup>Puisque les intégrales de bord sont nulles.

$$\int_{\Omega} \vec{\text{rot}}(\mathcal{R}(u) \text{rot } u) \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{R}(u) \text{rot } u \text{rot } \mathbf{v} \, d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \vec{\text{grad}}(\mathcal{D}(u) \text{div } u) \mathbf{v} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \mathcal{D}(u) \text{div } u \text{div } \mathbf{v} \, d\Omega$$

la formulation faible de (4) est alors approchée par le problème discret suivant :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un couple } (u^h, p^h) \in (X^h)^2 \times Q^h \text{ tel que :} \\ a_1(u^h; u^h, w^h) + a_2(u^h; u^h, w^h) + b(u^h, u^h, w^h) - c(w^h, p^h) = (f, w^h) \\ \text{pour tout } w^h \in X^h \\ c(u^h, q^h) = 0 \\ \text{pour tout } q^h \in Q^h \end{array} \right.$$

On peut également formuler le problème associé dans  $V^h$  :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h \in V^h \text{ tel que :} \\ a_1(u^h, u^h, w^h) + a_2(u^h, u^h, w^h) + b(u^h, u^h, w^h) = (f, w^h) \\ \text{pour tout } w^h \in V^h \end{array} \right.$$

Définissons tout d'abord les constantes suivantes associées au problème discret :

$$C_{fh} = \sup_{\substack{u \in V^h \\ u \neq 0}} \frac{|(f, u)|}{\|u\|_{1,2}}$$

$$\mathcal{N}_h = \sup_{\substack{u, v, w \in V^h \\ u, v, w \neq 0}} \frac{|b(u, v, w)|}{\|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \|w\|_{1,2}}$$

On peut alors formuler les deux théorèmes suivants [Rou 92] :

**Théorème III.1** *Le problème (8) possède au moins une solution dans  $V^h$ . Cette solution est unique à condition que :*

$$\mathcal{N}_h \Psi_q(C_{fh}) \leq \nu_o$$

### III.2 Le problème bien posé

Par définition la paire de sous-espaces de dimension finie,  $X^h$  et  $Q^h$  satisfont la condition inf-sup, si et seulement si il existe une constante  $\beta > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que :

$$\inf_{\substack{q \in Q^h \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{u \in X^h \\ u \neq 0}} \frac{|c(u, q)|}{\|q\|_{0,2} \|u\|_{1,2}} \geq \beta$$

Or puisque  $\|u\|_{1,2}$  et  $\|u\|_{1,2}$  sont deux normes équivalentes sur  $H_0^1$  la condition :

$$\inf_{\substack{q \in Q^h \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{u \in X^h \\ u \neq 0}} \frac{|c(u, q)|}{\|q\|_{0,2} \|u\|_{1,2}} \geq \beta$$

implique nécessairement celle indiquée ci-dessus. En utilisant une conséquence du théorème de Lax-Milgram on pourra donc appliquer à notre problème le théorème suivant :

**Théorème III.2** *En supposant que les espaces de dimension finie  $X^h$  et  $Q^h$  satisfont la condition inf-sup, alors  $V^h \neq \emptyset$ , et pour toute solution  $u^h$  du problème (8) il existe un unique élément  $p \in Q^h$  tel que le couple  $(u^h, p^h)$  satisfait (7).*

Ainsi le problème (7) admet une solution unique lorsque (8) admet une solution unique et que la condition inf-sup est réalisée.

La formulation discrète se ramène facilement, par un choix explicite des bases de  $V^h$  et de  $Q^h$ , à un système non linéaire d'équations algébriques. Il y a de nombreuses méthodes pour résoudre ce système. Dans cette étude nous allons tout d'abord utiliser une méthode de point fixe pour le système approché suivant :

$$(9) \quad \begin{cases} u^{(0)} \in V^h \text{ étant donné, il s'agit de trouver } u^{(n)} \in V^h, \\ \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \text{ solution de :} \\ a_1(u^{(n-1)}, u^{(n)}, w) + a_2(u^{(n-1)}, u^{(n)}, w) + b(u^{(n-1)}, u^{(n)}, w) = (f, w) \\ \text{pour tout } w \in V^h \end{cases}$$

Généralement cette méthode converge au plus linéairement. Pour accélérer le taux de convergence nous appliquons ensuite une méthode de Newton.

A cet effet nous allons calculer la dérivée de Gâteaux des fonctionnelles non linéaires obtenues dans la formulation discrète. Pour  $u$  fixé  $\in V^h$ , l'application suivante définit une fonctionnelle linéaire continue sur  $V^h$  :

$$v \longrightarrow a_1(u, u, v) + a_2(u, u, v) + b(u, u, v) - (f, v) \quad \text{pour tout } u \in V^h$$

et donc une fonction continue :

$$G : V^h \longrightarrow V^h$$

telle que pour tout  $u \in V^h$  :

$$\langle G[u], v \rangle = a_1(u, u, v) + a_2(u, u, v) + b(u, u, v) - (f, v)$$

La solution  $u$  du problème (9) sera alors solution de :

$$G[u] = 0$$

ou :

$$\langle G[u], v \rangle = 0 \quad \text{pour tout } v \in V^h$$

Soit  $J_u G[w]$  la dérivée de Gâteaux évaluée en  $u$  dans la direction  $w$ . La méthode de Newton s'énonce alors comme suit :

$$(10) \quad \begin{cases} \text{Pour une valeur initiale } u^{(0)} \in V^h \text{ donnée, il s'agit de trouver} \\ \text{une suite } \{u^{(n)}\} \in V^h, \text{ telle que pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad u^{(n)} \text{ satisfasse :} \\ \langle J_{u^{(n-1)}} G[u^{(n)} - u^{(n-1)}], v \rangle = - \langle G[u^{(n-1)}], v \rangle \\ \text{pour tout } v \in V^h \end{cases}$$

Selon la définition de  $\langle J_u G[w], v \rangle$  il vient :

$$\begin{aligned} \langle J_u G[w], v \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [ (\mathcal{R}(u + \epsilon w) \operatorname{rot}(u + \epsilon w), \operatorname{rot} v) + b(u + \epsilon w, u + \epsilon w, v) \\ &\quad + ((\mathcal{D}(u + \epsilon w) \operatorname{div}(u + \epsilon w), \operatorname{div} v) - (f, v)) \\ &\quad - (\mathcal{R}(u) \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v) - (\mathcal{D}(u) \operatorname{div} u, \operatorname{div} v) - b(u, u, v) + (f, v) ] \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \langle J_u G[w], v \rangle &= a_1(u, w, v) + a_2(u, w, v) + b(u, w, v) + b(w, u, v) \\ &\quad + ((\nu_1 s |\operatorname{rot} u|^{s-2} \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} w) \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v) \\ &\quad + ((\nu_1 s |\operatorname{div} u|^{s-2} \operatorname{div} u, \operatorname{div} w) \operatorname{div} u, \operatorname{div} v) \end{aligned}$$

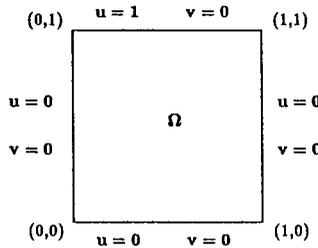
La méthode de Newton appliquée au problème (8) donne donc le système linéarisé suivant :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il s'agit de trouver } \mathbf{u}^{(n)} \in \mathbf{V}^h \text{ tel que pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{V}^h : \\ a_1(\mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}) + a_2(\mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}) \\ + b(\mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}) \\ + s \nu_1 ( (|\text{rot } \mathbf{u}^{(n-1)}|^{s-2} \text{rot } \mathbf{u}^{(n-1)} \text{rot } \mathbf{u}^{(n)}) \text{rot } \mathbf{u}^{(n-1)}, \text{rot } \mathbf{v} ) \\ + s \nu_1 ( (|\text{div } \mathbf{u}^{(n-1)}|^{s-2} \text{div } \mathbf{u}^{(n-1)} \text{div } \mathbf{u}^{(n)}) \text{div } \mathbf{u}^{(n-1)}, \text{div } \mathbf{v} ) \\ = b(\mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{u}^{(n-1)}, \mathbf{v}) + s \nu_1 ( |\text{rot } \mathbf{u}^{(n-1)}|^s \text{rot } \mathbf{u}^{(n-1)}, \text{rot } \mathbf{v} ) \\ + s \nu_1 ( |\text{div } \mathbf{u}^{(n-1)}|^s \text{div } \mathbf{u}^{(n-1)}, \text{div } \mathbf{v} ) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \end{array} \right.$$

Dans la pratique les termes en pression sont résolus avec les termes en vitesse et nous n'avons pas besoin de spécifier la valeur initiale pour la pression. Enfin nous utilisons une élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire résultant de la méthode itérative.

### IV Résultats numériques

Le domaine  $\Omega$  est la cavité carrée unitée et nous mettons en mouvement un fluide visqueux en faisant glisser une paroi à vitesse constante. Les conditions au bord pour la vitesse sont indiquées sur la figure suivante et nous prenons  $\mathbf{f} = 0$  dans les systèmes (1) et (4) :



Si le problème de la cavité ainsi défini ne nous offre pas de résultats expérimentaux, remarquons néanmoins qu'il a été maintes fois étudié et qu'il représente un réel intérêt en tant que problème test [Tho 81].

Afin de mieux tenir compte du problème de couche limite près des parois nous avons choisi un maillage obtenu à l'aide de la fonction  $\sin^2$  qui répartit les abscisses et les ordonnées de l'intervalle  $[0, 1]$  plus proches des bornes de l'intervalle en comparaison avec un maillage régulier.

Nous appelons  $\nu_1^*$  la viscosité artificielle correspondante. Celle-ci s'écrira donc  $\nu_1^* = \nu_1 |\nabla \mathbf{u}|^r$  pour le premier modèle et  $\nu_1^* = \nu_1 |\text{rot } \mathbf{u}|^s$  pour le second.

Dans les tests numériques nous avons calculé  $\nu_1^*$  à partir du gradient et du rotationnel moyen obtenu sur l'ensemble du maillage pendant le calcul de la solution <sup>7</sup>. Dans la pratique une viscosité artificielle supérieure (ou même voisine) à la viscosité  $\nu_0$  ne semble avoir aucune signification physique. Cela signifie que le paramètre  $\nu_1$  sera toujours choisi relativement petit par rapport à  $\nu_0$ .

#### IV.1 Vue d'ensemble des résultats de convergence

##### IV.1.1 Cas du premier modèle

Nous avons tout d'abord remarqué que les maillages de plus de 400 éléments ne favorisent pas les valeurs  $r = 3$  et  $r \geq 4$ . Pour un maillage de 392 éléments <sup>8</sup> on obtient les résultats de convergence suivants :

<sup>7</sup> Cette moyenne est simplement une moyenne arithmétique, puisque nous avons additionné les valeurs du gradient (et du rotationnel) obtenues pour chaque élément et pour chaque point de Gauss (7 pour notre programme) puis divisé par le nombre de points de Gauss et d'éléments.

<sup>8</sup> On a indiqué la valeur de  $\nu_1^*$  à partir de laquelle la solution du modèle converge.

Re/r	3	4
100	$\nu_1^* \leq \nu_o/200$	$\nu_1^* \leq \nu_o/5500$
1500	$\nu_1^* \leq \nu_o/13$	$\nu_1^* \leq \nu_o/200$

Les résultats graphiques montrent que la solution correspondant au modèle de Navier-Stokes est alors pratiquement atteinte dès la première valeur de  $\nu_1^*$  pour laquelle il y a convergence<sup>9</sup>. Cependant en prenant un maillage de 200 éléments la valeur  $r = 3$  permet d'obtenir des solutions nettement différentes du modèle de Navier-Stokes :

Re/r	3	4
100	$\nu_1^* \leq \nu_o/10$	$\nu_1^* \leq \nu_o/200$
800	$\nu_1^* \leq \nu_o$	$\nu_1^* \leq \nu_o/15$

Il en est de même avec un maillage de 98 éléments pour  $r = 3$  et  $r = 4$  mais à condition de choisir  $Re \leq 500$ .

Pour  $r = 2$  les applications du modèle sont plus étendues<sup>10</sup> :

Re/Nt	200	392	722
100	$\nu_1^* \leq 2 \nu_o$	$\nu_1^* \leq \nu_o/5$	$\nu_1^* \leq \nu_o/50$
1000	$\nu_1^* \leq 20 \nu_o$		
1500		$\nu_1^* \leq \nu_o$	
3000			$\nu_1^* \leq \nu_o/4$

En effet le modèle converge pour des valeurs de  $\nu_1^*$  suffisamment grandes telles qu'elles permettent de distinguer le modèle de celui de Navier-Stokes selon les maillages et les nombres de Reynolds envisagés<sup>11</sup>.

Enfin  $r = 1$  autorise, de manière moins restrictive encore pour  $\nu_1^*$ , la convergence de la solution du modèle. Par exemple, correspondant au cas le plus défavorable, pour un maillage de 722 éléments et  $Re = 100$ , la solution converge déjà pour  $\nu_1^* = \nu_o$  (et même un peu au-delà) alors que pour  $r = 2$  la convergence n'est réalisée qu'avec  $\nu_1^* \leq \nu_o/50$ .<sup>12</sup>

Les valeurs  $r = 1$  et  $r = 2$  seront donc particulièrement intéressantes pour étudier le passage à la turbulence.

#### IV.1.2 Cas du deuxième modèle

Les commentaires que nous venons de faire restent tout à fait pertinents. Il faut cependant remarquer qu'un changement important se produit pour la valeur  $\nu_1^*$  à partir de laquelle il y a convergence, puisque celle-ci est beaucoup plus faible que précédemment.

On a en effet pour  $r = s = 3$  :

	Premier modèle	Deuxième modèle
$Re = 100$ et $Nt = 98$	$\nu_1^* \leq 5 \nu_o$	$\nu_1^* \leq \nu_o/10$
$Re = 800$ et $Nt = 200$	$\nu_1^* \leq \nu_o/2$	$\nu_1^* \leq \nu_o/36$
$Re = 100$ et $Nt = 392$	$\nu_1^* \leq \nu_o/200$	$\nu_1^* \leq \nu_o/2700$

On obtient des résultats tout à fait comparables pour  $r = s = 2$  et  $r = s = 4$  tandis que pour  $r = s = 1$  les deux modèles convergent sensiblement pour les mêmes viscosités artificielles.

<sup>9</sup> Avec un maillage de 722 éléments et  $r = 3$ , la solution converge lorsque  $\nu_1^* \leq \nu_o/2800$  pour  $Re = 100$  et  $\nu_1^* \leq \nu_o/60$  pour  $Re = 2000$ .

<sup>10</sup>  $Nt$  représente le nombre d'éléments du maillage considéré.

<sup>11</sup> Sauf pour un maillage de 722 éléments et  $Re = 100$ .

<sup>12</sup> De même pour un maillage 98 éléments et  $Re = 1000$  la convergence a lieu pour tout  $\nu_1^* \leq 10 \nu_o$  alors que pour  $r = 2$  la solution diverge pour  $\nu_o/10 \leq \nu_1^* \leq \nu_o/2$ .

Il faut néanmoins remarquer, comme nous le montrent les résultats graphiques, que le deuxième modèle a besoin de beaucoup moins de viscosité artificielle que le premier pour se distinguer du modèle de Navier-Stokes.

#### IV.2 Comparaison des modèles

Nous indiquons tout d'abord les coupes  $u(x)$  en  $y=0.5$  pour un maillage de 98 éléments et  $Re = 100$  (figures 1 et 2). Avec les mêmes données nous présentons les coupes  $u(y)$  en  $x = 0.5$  (figures 3,5,7) et  $v(x)$  en  $y = 0.5$  (figures 4,6,8), premièrement pour le modèle de Navier-Stokes en comparant nos résultats à ceux de [GG82] puis pour les deux modèles de O.A. Ladyzhenskaya.

Il est intéressant de rapprocher les deux modèles de O.A. Ladyzhenskaya pour différentes valeurs de  $s$  et de  $r$ . Avec un maillage de 242 éléments,  $Re = 800$  et  $\nu_1^* = \nu_o/2$  la circulation du fluide, à l'aide des vecteurs de courant, a l'allure suivante pour  $r = s = 1$  (figures 9,10) et pour  $r = s = 2$  (figures 11,12).

Pour un maillage de 392 éléments,  $Re = 1500$  et  $r = s = 2$  les graphiques (13,14,15,16) nous permettent de constater l'influence de la viscosité artificielle.

##### IV.2.1 Cas d'un maillage de 98 éléments (figures 1-8).

Quel que soit le modèle la plus grande valeur de  $r$  est celle qui distingue le plus le modèle de celui de Navier-Stokes même si les meilleurs résultats de convergence sont obtenus pour  $r = 1$  (figures 1,2,5-8).

Nous avons pu mettre en évidence le lien qui existe entre la viscosité artificielle  $\nu_1^*$  et  $r$ . Diminuer progressivement la viscosité artificielle à  $r$  donné, a sensiblement le même effet que de diminuer la valeur de  $r$  sans modifier  $\nu_1^*$ . De plus à viscosité artificielle égale le modèle où  $r = 3$ , par exemple, se comporte comme s'il bénéficiait d'un surcroît de viscosité artificielle par rapport au modèle où  $r = 2$ .

En fait plus la valeur de  $r$  sera grande moins le modèle aura besoin de viscosité artificielle (relativement, par rapport à une valeur inférieure de  $r$ ) pour se distinguer du modèle de Navier-Stokes.

De même le deuxième modèle nécessite moins de viscosité artificielle que le premier pour se différencier du modèle de Navier-Stokes.

Il a fallu choisir  $\nu_1^* = \nu_o/10$  pour obtenir une solution acceptable<sup>13</sup> lorsque  $s = 2$ , alors que le modèle converge dès  $\nu_1^* = \nu_o/2$  pour un tel  $s$  (figures 2,7,8).

Si nous avions voulu ajouter la courbe correspondant à  $s = 3$  il aurait fallu prendre  $\nu_1^* = \nu_o/80$  puisque le modèle ne converge pas au-delà de cette limite.

A viscosité artificielle égale le modèle en  $r + 1$  (ou  $s + 1$ ) se comporte donc encore comme s'il bénéficiait d'un surcroît de viscosité par rapport au modèle en  $r$  (ou  $s$ ).

##### IV.2.2 Cas d'un maillage de plus de 200 éléments (figures 9-16).

Les commentaires ci-dessus restent pertinents.

Pour  $r=1$  le deuxième modèle permet tout d'abord une meilleure recirculation du tourbillon proche du coin (1,0), (figures 9,10). Nous avons également pu observer que la circulation du fluide à proximité de la paroi correspondante aux ordonnées nulles semble décroître en intensité et repoussée vers le centre de la cavité pour un maillage de 392 éléments et  $Re = 1500$  par comparaison avec le premier modèle.

Enfin lorsque le nombre d'éléments et surtout le nombre de Reynolds augmentent, l'effet de vortex, perceptible au centre du tourbillon principal, s'accroît considérablement.

Pour  $r=2$  le deuxième modèle présente une circulation insolite du fluide lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds. En effet les tourbillons proches des coins (0,0) et (1,0) s'étendent

<sup>13</sup>Pour  $\nu_1^* \geq \nu_o/10$  les résultats graphiques nous ont suggéré de ne pas retenir les solutions obtenues.

jusqu'au centre du maillage et s'interpénètrent, tandis que l'effet de vortex est encore plus prononcé et que le centre du tourbillon principal se déplace vers le haut de la cavité (figures 14,16).

Les différents calculs que nous avons menés montrent une accentuation de ces phénomènes en prenant des nombres de Reynolds de plus en plus élevés<sup>14</sup>.

Il est peu probable que les solutions obtenues soient réalistes d'un point de vue physique. Elles illustrent la remarque précédente, à savoir que le deuxième modèle nécessite une plus faible viscosité artificielle pour se distinguer du modèle de Navier-Stokes, comparativement au premier modèle.

Dans la pratique il faut donc diminuer  $\nu_1^*$  si l'on veut des résultats acceptables d'un point de vue physique.

## V Conclusion

Même si nous ne disposons pas de données expérimentales pour la cavité les résultats précédents nous permettent cependant de mettre en évidence le comportement des modèles de O.A. Ladyzhenskaya par rapport à celui de Navier-Stokes. Nous espérons bientôt pouvoir utiliser d'autres géométries, notamment celle du problème de l'écoulement sur la marche descendante, afin de confronter nos résultats à ceux de l'expérience.

Pour terminer nous voudrions illustrer que la plupart des tests numériques réalisés à partir du modèle de Navier Stokes montrent généralement que la condition d'existence de la solution :

$$\mathcal{N}C_f \leq \nu_o^2$$

est très pessimiste en comparaison de la réalité physique.

A cet égard la condition correspondante des modèles de O.A. Ladyzhenskaya :

$$\mathcal{N}\Psi_q(C_f) \leq \nu_o$$

semble beaucoup plus significative puisqu'elle permet l'unicité de la solution pour des nombres de Reynolds plus élevés<sup>15</sup>.

En effet pour tout  $x > 0$  on a :

$$\Phi_q'(x) = \nu_o + \nu_1(q-1)\gamma_q^{-q}x^{q-2} > 0 \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } q > 2$$

On voit ainsi que pour de petits nombres de Reynolds, donc pour des valeurs de  $\nu_o$  se rapprochant de 1, la pente de  $\Phi_q$  au voisinage de l'origine sera également proche de 1, et cela d'autant plus que  $q$  sera grand. En tenant compte des résultats précédents l'effet de la viscosité artificielle sera alors minime et l'on sera pratiquement dans le cas de Navier Stokes, spécialement lorsque  $r \geq 2$  (où  $q \geq 4$ ).

Les résultats suivants le confirment pour le premier modèle ( avec comme exemple un maillage de 200 éléments) où l'on a indiqué le rapport  $\frac{\nu_1^*}{\nu_o}$  en deça duquel il y a convergence de la solution. En effet pour  $r \geq 2$  et  $Re = 1$  les différents graphiques et coupes que nous avons déterminés montrent que les solutions obtenues coïncident avec celles de Navier-Stokes.

<sup>14</sup>Pour un maillage de 1682 éléments et  $Re = 5000$  la circulation insolite du fluide décrite ci-dessus se produit déjà pour  $s = 1$  avec  $\nu_1^* = \nu_o/2$  tandis que pour  $s = 2$  la solution ne converge qu'avec  $\nu_1^* \leq \nu_o/100$ .

<sup>15</sup>Puisque les normes  $\|u\|_{1,q}$  et  $\|\text{rot } u\|_{0,q}$  sont équivalentes sur l'espace  $H_0^1(\Omega)$ , on en déduit la même conclusion pour le premier modèle. Il suffit en effet de modifier les définitions et les calculs en remplaçant  $\|\text{rot } u\|_{0,q}$  par  $\|u\|_{1,q}$  pour obtenir la condition :

$$\mathcal{N}\Psi_q(C_f) \leq \nu_o$$

Re/r	1	2	3	4
1	0.2	2. E - 02	7. E - 04	3. E - 05
2	0.7	3.5 E - 02	1.5 E - 03	6. E - 05
10	4.	0.2	8. E - 03	3.5 E - 04
50	17.	1.	4.5 E - 02	2. E - 03
100	35.	2.	0.1	5. E - 03

Il est intéressant de remarquer que pour  $r$  fixé, la variation de  $\frac{\nu_1^*}{\nu_0}$  est presque linéaire pour  $Re$  croissant. De plus les résultats de convergence du tableau ci-dessus confirment que lorsque  $r = 1, q = 3$  la pente de  $\Phi_3$  au voisinage de l'origine est moins forte que celle de  $\Phi_q$  lorsque  $q = 4, 5, 6$  (où  $r = 2, 3, 4$ ).

On obtient des résultats similaires pour le deuxième modèle toujours pour un maillage de 200 éléments.

Re/s	1	2	3	4
1	2. E - 01	3.3 E - 03	7. E - 05	1.5 E - 06
2	3.4 E - 01	6.2 E - 03	1.2 E - 04	2.5 E - 06
10	0.8	1.4 E - 02	2.7 E - 04	5.3 E - 06
50	4.	5.4 E - 02	4.7 E - 04	1. E - 05
100	8.	0.1	8. E - 04	1.6 E - 05

Contrairement au modèle en gradient, la variation de  $\frac{\nu_1^*}{\nu_0}$  n'est pas linéaire pour les valeurs  $s = 3$  et  $s = 4$ . Par contre pour  $s = 1$  et  $s = 2$  on obtient une progression presque linéaire comparable au modèle précédent.

## VI Références

- [BP 77] M. Bercovier and O.A. Pironneau, *Error Estimates for Finite Element Method Solution of the Stokes Problem in the Primitive Variables*, Numer. Math. 33, 211-224, 1977.
- [DG 91] Q. Du and M. Gunzburger, *Analysis of a Ladyzhenskaya Model for Incompressible Viscous Flow*, J. Math. Anal. Appl., 1991.
- [DG 90] Q. Du and M. Gunzburger, *Finite Element Approximations of a Ladyzhenskaya Model for Stationary incompressible Viscous Flow*, Siam J. Numer. Anal. 27, 1990, pp.1-19.
- [GGS 82] U. Ghia, K.N. Ghia and C.T. Shin, *High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*, Jour. of Comput. Phys. vol 48, 1982.
- [GR 79] V. Girault and P.A. Raviart, *Finite Element Approximation of Navier-Stokes Equations*, Lecture in Notes in Math. 749, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [Gol 67] K.K. Golovkin, *New Equations Modeling the Motion of a Viscous Fluid, and their Unique Solvability*, Proc. Steklov Inst. Math. vol.102, 1967.
- [Lad1 70] O.A. Ladyzhenskaya, *Modification of the Navier Stokes Equations for Large Velocity Gradients*, in Boundary Value Problems of Mathematical Physics and Related Aspects of Function Theory II, Consultants Bureau, New York, 1970.
- [Lad2 70] O.A. Ladyzhenskaya, *New Equations for the Description of the Viscous Incompressible Fluids and Solvability in the Large of the Boundary Value Problems for them*, in Boundary Value Problems of Mathematical Physics V, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970.
- [Rou 92] D. Le Roux, *Simulation numérique des modèles de O.A. Ladyzhenskaya par la méthode des éléments finis*, Université Laval Québec, 1992 (mémoire de maîtrise).
- [Tal 80] P. Le Tallec, *A Mixed Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Numer. Math. 35, 381-404, 1980.
- [Ser 59] J. Serrin, *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, in Encyclopedia of Physics VIII, pp.125-263, Springer, Berlin, 1959.
- [Tem 77] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [Tho 81] F. Thomasset, *Implementation of Finite Element Method for Navier-Stokes Equations*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

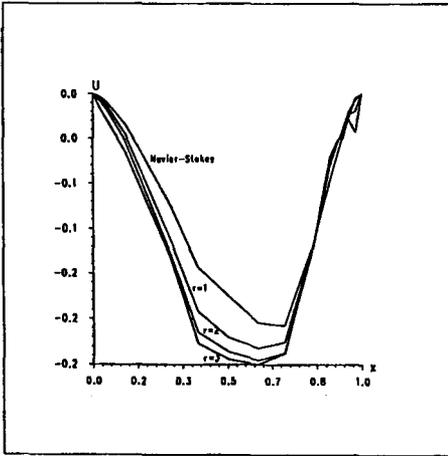


Figure 1: Premier modèle ,  $\nu_1^* = \nu_0/2$

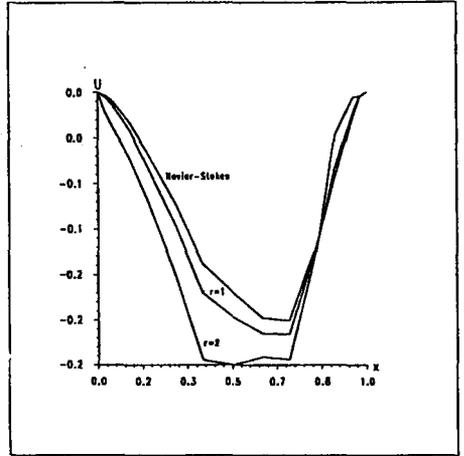


Figure 2: Deuxième modèle ,  $\nu_1^* = \nu_0/10$

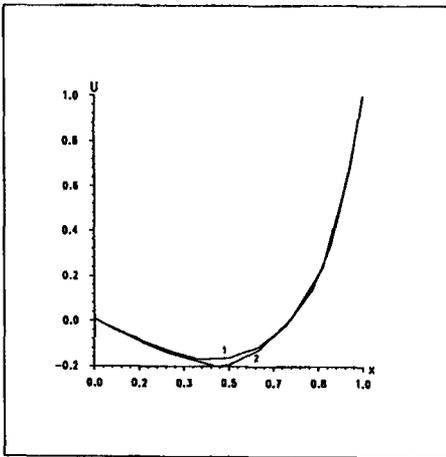


Figure 3: 1 - nos résultats , 2 - résultats de U. Ghia

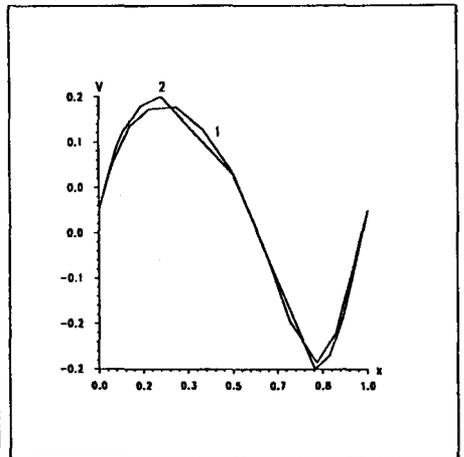


Figure 4: 1 - nos résultats , 2 - résultats de U. Ghia

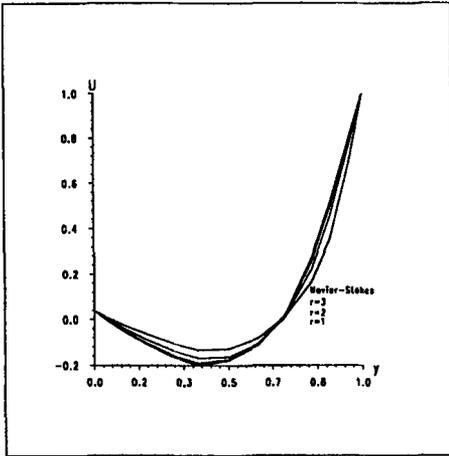


Figure 5: Premier modèle,  $\nu_1^* = \nu_0/2$

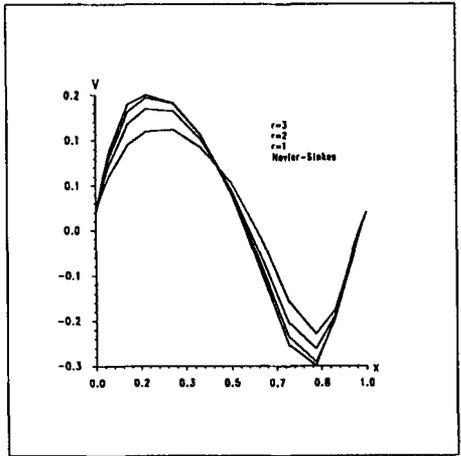


Figure 6: Premier modèle,  $\nu_1^* = \nu_0/2$

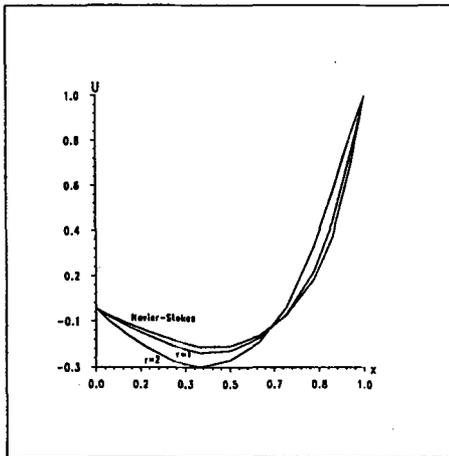


Figure 7: Deuxième modèle  $\nu_1^* = \nu_0/10$

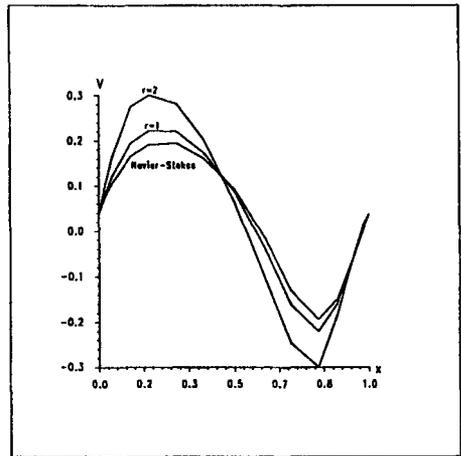


Figure 8: Deuxième modèle  $\nu_1^* = \nu_0/10$

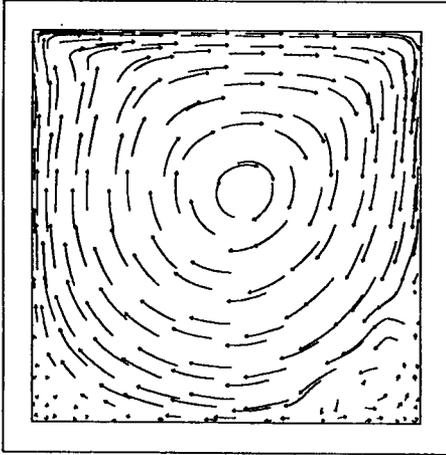


Figure 9: Premier modèle

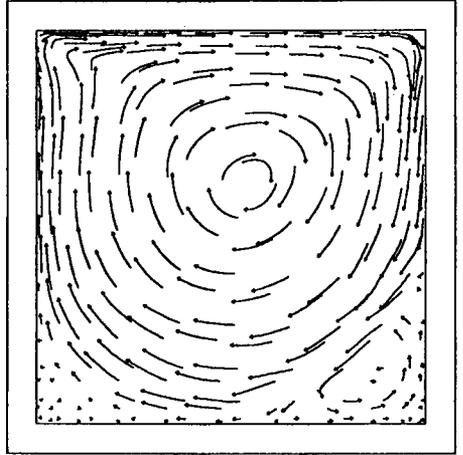


Figure 10: Deuxième modèle

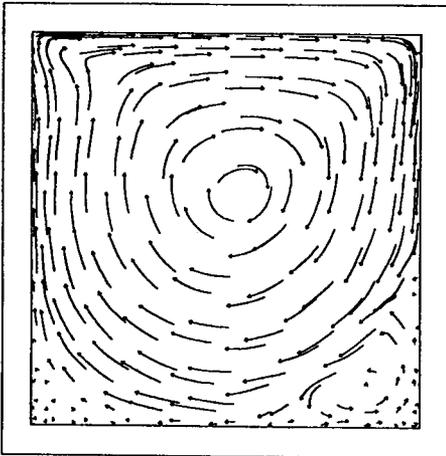


Figure 11: Premier modèle

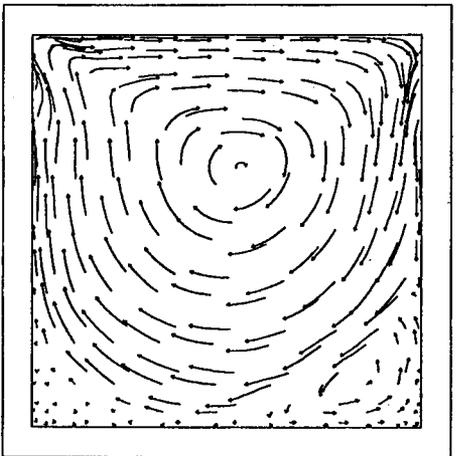


Figure 12: Deuxième modèle

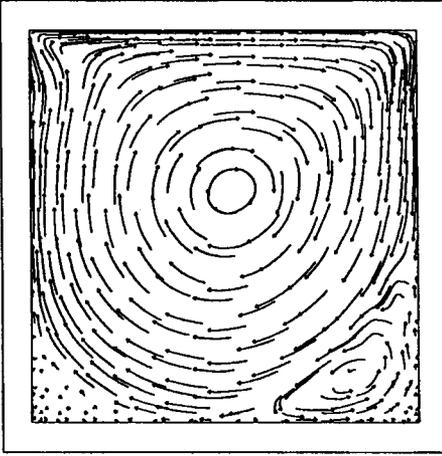


Figure 13: Premier modèle,  $\nu_1^* = \nu_o/2$

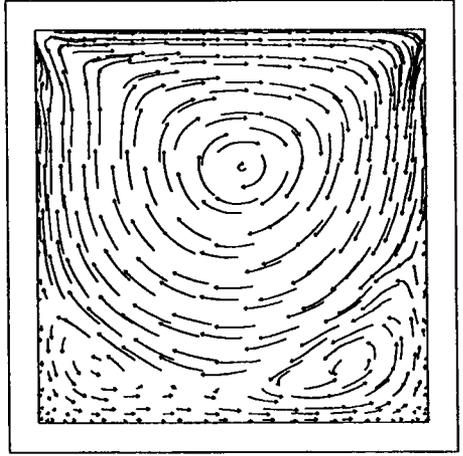


Figure 14: Deuxième modèle,  $\nu_1^* = \nu_o/2$

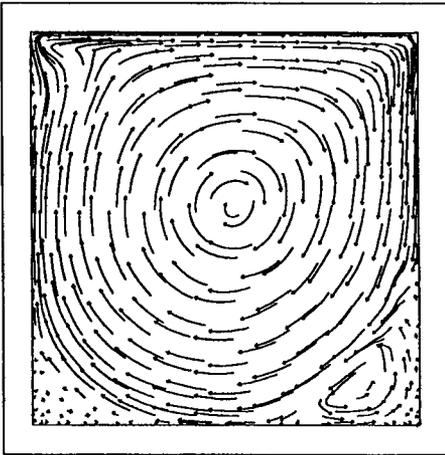


Figure 15: Premier modèle,  $\nu_1^* = \nu_o/12$

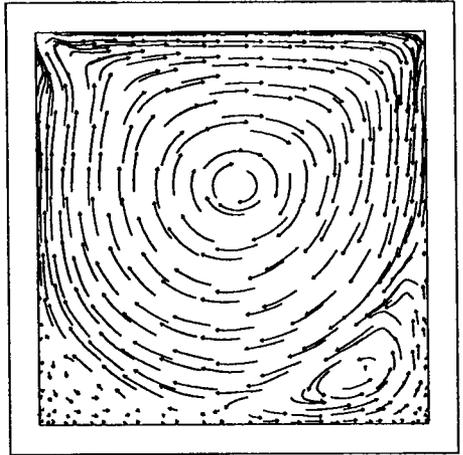


Figure 16: Deuxième modèle,  $\nu_1^* = \nu_o/12$