

---

# Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes : les éléments finis avec degré de liberté de rotation

Adnan Ibrahimbegovic — François Frey — Blaise Rebora

Département de génie civil  
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne  
EPFL, DGC, LSC, CH-1015 Lausanne, Suisse

---

**RÉSUMÉ.** Dans la modélisation par éléments finis des structures complexes, divers éléments doivent être utilisés: poutres, membranes, éléments de solide, plaques et coques. Ces éléments construits selon la formulation classique ne partagent pas, en général, les mêmes degrés de liberté nodaux, ce qui complique l'élaboration d'un modèle compatible. Pour résoudre ce problème, nous proposons une famille d'éléments finis basés sur une formulation variationnelle non conventionnelle du milieu continu classique dans laquelle un champ de rotation indépendant est présent. Combinée avec une méthode modifiée des modes incompatibles, elle fournit une base unifiée pour la construction d'éléments finis variés qui possèdent les mêmes degrés de liberté nodaux et qui peuvent être assemblés aisément les uns aux autres. Plus spécifiquement, de nouveaux éléments finis de type membrane, solide et plaque sont décrits dans cet article. Leurs performances sont évaluées à l'aide d'exemples numériques qui comprennent des jonctions.

**ABSTRACT.** In FE models of complex structural systems, different elements need to be used such as: beams, membranes, solids, plates and shells. Elements of different kind, based on classical formulations, generally do not share the same nodal degrees of freedom, which complicates construction of a compatible model. To resolve this modeling problem, we propose a family of finite elements based on a non-classical variational formulation of classical continuum, in which an independent rotation field is present. Along with a modified method of incompatible modes, this provides a unified basis for construction of various finite elements with the same nodal degrees of freedom, which can be freely combined. More specifically, new membrane, solid and triangular plate elements are given in the paper. The performance of presented elements is evaluated on a set of numerical examples, which include the numerical studies of the element junctions.

**MOTS-CLÉS:** Éléments finis de poutres, plaques, membranes et solides, degré de liberté de rotation, assemblages.

**KEY WORDS:** Finite elements for beams, plates, membranes and solids, rotational degree of freedom, junctions.

---

## 1. Introduction

L'analyse des structures complexes pose quelques défis à l'ingénieur. Traditionnellement, chaque structure est divisée en composants plus simples, analysés indépendamment les uns des autres (découplage des fonctions structurales). Cette démarche est souvent douteuse. Aussi tente-t-on parfois d'analyser d'un coup la structure entière, aussi complexe qu'elle soit, grâce à la méthode des éléments finis; cette dernière découpe la structure en composants élémentaires dont l'ensemble est calculé en une fois. Les avantages sont nombreux: moins d'hypothèses simplificatrices, prise en compte des interactions entre les composants, meilleure vue du comportement d'ensemble de la structure, détection de ses éventuelles faiblesses, conception plus économique, etc.

La compatibilité des éléments les uns avec les autres est souvent un problème délicat de la discrétisation d'une structure compliquée. Cette compatibilité est nécessaire pour garantir la convergence, même si elle peut être relaxée légèrement grâce au patch test (par exemple [BAT 90], [BAT 82], [TAY 86]). De tels problèmes de compatibilité surgissent quand on combine des éléments de solide et de structure; par exemple, la discrétisation de la paroi d'un noyau de bâtiment (mur de refend) peut comporter des éléments de membrane et de poutre (fig. 1); les inconnues nodales des membranes sont les deux translations  $u$  et  $v$ , incompatibles avec les inconnues nodales des poutres qui, outre  $u$  et  $v$ , comportent la rotation  $\theta$ . Des difficultés de même nature se rencontrent à l'intersection des coques ou des structures plissées, aux noeuds de liaison des poutres et raidisseurs avec les coques, aux jonctions des structures avec les massifs de fondation, etc.

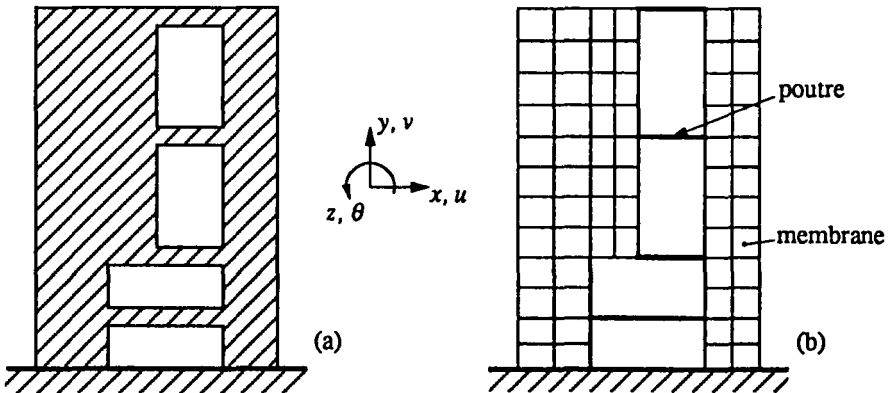


Figure 1. Structure (mur de refend) et sa discrétisation.

Pour traiter la jonction d'éléments finis basés sur des théories différentes (continu  $\leftrightarrow$  structure), on a développé des éléments spéciaux, dits de transition

(par exemple [BAT 82], p. 250), utilisant des interpolations non conventionnelles. Ces interpolations manquent souvent d'une base théorique sûre (par exemple, l'élément de membrane [ALL 84] contient des modes à énergie nulle) et ces éléments de transition ne résolvent finalement pas le problème de façon générale.

On propose ici une formulation variationnelle non conventionnelle pour un milieu continu classique contenant un champ de rotation indépendant (rotation matérielle de l'élasticité). On obtient ainsi une base théorique unifiée pour tous les éléments, qu'ils soient de solide (bi- et tridimensionnels) ou de structure (poutre, plaque, coque). Les inconnues nodales sont compatibles dans toutes les situations et les éléments de transition ne sont pas nécessaires. On peut par exemple (fig. 2) créer des membranes à trois inconnues par noeud, deux translations et une rotation (par exemple [IBR 90]), et des briques à six inconnues nodales, trois translations et trois rotations (par exemple [IBR 91b]).

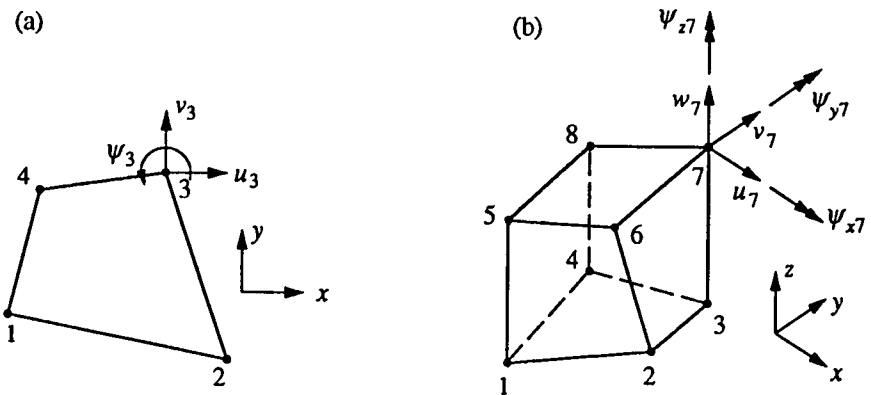


Figure 2. *Élément de solide avec inconnues nodales de rotation: (a) membrane; (b) brique.*

L'utilité pratique des éléments finis à inconnues nodales de rotation a été reconnue très tôt, mais les nombreuses tentatives dans cette direction sont restées longtemps vaines [FRE 89]. Ce n'est qu'après l'établissement d'une analyse mathématique rigoureuse [HUG 89] basée sur une formulation variationnelle par ailleurs plus ancienne [REI 65] qu'on a réuni les conditions nécessaires pour développer des éléments finis robustes de ce type ([IBR 1990], [IBR 91b], [IBR 91c]).

La pratique préfère les éléments simples, tels les quadrilatères à 4 nœuds ou les briques à 8 nœuds. Il en résulte des interpolations de degré peu élevé et une forte sensibilité aux phénomènes de blocage ou verrouillage ("lockings") de membrane et cisaillement (par exemple [BEL 85]). Or, les rotations créent une surrigidité supplémentaire; à ce point de vue, l'utilisation d'interpolations non

conventionnelles - qui utilisent simultanément des degrés de liberté de nature différente - joue un rôle essentiel dans la construction d'éléments finis de bonne qualité.

## 2. Milieu continu avec champ de rotation indépendant

Considérons d'abord les équations exprimant la flexion de la poutre plane de Timoshenko:  $\forall x \in L$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{d\theta}{dx}; & \gamma &= \frac{dv}{dx} - \theta \\ m &= -C^b \kappa; & q &= C^s \gamma \\ \frac{dm}{dx} - q + \bar{m} &= 0; & \frac{dq}{dx} + p &= 0 \end{aligned} \quad [1]$$

La première ligne exprime la cinématique, la deuxième les lois constitutives et la troisième l'équilibre. La forme variationnelle de ces équations est

$$\Pi(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_L \left[ \frac{d\theta}{dx} C^b \frac{d\theta}{dx} + \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) C^s \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) \right] dx - \Pi_{ext} \quad [2]$$

Dans [1] et [2],  $\kappa$  et  $m$  sont la courbure et le moment, tandis que  $\gamma$  et  $q$  sont le glissement et l'effort tranchant, ces grandeurs étant énergétiquement conjuguées. La forme forte [1] fait apparaître, outre le champ du déplacement transversal  $v$ , le champ de rotation indépendant  $\theta$ . Il s'agit d'une théorie de structure; or, en milieu continu, il n'existe pas un tel champ de rotation. C'est pourquoi les éléments finis de structure restent en général incompatibles avec ceux de milieu continu.

On peut y remédier en formulant une théorie de milieu continu classique où apparaît un champ indépendant de rotation. Reissner [REI 65] l'avait fait - pour d'autres raisons et de manière quelque peu différente. On procède ici comme suit.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique peuvent s'écrire,  $\forall x \in B$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} &= \mathbf{0}; & (\operatorname{div} \sigma &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i) \\ \operatorname{skew} \sigma &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad [3]$$

où  $\mathbf{f}$  est le vecteur des forces extérieures et  $\sigma$  le tenseur contrainte de Cauchy. On utilise la décomposition euclidienne d'un tenseur du second ordre:

$$\begin{aligned} \sigma &= \operatorname{symm} \sigma + \operatorname{skew} \sigma \\ \operatorname{symm} \sigma &= \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^T); & \operatorname{skew} \sigma &= \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^T). \end{aligned} \quad [4]$$

Contrairement à la théorie classique, on suppose le tenseur  $\sigma$  a priori non symétrique, la symétrie étant en fait imposée par la seconde équation [3].

On adopte comme lois cinématiques

$$\epsilon = \text{symm}(\nabla \mathbf{u}) ; \psi = \text{skew}(\nabla \mathbf{u}) \quad [5]$$

où la première est la définition usuelle du tenseur déformation infinitésimal  $\epsilon$  et où la seconde définit un champ de rotation indépendant  $\psi$ , qui n'est autre que la rotation matérielle infinitésimale définie par le tenseur antisymétrique des gradients des déplacements.

La loi constitutive est donnée par

$$\text{symm}\sigma = \mathbf{C}\text{symm}(\nabla \mathbf{u}) . \quad [6]$$

Ainsi, via les équations [3] à [6], on a reformulé la théorie classique des milieux continus en y faisant apparaître un champ de rotation indépendant. La symétrie du tenseur contrainte n'y est pas imposée a priori. La partie antisymétrique des contraintes est alors conjuguée au champ de rotation.

La formulation variationnelle associée s'énonce (voir aussi [REI 65])

$$\Pi(\mathbf{u}, \psi, \sigma) = \int_{\mathcal{B}} \left[ -\frac{1}{2} \text{symm}\sigma : \mathbf{C}^{-1} \text{symm}\sigma + \sigma : (\nabla \mathbf{u} - \psi) \right] d\mathcal{B} - \Pi_{ext} . \quad [7]$$

On vérifie facilement que [3] à [6] sont les équations d'Euler-Lagrange de la forme intégrale [7]. Récemment Hughes et Brezzi [HUG 89] ont effectué l'analyse de convergence de la forme [7] et conclu qu'il fallait la modifier pour en garantir la stabilité dans la méthode des éléments finis (condition LBB, voir [HUG 87], p. 208). Cette forme modifiée (régularisation)

$$\Pi_{\gamma}(\mathbf{u}, \psi, \sigma) = \Pi(\mathbf{u}, \psi, \sigma) - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} [\text{skew}\sigma : \gamma^{-1} \text{skew}\sigma] d\mathcal{B} , \quad [8]$$

où  $\gamma$  est le paramètre attaché à la régularisation, conserve les équations d'Euler-Lagrange [3] à [6] et produit l'équation supplémentaire

$$\text{skew}\sigma = \gamma(\text{skew}(\nabla \mathbf{u}) - \psi) \quad [9]$$

Avec cette dernière équation et la transformation de Legendre

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{symm}\sigma : \mathbf{C}^{-1} \text{symm}\sigma + \text{symm}\sigma : \text{symm}(\nabla \mathbf{u}) = \\ \frac{1}{2} \text{symm}(\nabla \mathbf{u}) : \mathbf{C}\text{symm}(\nabla \mathbf{u}) , \end{aligned} \quad [10]$$

on peut réduire le principe variationnel [8] à une forme qui ne fait intervenir que les variables cinématiques  $\mathbf{u}$  et  $\psi$

$$\Pi(\mathbf{u}, \psi) = \frac{1}{2} \int_B [\text{symm}(\nabla \mathbf{u}) : \mathbf{C} \text{symm}(\nabla \mathbf{u}) + (\text{skew}(\nabla \mathbf{u}) - \psi) : \gamma (\text{skew}(\nabla \mathbf{u}) - \psi)] dB - \Pi_{ext} . \quad [11]$$

Si l'on compare les formes variationnelles [2] et [11], on constate qu'elles sont toutes deux basées sur le même type de variables cinématiques. Par suite, avec un choix adéquat de fonctions d'interpolation, on peut rendre compatibles les éléments structuraux et continus dérivés de [2] et [11].

### 3. Interpolations non conventionnelles pour les éléments finis

La pratique montre que les ingénieurs préfèrent modéliser leurs structures avec des éléments finis simples (noeuds aux seuls sommets; même nombre d'inconnues par noeud; diminution des risques d'erreurs de données). Certains éléments finis de degré élevé peuvent être très sensibles aux distorsions (perte de précision), ce qui n'est pas nécessairement le cas des éléments de degré peu élevé. Par contre, ces derniers peuvent présenter des problèmes de verrouillages ("lockings").

#### 3.1. Poutre de Timoshenko

La configuration de référence d'un élément de poutre de Timoshenko à deux noeuds (fig. 3) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^h \Big|_{L^e} &= N_1(\xi) \mathbf{x}_1 + N_2(\xi) \mathbf{x}_2 ; L^e = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 ; \xi = 2x/L^e ; \\ N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) , \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad [12]$$

où  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont les coordonnées des noeuds; l'indice  $h$  caractérise l'approximation discrète.

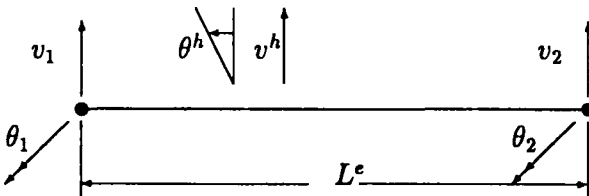


Figure 3. Élément de poutre de Timoshenko.

L'interpolation isoparamétrique classique [ZIE 91], [BAT 90] des champs  $v$  et  $\theta$

$$\left. \begin{aligned} v^h \\ \theta^h \end{aligned} \right|_{L^e} = \begin{aligned} & N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 \\ & N_1(\xi)\theta_1 + N_2(\xi)\theta_2 \end{aligned} \quad [13]$$

conduit, via [1], aux déformations de flexion et de cisaillement

$$\left. \begin{aligned} \kappa^h \\ \gamma^h \end{aligned} \right|_{L^e} = \begin{aligned} & \frac{1}{L^e}(\theta_2 - \theta_1) \\ & \frac{1}{L^e}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \xi \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) . \end{aligned} \quad [14]$$

Si maintenant on veut représenter un état de flexion pure ou, en d'autres termes, si on désire annuler toute déformation de cisaillement quel que soit  $\xi$ , on voit dans [14b] qu'il faut poser  $\theta_2 - \theta_1 = 0$ ; il en résulte, dans [14a], l'annulation de toute courbure ... Au sens des éléments finis, on dit qu'il se produit un blocage de cisaillement ("shear locking": [BAT 90], [HUG 87], [ZIE 91]); mathématiquement, l'espace des approximations de la courbure, sous la contrainte  $\theta_2 - \theta_1 = 0$ , se réduit à un espace vide [BRE 86].

Parmi les nombreuses méthodes de correction du verrouillage [IBF 93a], examinons celle qui enrichit le champ de déplacements d'un terme hiérarchique, car elle s'applique aussi aux milieux continus (voir 13):

$$\left. \begin{aligned} v^h \\ N_3(\xi) \end{aligned} \right|_{L^e} = \begin{aligned} & N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 + N_3(\xi)\alpha \\ & (1 - \xi^2) \end{aligned} \quad [15]$$

Avec cette interpolation non conventionnelle, où le paramètre  $\alpha$  ne concerne que l'élément et peut être éliminé avant assemblage par condensation [WIL 74], l'expression [14a] de la courbure ne change pas, tandis que le glissement s'écrit maintenant

$$\left. \gamma^h \right|_{L^e} = \frac{1}{L^e}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \xi \left[ \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{4}{L^e}\alpha \right] \quad [16]$$

et peut s'annuler sans réduire le degré de l'approximation sur la courbure: il suffit d'imposer au terme entre crochets de s'annuler. On peut d'ailleurs le faire d'emblée et introduire le résultat dans [15], ce qui livre l'interpolation non conventionnelle (voir aussi [TES 81])

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{4}{L^e} \alpha \right] = 0 \implies \\ & v^h \Big|_{L^e} = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 + N_3(\xi)\frac{L^e}{8}(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \right\} [17]$$

éliminant aussi le verrouillage.

### 3.2. Membrane avec degré de liberté de rotation

On peut utiliser une démarche semblable à celle ci-dessus pour construire des interpolations libres de blocage pour les éléments de milieu continu avec rotation. Imposer l'annulation de la partie antisymétrique de la déformation du milieu continu est identique à imposer l'annulation du glissement de la poutre. Il s'agit donc de construire une interpolation non conventionnelle qui réalise cet objectif dans les éléments d'ordre peu élevé. On montre ici comment procéder dans le cas d'un élément de membrane à quatre noeuds (fig. 4).

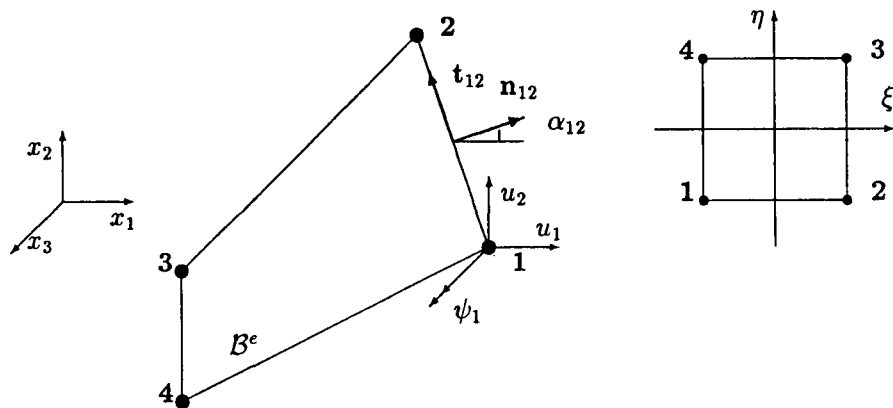


Figure 4. Membrane avec degrés de liberté de rotation.

La configuration de référence est définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^h |_{B^e} &= \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I \\ N_I(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) \end{aligned} \quad [18]$$

où  $N_I(\xi, \eta)$  sont les fonctions d'interpolation bilinéaires classiques (voir par exemple [HUG 87], [BAT 90], [ZIE 91]) et  $\mathbf{x}_I$  le vecteur des coordonnées des noeuds. Le champ de rotation infinitésimale  $\psi$  est interpolé conventionnellement



$$\psi \mapsto \psi^h|_{B^e} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \psi_I \tag{19}$$

Dans le cas bidimensionnel, le tenseur antisymétrique  $\psi$  de [19] n'a qu'une composante non nulle notée  $\psi$ .

En s'inspirant du cas de la poutre de Timoshenko (voir [15] ci-avant), on interpole non conventionnellement les déplacements sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{u}^h|_{B^e} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \mathbf{u}_I + \sum_{I=1}^2 M_I(\xi, \eta) \boldsymbol{\alpha}_I \tag{20}$$

$$M_1(\xi, \eta) = 1 - \xi^2 ; \quad M_2(\xi, \eta) = 1 - \eta^2$$

où  $\mathbf{u}_I$  sont les translations nodales et  $\boldsymbol{\alpha}_I$  des paramètres propres à l'élément. On déduit, des interpolations précédentes, les déformations

$$\text{symm} \nabla \mathbf{u} \mapsto \boldsymbol{\epsilon}^h = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I + \sum_{I=1}^2 \mathbf{G}_I \boldsymbol{\alpha}_I \tag{21}$$

où les matrices  $\mathbf{B}_I$  et  $\mathbf{G}_I$  valent

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \partial N_I / \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial N_I / \partial x_2 \\ \partial N_I / \partial x_2 & \partial N_I / \partial x_1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} \partial M_I / \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial M_I / \partial x_2 \\ \partial M_I / \partial x_2 & \partial M_I / \partial x_1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Pour satisfaire au patch test, il faut faire subir à la matrice  $\mathbf{G}_I$  une modification, discutée en détail dans [IBR 91a] et utilisée dans l'annexe 1 pour la construction de l'élément de solide à 8 noeuds.

Avec [19] et [20], la partie antisymétrique de la déformation vaut

$$\begin{aligned} \text{skew}(\nabla \mathbf{u}) - \psi \mapsto \epsilon_{[12]}^h|_{B^e} &= \sum_{I=1}^4 \left( \frac{1}{2} \left\langle -\frac{\partial N_I}{\partial x_2} ; \frac{\partial N_I}{\partial x_1} \right\rangle \mathbf{u}_I - N_I \psi_I \right) + \\ &\quad \sum_{I=1}^2 \frac{1}{2} \left\langle -\frac{\partial M_I}{\partial x_2} ; \frac{\partial M_I}{\partial x_1} \right\rangle \boldsymbol{\alpha}_I , \end{aligned} \tag{23}$$

et, sous cette forme, on peut la contraindre à s'annuler ( $\epsilon_{[12]} = 0$ ), ce qui supprime la tendance au blocage de rotation.

On peut étendre sans difficulté les développements précédents au cas tridimensionnel (voir l'annexe 1). De même, on peut construire semblablement des éléments triangulaires.

**Remarques**

On peut établir une autre interpolation non conventionnelle des déplacements en imposant des contraintes de non blocage appropriées sur les côtés de l'élément [IBR 90]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \Big|_{\mathcal{B}^e} &= \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \mathbf{u}_I + \sum_{I=5}^8 N_I(\xi, \eta) \frac{L_{JK}}{8} (\psi_K - \psi_J) \mathbf{n}_{JK} \\
 N_I(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_I \eta); \quad I = 5, 7; \quad J = I - 4 \\
 N_I(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_I \xi)(1 - \eta^2); \quad I = 6, 8; \quad K = \text{mod}(J, 4) + 1
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

$\mathbf{n}_{JK}$  est la normale extérieure et  $L_{JK}$  la longueur du côté de l'élément, associés aux noeuds J et K. Si l'on compare cette interpolation avec celle [17] de la poutre, on constate qu'elles sont parfaitement compatibles. Il en est de même des interpolations sur les rotations [13] et [19].

On peut étendre toutes les interpolations précédentes aux éléments de membrane et solide, et de plaque et coque de Reissner-Mindlin [IBR 91b], [IBF 93b]. Les interpolations de type [15] et [20] sont en général plus faciles à manipuler que [17] et [24], pour, pratiquement, la même précision. Le développement d'un élément de plaque triangulaire à 3 noeuds est donné dans l'annexe 2.

**4. Applications numériques**

Les exemples ci-après cherchent à montrer que les éléments présentés ici, munis de degrés de rotation et basés sur une interpolation non conventionnelle, sont particulièrement robustes et plus performants que les éléments traditionnels. Ces exemples montrent aussi la souplesse d'emploi de ces éléments, qui permettent de modéliser toute jonction de composants de nature différente. Les calculs ont été effectués avec le programme FELINA [FRE 91] du LSC.

**4.1. Flexion pure d'une console**

Une poutre console à section rectangulaire ( $l \times b \times h = 10 \times 1 \times 2$ ) est déformée en flexion pure par un moment d'extrémité ( $M = 20$ ).

La console (fig. 5) est discrétisée par deux éléments de membrane rectangulaires (maillage régulier) ou trapézoïdaux (maillage distordu); le moment peut être appliqué de deux manières: soit par des forces nodales formant un couple (cas de charge consistant), soit par des moments nodaux statiquement équivalents (cas de charge inconsistant, mais ... bien pratique!).

Le tableau 1 donne les résultats obtenus avec le maillage régulier. Le cas de charge consistant fournit la solution exacte; l'erreur est très faible pour le cas de charge inconsistant. Ces résultats confirment que ces éléments satisfont

au patch test d'ordre supérieur, ce qui est un indice de leur robustesse [TAY 86], [BAT 90].

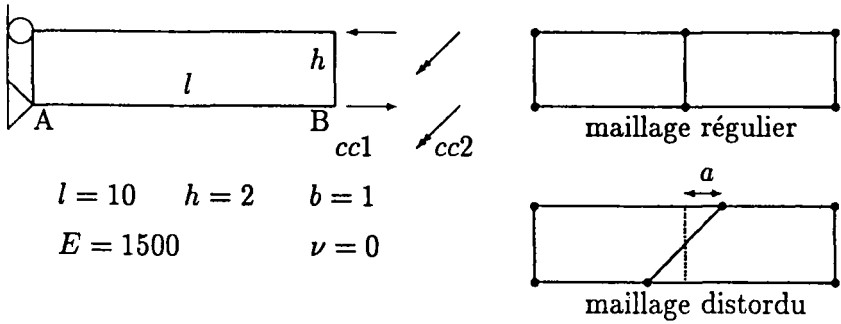


Figure 5. Flexion pure d'une console ( $cc = \text{cas de charge}$ ).

Cas de charge	$v_B$	$\psi_B$	$\sigma_A$
1: Couple	1.	0.2	30.
2: Moments	1.0067	0.2017	30.
Solution exacte	1.	0.2	30.

Tableau 1. Flexion pure d'une console; maillage régulier.

On obtient une autre preuve de la robustesse des éléments via le maillage distordu, caractérisé par la distance  $a$  (fig. 5). La figure 6 montre que la précision est certes réduite, mais reste acceptable (un seul élément sur  $h$ !).

Par contre, pour une interpolation conventionnelle (c'est-à-dire sans les modes incompatibles liés aux paramètres  $\alpha$  dans [20]), la précision est toujours largement insuffisante (courbes en traits interrompus, fig. 6).

### Remarque

On obtient les mêmes résultats avec l'élément solide à huit noeuds décrit en annexe.

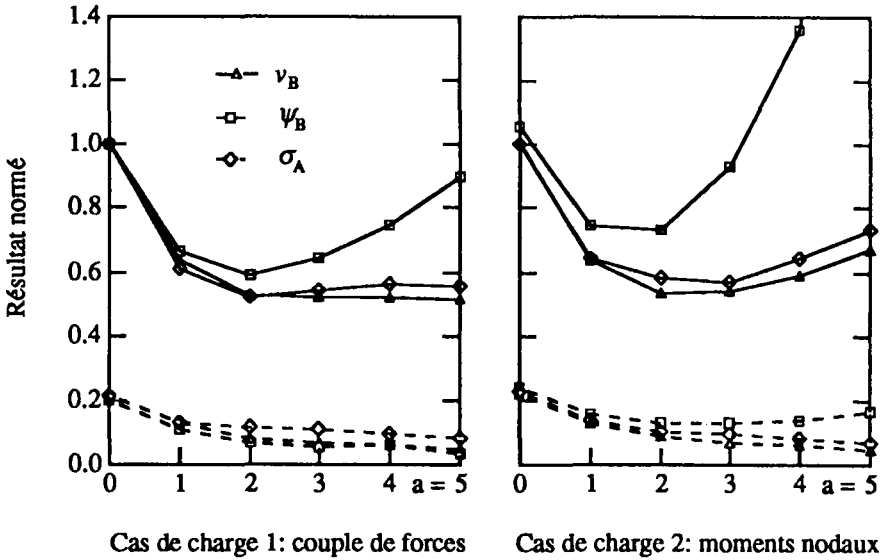


Figure 6. Flexion pure d'une console; maillage distordu; résultats normés.

4.2. Paroi sur colonnes: jonction poutre-membrane

Une paroi, discrétisée par des éléments de membrane avec rotation normale nodale, est portée par deux colonnes, discrétisées chacune par une poutre classique de Bernoulli (fig. 7). Le tableau 2 donne quelques résultats.

Modèle	$u_A$ $\times 10^3$	$\theta_A$ $\times 10^7$	$M_A$	$M_B$
Membrane avec rotation	4.335	2.148	299.25	300.75
Membrane sans rotation	17.214	860.7	0.	600.
Théorie des poutres (paroi rigide)	4.304	0.000	300.	300.

Tableau 2. Paroi sur colonnes.

La paroi étant beaucoup plus rigide que les colonnes, la solution calculée tend vers le cas limite d'une paroi indéformable (dernière ligne du tableau 2). Si les éléments de membrane n'ont pas de degré de liberté de rotation, la réponse est celle d'un autre problème, où les colonnes seraient articulées à la paroi en A (avant-dernière ligne du tableau 2).

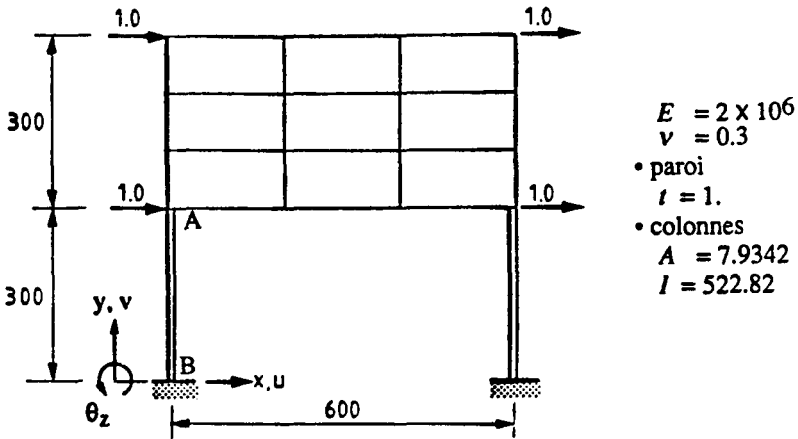


Figure 7. *Paroi sur colonnes.*

#### Remarque

Dans cet exemple, comme dans le suivant, on ne se préoccupe pas du détail de la jonction poutre-membrane; ce problème est examiné plus loin (sect. 4.6).

#### 4.3. Dalle sur colonne: jonction poutre-plaque

Une plaque carrée est supportée en son centre par une colonne et chargée en ses coins par des moments agissant normalement à son plan (fig. 8). La plaque est discrétisée par des éléments de coque contenant la rotation normale (six inconnues par noeud, voir sect. 4.4), ce qui permet l'introduction directe du cas de charge décrit ci-dessus. La colonne est une poutre classique.

Les quatre moments appliqués sur la plaque passent en moment de torsion dans la colonne; on en déduit, avec la constante de torsion  $J$  et la théorie de Saint-Venant, la solution analytique du tableau 3. La dalle, dans son ensemble, pivote autour du sommet de la colonne avec quasiment le même angle ( $0.39467 \times 10^{-3}$ ).

#### Remarque

L'élément JET est construit avec le connecteur de rotation d'Allman [ALL 84], qui n'est pas une vraie rotation.

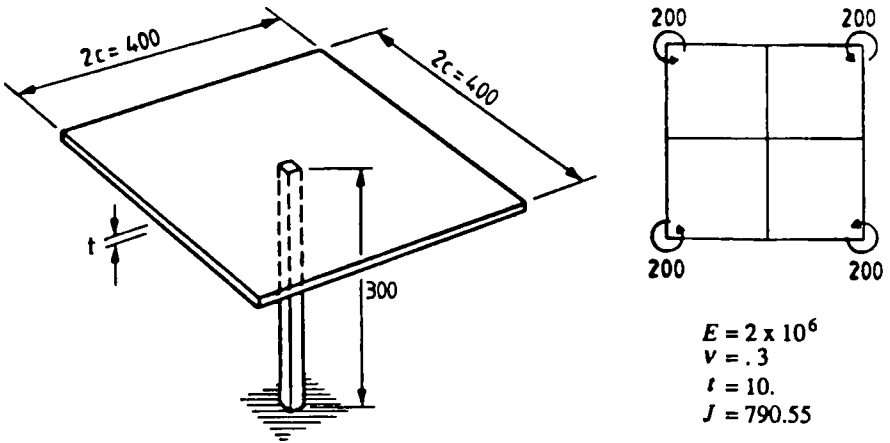


Figure 8. Dalle supportée par une colonne centrale.

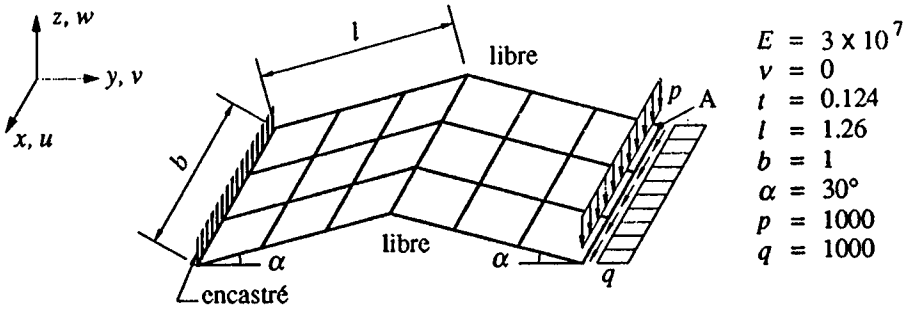
Modèle	Angle de rotation au sommet de la colonne
Coque avec rotation normale	$0.39466 \times 10^{-3}$
Élément JET [FRE 89]	$0.39470 \times 10^{-3}$
Théorie des poutres	$0.39466 \times 10^{-3}$

Tableau 3. Dalle sur colonne.

#### 4.4. Plaque plissée console

Une structure plissée à deux pans (fig. 9), encastree d'un côté, chargée au bord opposé, est un test simple illustrant le problème de la jonction spatiale d'éléments de coque. Dans [BAT 81], on a utilisé des éléments de transition, tandis que chez [BER 89], on a imposé les conditions cinématiques à la jonction.

On a utilisé ici un élément de coque obtenu par superposition de la membrane avec rotation normale, précédemment discutée, avec une plaque de Reissner-Mindlin décrite dans [IBF 93b]. On obtient ainsi un élément à quatre noeuds et six inconnues par noeud, capable de s'adapter à toute intersection de coque. Le tableau 4 donne quelques résultats.

Figure 9. *Plaque plissée console.*

Modèle	Maillage	cas de charge $p$		cas de charge $q$	
		$v_A$ $\times 10^4$	$w_A$ $\times 10^4$	$u_A$ $\times 10^4$	$w_A$ $\times 10^4$
Coque à six degrés de liberté par noeud	$6 \times 3$	-1817	-8349	-1362	542
	$12 \times 6$	-1817	-8393	-1393	555
	$24 \times 12$	-1817	-8404	-1418	567
Bernadou [BER 89]	$6 \times 3$	-1817	-8372	-	-
Théorie des poutres ( $\nu = 0$ )	sans	-1817	-8395	-	-
	avec	-1817	-8407	-	-
	prise en compte de l'effort tranchant				

Tableau 4. *Déplacements de l'extrémité libre de la plaque plissée console.*

#### 4.5. Structure plissée

Chez [SCO 61] on trouve des résultats analytiques et expérimentaux pour la structure plissée représentée à la figure 10. Cet exemple a été calculé par les éléments de coque à 4 noeuds et 6 inconnues par noeud. Déplacements verticaux et contraintes normales au feuillet moyen sont donnés, pour la section médiane, au tableau 5.

Modèle	Maillage	$w_a$ $\times 10^5$	$w_b$ $\times 10^5$	$w_c$ $\times 10^5$	$w_d$ $\times 10^5$	$w_e$ $\times 10^5$	$w_f$ $\times 10^5$
Coque avec rotation normale	6 x 3	-1352	-764	81	81	-764	-1352
	12 x 6	-1353	-790	83	83	-790	-1353
	24 x 12	-1358	-798	83	83	-798	-1358
Analytique	-	-1360	-800	80	80	-800	-1360
Expériment.	-	-	-580	130	120	-630	-
Modèle	Maillage	$\sigma_{ya}$	$\sigma_{yb}$	$\sigma_{yc}$	$\sigma_{yd}$	$\sigma_{ye}$	$\sigma_{yf}$
Coque avec rotation normale	6 x 3	1146	-760	96	-96	760	-1146
	12 x 6	1200	-797	96	-96	797	-1200
	24 x 12	1216	-807	97	-97	807	-1216
Analytique	-	1214	-807	103	-103	807	-1214
Expériment.	-	950	-530	80	30	480	-900

Tableau 5. Structure plissée.

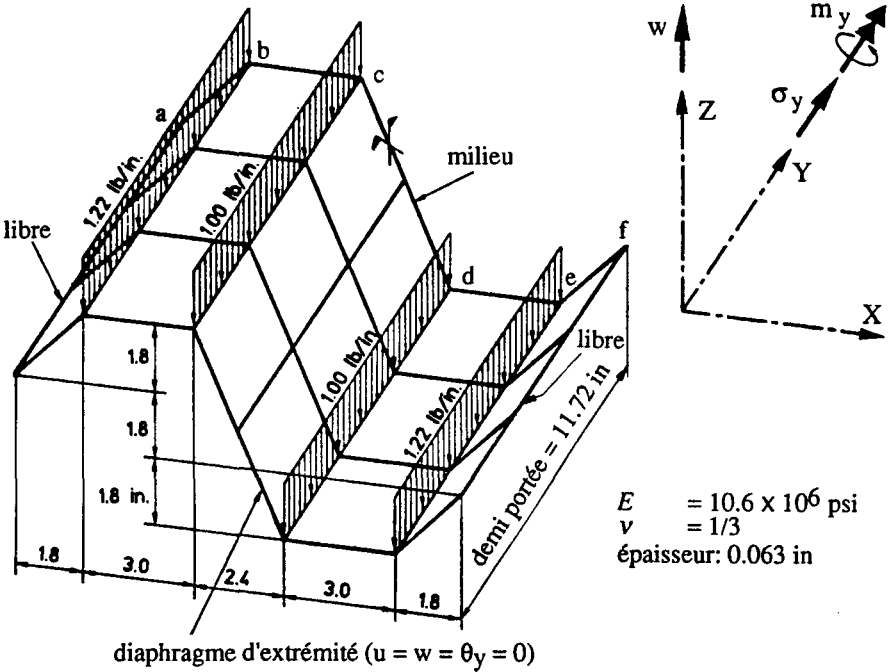


Figure 10. Structure plissée.



On voit qu'un maillage assez grossier ( $6 \times 3$ ) livre des résultats déjà fort précis pour les déplacements, alors que les contraintes nécessitent un maillage un peu plus fin. On observe que les résultats expérimentaux sont un peu différents (conditions aux limites!) et ne reflètent pas l'antisymétrie du problème.

#### 4.6. Encastrement d'une poutre dans un demi-plan

Dans les exemples précédents, on n'a pas raffiné le maillage dans les zones de jonction des divers composants structuraux: il s'agissait en fait de vérifier que le transfert des grandeurs statiques et cinématiques était réalisé d'une part, et que l'analyse de la structure dans son ensemble était correcte d'autre part.

Dans cet exemple, on examine en détail l'état de contrainte et déformation du voisinage de l'encastrement élastique d'une poutre (à section rectangulaire) dans le demi-plan infini (fig. 11). Ce problème a été étudié analytiquement par [MUS 53] et expérimentalement par [DON 60].

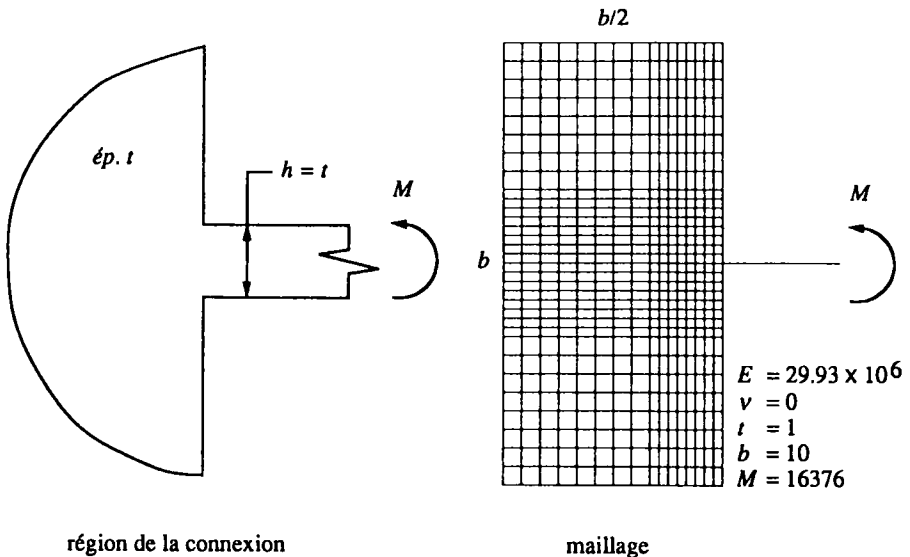


Figure 11. Poutre encastree dans le demi-plan infini.

La solution de [MUS 53] suppose que la section d'encastrement reste plane; sous l'effet d'un moment  $M$ , elle tourne de l'angle ( $t = 1$ .)

$$\theta = \frac{16\pi M}{Eh^2\{\pi^2 + \ln^2[(3-\nu)/(1+\nu)]\}}$$

ce que les essais de [DON 60] ont confirmé. En réalité toutefois, la section d'encastrement ne reste pas plane, et, de plus, il se produit, aux angles droits rentrants, une singularité du champ des contraintes.

On a discrétisé une portion du demi-plan (fig. 11) en éléments de membrane avec rotation normale. La poutre et sa jonction au demi-plan sont discrétisées de trois façons différentes:

(a) la poutre est modélisée par des éléments de poutre classiques et la jonction avec le demi-plan a lieu ponctuellement au noeud commun médian de la section d'encastrement; quand la taille  $h_e$  des éléments finis de membrane diminue, la singularité de cette jonction se manifeste toujours davantage;

(b) la poutre est modélisée comme ci-dessus et, quand  $h_e \leq h/2$ , c'est-à-dire quand deux ou plusieurs éléments de membrane sont en contact direct avec la section d'encastrement de la poutre, on impose à cette dernière de rester plane (via, dans FELINA, les contraintes linéaires); on doit ainsi converger vers la solution [MUS 53];

(c) pour le maillage le plus fin du demi-plan ( $h_e = h/8$ ), on a prolongé ce maillage dans la poutre.

Le tableau 6 donne la rotation de l'axe de la poutre au droit de la section d'encastrement.

$h/h_e$ — Discrétisation	(a)	(b)	(c)
0.167	0.022	-	-
0.33	0.100	-	-
0.5	0.226	-	-
1.	0.906	-	-
2.	3.630	0.172	-
4.	14.500	0.215	-
8.	58.000	0.243	0.214
Analytique [MUS 53]	0.248	0.248	0.248
Expériment. [DON 60]	0.252	0.252	0.252

Tableau 6. Rotation de l'axe de la poutre ( $\times 10^2$ ).

On en conclut que la singularité attachée à la discrétisation (a) se manifeste avant qu'on puisse imposer des contraintes linéaires: si  $h_e \leq h$ , cette discrétisation est trop souple. Il faut en effet remarquer que, dans ce problème, la déformation se concentre dans une zone relativement petite au voisinage de la section de jonction (fig. 12).

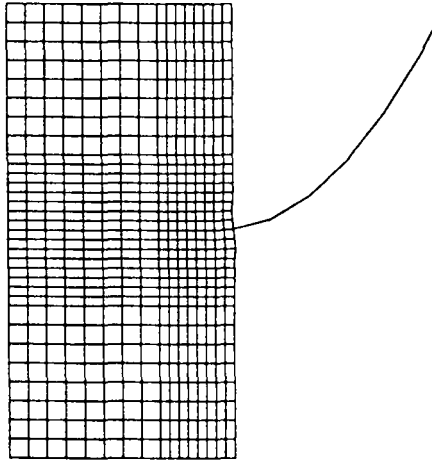


Figure 12. Déplacement ( $\times 50$ ),  $h/h_e = 4$ .

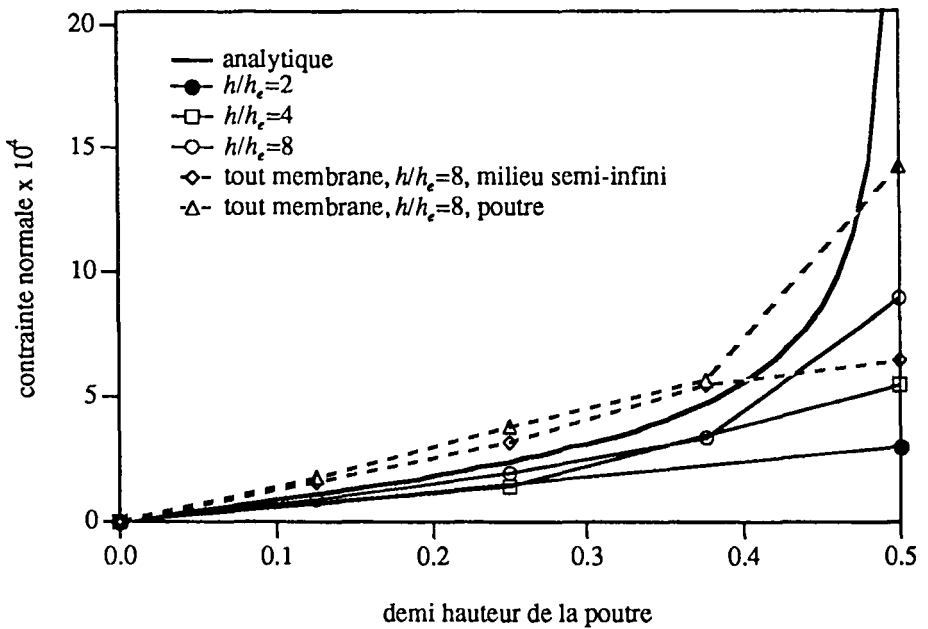


Figure 13. Diagramme de la contrainte normale sur la demi-section d'encastrement.

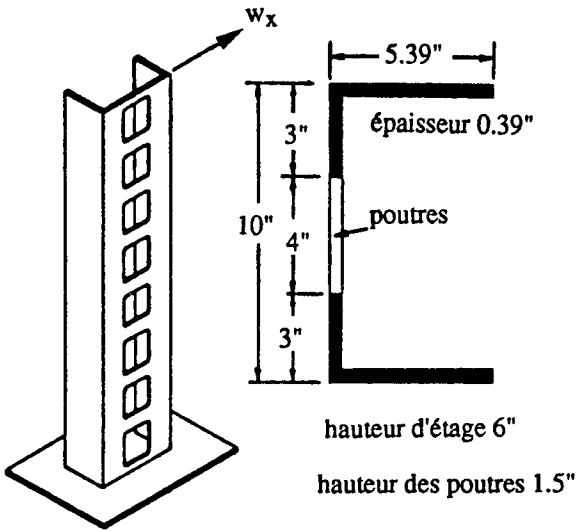
La solution analytique [MUS 53] donne une singularité de la contrainte normale aux extrémités de la section d'encastrement. Le modèle en éléments finis, par nature, atténue cette singularité (fig. 13).

**Remarque**

L'analyse d'une telle jonction avec des éléments classiques de membrane (sans les degrés de liberté de rotation) impose de prolonger la poutre dans le maillage du demi-plan infini. Un modèle numérique de ce type a été décrit dans [COO 91] et son analyse de convergence a été étudié par Ciarlet et ses collaborateurs (par exemple, voir [CIA 87] et ses propres références).

**4.7. Murs de refend couplés**

La figure 14 présente deux murs de refend en équerre, couplés par des traverses. Cette structure spatiale a été testée par [TSO 73] sur un modèle en plexiglas.



**Figure 14.** Murs de refend couplés.

La modélisation est composée de poutres de Mindlin spatiales pour les traverses et d'éléments rectangulaires de coque, à six degrés de liberté par noeud, pour les murs. On a réalisé trois réseaux dont deux sont représentés à la figure 17, le plus grossier ne comportant que deux couches d'éléments coque par étage; si  $h$  est la hauteur de poutre des traverses et  $h_e$  le côté vertical des éléments de coque, ces trois réseaux se caractérisent par les rapports  $h/h_e = 0.5, 1$  et  $2$ .

On déduit de l'étude de la section 4.6 que les modélisations  $h/h_e = 0.5$  d'une part, et  $h/h_e = 2$  avec contraintes linéaires d'autre part, donneront des résultats valables, les autres possibilités étant trop flexibles. C'est bien ce qui ressort des figures 15 et 16 (le réseau  $h/h_e = 1$ , non représenté, auquel on ne peut pas imposer de contraintes linéaires, donne une flèche au sommet de 0.0924 in). La figure 17 montre les déformées de cette structure, soulignant son comportement spatial complexe qui ne peut pas être appréhendé si la coque ne possède pas de degré de liberté selon la rotation normale.

### Remarque

Les figures 15 et 16 montrent que tous les résultats numériques sont un peu plus rigides que les valeurs expérimentales. Il est probable qu'un peu de fluage se soit manifesté dans le modèle en plexiglas.

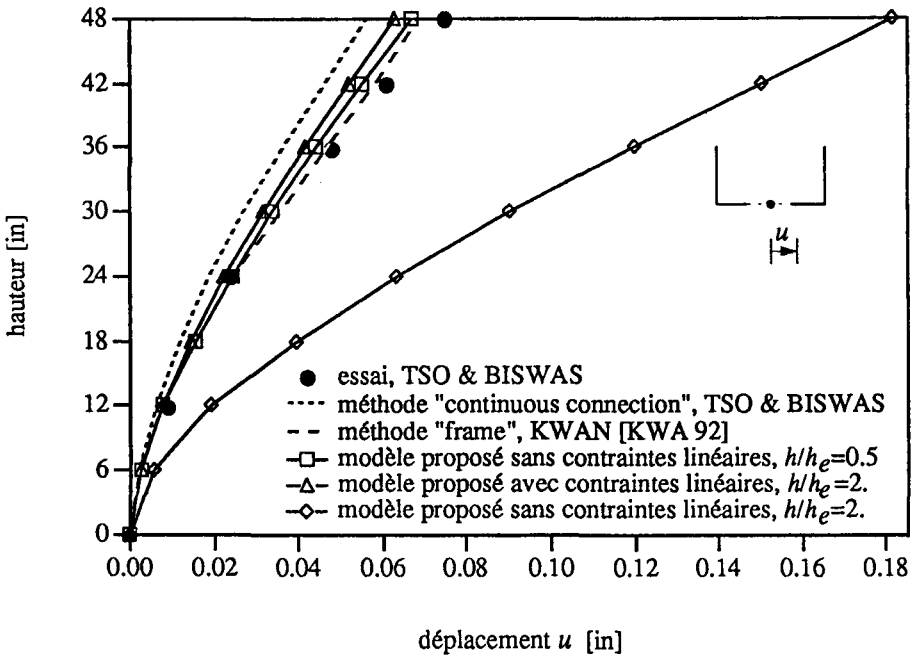


Figure 15. Déplacement  $u$ .

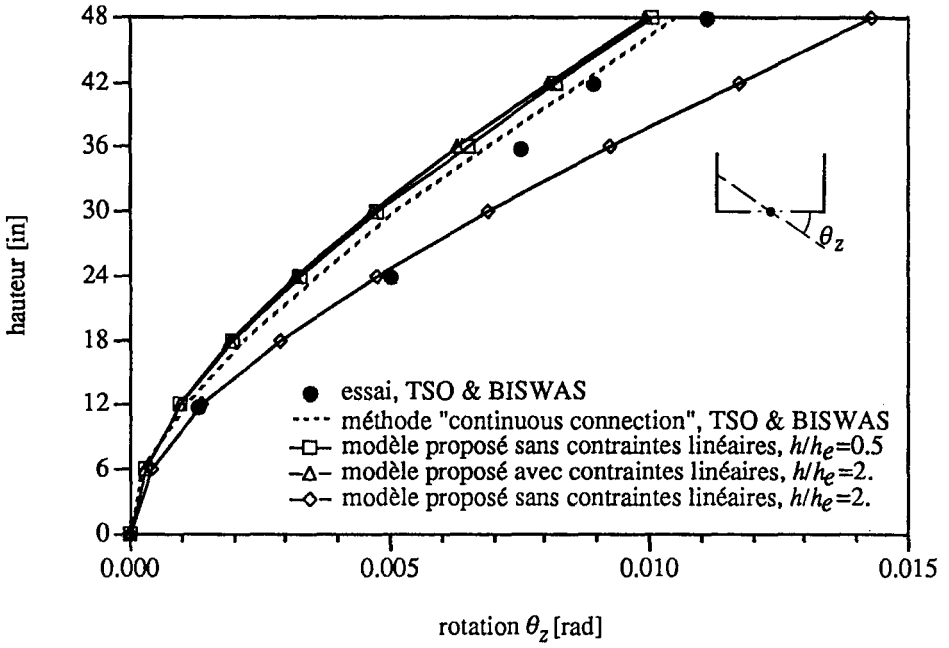


Figure 16. Rotation  $\theta_z$ .

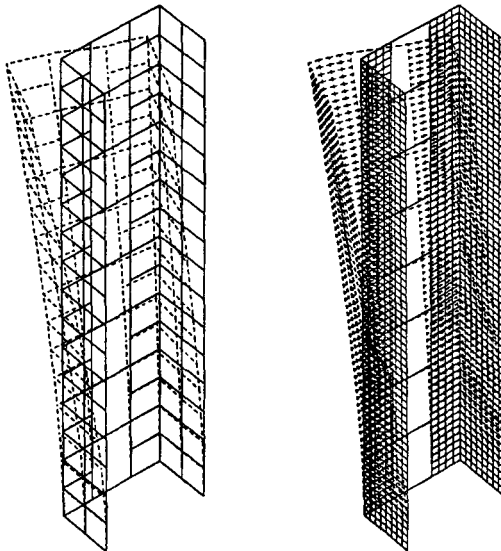


Figure 17. Déformées ( $\times 50$ ) pour les maillages  $h/h_e = 0.5$  et  $2$ .

## 5. Conclusions

On a présenté dans cette contribution une nouvelle famille d'éléments finis de solides (bi- et tridimensionnels), caractérisée par la présence d'inconnues nodales non seulement de translation, mais aussi de rotation. De ce fait, ces éléments peuvent aisément être combinés avec des éléments structuraux (poutres, plaques, coques).

Un ingrédient essentiel de ces éléments est l'utilisation d'interpolations non conventionnelles, qui rendent les éléments très robustes tout en annulant les phénomènes de blocage. Ces interpolations s'appliquent d'ailleurs aussi aux éléments structuraux, avec les mêmes effets bénéfiques.

Un objectif important visé par ce travail est la simplification des problèmes de discrétisation des structures complexes que l'ingénieur praticien rencontre, en particulier au niveau de l'intercompatibilité des éléments finis. L'adjonction des degrés de liberté de rotation:

- (a) permet la jonction des éléments structuraux et solides;
- (b) supprime toutes les difficultés liées au fameux sixième degré de liberté des coques;
- (c) accroît la précision des éléments sans augmenter le nombre de noeuds.

Les développements ici présentés peuvent s'étendre au domaine non linéaire (par exemple [IBR 93a], [IBF 93b], [IBR 93c]).

## Remerciements

Ce travail a été effectué en collaboration avec Monod Ingénieurs Conseils S.A., 1066 Epalinges-Lausanne, Suisse, que les auteurs remercient de son appui financier.

## 6. Annexes

### 6.1 Annexe 1: Élément solide à 8 noeuds

On donne ici la dérivation d'un élément de solide à 8 noeuds (fig. 2b) avec champ indépendant de rotation. L'élément a 48 inconnues nodales et sa géométrie est définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^h|_{B^*} &= \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{x}_I \\ N_I(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) (1 + \zeta_I \zeta) \end{aligned} \quad [25]$$

où  $N_I(\xi, \eta, \zeta)$  sont les fonctions d'interpolations standard et  $\mathbf{x}_I$  les coordonnées nodales. Le tenseur antimétrique de rotation  $\psi$  est d'abord transformé en le vecteur axial  $\tilde{\psi}$  à son tour interpolé par

$$\psi \mapsto \tilde{\psi}^h|_{B^e} = \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) \tilde{\psi}_I \tag{26}$$

L'interpolation non conventionnelle des déplacements de translation est de la forme

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{u}^h|_{B^e} = \sum_{I=1}^8 N_I(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{u}_I + \sum_{I=1}^3 M_I(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{\alpha}_I \tag{27}$$

$$M_1(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \xi^2 ; \quad M_2(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \eta^2 ; \quad M_3(\xi, \eta, \zeta) = 1 - \zeta^2$$

où  $\mathbf{u}_I$  sont les déplacements nodaux et  $\boldsymbol{\alpha}_I$  les paramètres de l'élément, qui seront condensés au niveau de l'élément.

Les déformations infinitésimales s'écrivent

$$symm(\nabla \mathbf{u}) \mapsto \boldsymbol{\epsilon}^h|_{B^e} = \sum_{I=1}^8 \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I + \sum_{I=1}^3 \mathbf{G}_I \boldsymbol{\alpha}_I \tag{28}$$

où la matrice  $\mathbf{B}_I$  vaut

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \partial N_I / \partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_I / \partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_I / \partial x_3 \\ \partial N_I / \partial x_2 & \partial N_I / \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial N_I / \partial x_3 & \partial N_I / \partial x_2 \\ \partial N_I / \partial x_3 & 0 & \partial N_I / \partial x_1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

tandis que la matrice  $\mathbf{G}_I$  a, pour l'instant, une allure semblable

$$\mathbf{G}_I = \begin{bmatrix} \partial M_I / \partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial M_I / \partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial M_I / \partial x_3 \\ \partial M_I / \partial x_2 & \partial M_I / \partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial M_I / \partial x_3 & \partial M_I / \partial x_2 \\ \partial M_I / \partial x_3 & 0 & \partial M_I / \partial x_1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Cette matrice doit être modifiée pour garantir l'orthogonalité vis-à-vis du champ de contrainte constant [IBR 91a]

$$\mathbf{G} \longleftarrow \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \frac{1}{B^e} \int_{B^e} \mathbf{G} \, dB \tag{31}$$

La partie antisymétrique des gradients des déplacements est d'abord représentée par son vecteur axial  $\tilde{\omega}$ . Avec les interpolations précédentes, il vient



$$skew(\nabla \mathbf{u}) \mapsto \tilde{\omega}^h|_{B^e} = \sum_{I=1}^8 \mathbf{A}_I \mathbf{u}_I + \sum_{I=1}^3 \mathbf{E}_I \alpha_I \quad [32]$$

où

$$\mathbf{A}_I = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\partial N_I / \partial x_3 & \partial N_I / \partial x_2 \\ \partial N_I / \partial x_3 & 0 & -\partial N_I / \partial x_1 \\ -\partial N_I / \partial x_2 & \partial N_I / \partial x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [33]$$

tandis que  $\mathbf{E}_I$  a la même forme,  $M_I$  y remplaçant  $N_I$ .

La forme matricielle du principe variationnel [11] est alors

$$\bigcup_{e=1}^{Nel} (\mathbf{a}^{eT} (\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{F}^{eT} \alpha^e) = \mathbf{f}^e) \quad [34]$$

$$\alpha^{eT} (\mathbf{F}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{H}^e \alpha^e) = 0 ; \forall e \in [1, Nel]$$

où la première équation traduit l'assemblage (union) des  $Nel$  éléments finis. Les diverses matrices sont

$$\mathbf{K}_{IJ}^e = \int_{B^e} [\mathbf{B}_I]^T \mathbf{C} [\mathbf{B}_J] + 4\gamma [\mathbf{A}_I - N_I \mathbf{I}]^T [\mathbf{A}_J - N_J \mathbf{I}] d\mathcal{B} \quad [35]$$

$$\mathbf{F}_{IJ}^e = \int_{B^e} [\hat{\mathbf{G}}_I]^T \mathbf{C} [\mathbf{B}_J] + 4\gamma [\mathbf{E}_I]^T [\mathbf{A}_J - N_J \mathbf{I}] d\mathcal{B} \quad [36]$$

et

$$\mathbf{H}_{IJ}^e = \int_{B^e} [\hat{\mathbf{G}}_I]^T \mathbf{C} [\hat{\mathbf{G}}_J] + 4\gamma [\mathbf{E}_I]^T [\mathbf{E}_J] d\mathcal{B} \quad [37]$$

Toutes les intégrales s'évaluent avec une quadrature de Gauss à  $2 \times 2 \times 2$  points. On élimine les paramètres  $\alpha^e$  au niveau de l'élément par condensation, pour obtenir la matrice de rigidité finale

$$\hat{\mathbf{K}}^e = \mathbf{K}^e - \mathbf{F}^{eT} \mathbf{H}^e {}^{-1} \mathbf{F}^e \quad [38]$$

## 6.2 Annexe 2: Élément de plaque à 3 noeuds

On développe ici l'interpolation non conventionnelle d'un élément de plaque triangulaire. Cet élément est aux plaques d'épaisseur modérée ce que l'élément DKT bien connu [BBH 80] est aux plaques minces.

La configuration de référence est donnée par

$$\mathbf{x}^h |_{\mathcal{A}^e} = \sum_{I=1}^3 H_I(h_I) \mathbf{x}_I ; \quad H_I(h_I) = h_I \quad [39]$$

où  $\mathbf{x}^h$  sont les coordonnées des noeuds J, K et L, et  $H_I(h_I) = h_I$  les coordonnées triangulaires [ZIE 91].

Le champ de rotation de plaque est interpolé par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^h |_{\mathcal{A}^e} = & \sum_{I=1}^3 H_I(h_I) \boldsymbol{\theta}_I + \sum_{L=4}^6 H_L(h_J, h_K) \mathbf{n}_{JK} \Delta \theta_{JK} ; \\ & J = L - 3; K = \text{mod}(L, 3) + 1 \end{aligned} \quad [40]$$

où  $\boldsymbol{\theta}_I$  sont les composantes nodales du vecteur rotation;  $\Delta \theta_{JK}$  est la rotation au milieu du côté JK, associée au mode hiérarchique  $H_L(h_J, h_K) = 4 h_J h_K$ ;  $\mathbf{n}_{JK}$  est le vecteur de la normale extérieure au côté JK.

En regardant chaque côté de l'élément comme une poutre de Timoshenko, on peut obtenir l'interpolation non conventionnelle suivante pour le déplacement transversal

$$\begin{aligned} w^h |_{\mathcal{A}^e} = & \sum_{I=1}^3 H_I(h_I) w_I + \sum_{L=4}^6 H_L(h_J, h_K) \frac{l_{JK}}{8} \mathbf{n}_{JK} (\theta_J - \theta_K) \\ & + \sum_{L=4}^6 M_L(h_J, h_K) \frac{l_{JK}}{6} \Delta \theta_{JK} \end{aligned} \quad [41]$$

où  $M_L(h_J, h_K) = 4 h_J h_K (h_K - h_J)$  sont les fonctions d'interpolations. Les courbures découlent de la dérivation de [40]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}^h |_{\mathcal{A}^e} = & \mathbf{L}_B \boldsymbol{\theta}^h ; \quad \mathbf{L}_B = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & 0 \\ \partial/\partial x_1 & -\partial/\partial x_2 \end{bmatrix} \\ = & \sum_{I=1}^3 \mathbf{B}_I(h_I) \boldsymbol{\theta}_I + \sum_{L=4}^6 \mathbf{B}_L(h_J, h_K) \mathbf{n}_{JK} \Delta \theta_{JK} \end{aligned} \quad [42]$$

A partir de [40] et [41], on obtient l'approximation du glissement associé au cisaillement transversal via la notion d'interpolation indépendante du glissement ("assumed shear strain interpolation" [HUG 81])

$$\begin{aligned} \gamma |_{\mathcal{A}^e} = & \sum_{I=1}^3 H_I(h_I) \gamma_I + \sum_{I=1}^3 H_I(h_I) \frac{2}{3t_{IJ}^T \mathbf{n}_{IK}} [\mathbf{n}_{IJ} \Delta \theta_{IK} - \mathbf{n}_{IK} \Delta \theta_{IL}] \\ \gamma_I = & \frac{1}{t_{IJ}^T \mathbf{n}_{IK}} \left[ \frac{1}{l_{IK}} \mathbf{n}_{IJ} w_K + \frac{1}{l_{IJ}} \mathbf{n}_{IK} w_J - \left( \frac{1}{l_{IK}} \mathbf{n}_{IJ} + \frac{1}{l_{IJ}} \mathbf{n}_{IK} \right) w_I \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \mathbf{n}_{IJ} \mathbf{n}_{IK}^T \theta_K - \frac{1}{2} \mathbf{n}_{IK} \mathbf{n}_{IJ}^T \theta_J + \frac{1}{2} (\mathbf{n}_{IJ} \mathbf{n}_{IK}^T - \mathbf{n}_{IK} \mathbf{n}_{IJ}^T) \theta_I \right] \end{aligned} \quad [43]$$

On peut encore vérifier que les rotations à mi-côté  $\Delta\theta$  s'identifient aux paramètres d'une interpolation par modes incompatibles. On a développé, semblablement, un élément quadrilatéral [IBR 92a], qu'on peut, en le dégénéralant comme indiqué dans [IBR 91c], ramener au triangle ci-dessus.

### 6.3 Annexe 3: Catalogue d'éléments

On a introduit, dans le code FELINA [FRE 91], une famille d'éléments construits sur les bases présentées dans cet article:

Problème	Nom	Description	Nombre d'inconnues
Plaque	PQ23	Plaque de Mindlin à 4 noeuds	12
	PT23	Plaque de Mindlin à 3 noeuds	9
2D	MQ2	Membrane à 4 noeuds	12
	MT23	Membrane à 3 noeuds	9
3D	SQ2	Coque de Mindlin à 4 noeuds	24
	ST23	Coque de Mindlin à 3 noeuds	18
	SOL2	Solide (brique) à 4 noeuds	48

Jointes aux classiques ressorts, barres et poutres, ils permettent d'analyser toute structure sans problème de compatibilité.

#### Remarques

On préfère la forme quadrilatérale à celle triangulaire, cette dernière servant plutôt à boucher les trous d'un maillage.

Plusieurs de ces éléments ont reçu des extensions dans le domaine non linéaire.

## 7. Bibliographie

- [ALL 84] ALLMAN D.J., A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Problems, *Comput. Struct.*, 19, 1984, p. 1-8.
- [BAT 90] BATOZ J.-L. et DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, Paris, 1990.
- [BAT 81] BATHE K.J. and L.W. HO, Some Results in the Analysis of Thin Shell Structures, in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, (eds. W. Wunderlich et al.), Springer, Berlin, 1981, p. 122-150.

- [BAT 82] BATHE K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
- [BBH 80] BATOZ J.L., BATHE K.J. and L.W. HO, A Study of Three Node Triangular Plate Bending Elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 15, 1980, p. 1771-1812.
- [BEL 85] BELYTSCHKO T., H. STOLARSKI, W.K. LIU, N. CARPENTER and J.S. ONG, Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 51, 1985, p. 221-258.
- [BER 89] BERNADOU M., S. FOYOLLE and F. LÉNÉ, Numerical Analysis of Junctions Between the Plates, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 74, 1989, p. 307-326.
- [BRE 86] BREZZI F. and K.J. BATHE, Studies of Finite Element Procedures - The Inf-Sup Conditions, Equivalent Forms and Applications, in *Reliability of Methods for Engineering Analysis* (eds. K.J. Bathe and D.R.J. Owen), Pineridge Press, 1986, p. 7-219.
- [CIA 87] CIARLET P.G., H. LEDRET et R. NZENGWA, Modélisation de la jonction entre un corps élastique tridimensionnel et une plaque, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 305 (I), 1987, p. 55-58.
- [COO 91] COOK R. D., Beam Cantilevered From Elastic Support: Finite -Element Modeling, *Commun. Appl. Numer. Methods*, 7, 1991, p. 621-623.
- [DON 60] O'DONNELL W.J., The Additional Deflection of a Cantilever due to the Elasticity of the Support, *J. Appl. Mech.*, 27, 1960, p. 461-464.
- [FRE 89] FREY F., Shell Finite Elements with Six Degrees of Freedom per Node, in *Analytical and Computational Models for Shells* (eds. A.K. Noor, T. Belytschko, J.C. Simo), ASME, 1989, p. 291-317.
- [FRE 91] FREY F. et al., FELINA Finite Element Linear and Incremental Nonlinear Analysis, LSC Report 91/14, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, 1991.
- [HUG 81] HUGHES T.J.R. and T.E. TEZDUYAR, Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element, *J. Appl. Mech.*, 46, 1981, p. 587-596.
- [HUG 87] HUGHES T.J.R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [HUG 89] HUGHES T.J.R. and F. BREZZI, On Drilling Degrees of Freedom, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72, 1989, p. 105-121.
- [IBR 90] IBRAHIMBEGOVIĆ A., R.L. TAYLOR and E.L. WILSON, A Robust Membrane Quadrilateral Element With Drilling Degrees of Freedom, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 30, 1990, p. 445-457.
- [IBR 91a] IBRAHIMBEGOVIĆ A. and E.L. WILSON, A Modified Method of Incompatible Modes, *Commun. Appl. Numer. Methods*, 7, 1991, p. 187-194.

- [IBR 91b] IBRAHIMBEGOVIĆ A. and E.L. WILSON, Thick Shell and Solid Finite Elements with Independent Rotation Fields, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 31, 1991, p. 1393-1414.
- [IBR 91c] IBRAHIMBEGOVIĆ A. and E.L. WILSON, A Unified Formulation for Triangular and Quadrilateral Thin Shell Finite Elements with Six Degrees of Freedom, *Commun. Appl. Numer. Methods*, 7, 1991, p. 1-9.
- [IBR 92a] IBRAHIMBEGOVIĆ A., Plate Quadrilateral Finite Element With Incompatible Modes, *Commun. Appl. Numer. Methods*, 8, 1992, p. 497- 504.
- [IBR 93a] IBRAHIMBEGOVIĆ A., Mixed Finite Element for Plane Problems in Finite Elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 106, 1993, in press.
- [IBR 93b] IBRAHIMBEGOVIĆ A., Quadrilateral Finite Elements for Analysis of Thick and Thin Plates, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 93, 1993, in press.
- [IBR 93c] IBRAHIMBEGOVIĆ A., Stress Resultant Geometrically Nonlinear Shell Theory With Drilling Rotations. Part I: A Consistent Formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1993, submitted.
- [IBF 93a] IBRAHIMBEGOVIĆ A. and F. FREY, Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Planar Deformations of Elastic Initially Curved Beams, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36, 1993, in press.
- [IBF 93b] IBRAHIMBEGOVIĆ A. and F. FREY, An Efficient Implementation of Stress Resultant Plasticity in Finite Element Analysis of Reissner-Mindlin Plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36, 1993, p. 301-322.
- [IBF 93c] IBRAHIMBEGOVIĆ A. and F. FREY, Geometrically Nonlinear Method of Incompatible Modes in Application to Finite Elasticity With Independent Rotations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37, 1993, in press.
- [KWA 92] KWAN A. K. H., Rotational dof in the Frame Method Analysis of Coupled Shear/Core Wall Structure, *Computer. Struct.*, 14, 1992, p. 989-1005.
- [MUS53] MUSKHELISHVILI N.I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, P. Noordhoff, Groningen, Holland, 1953.
- [REI 65] REISSNER E., A Note on Variational Principles in Elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 1, 1965, p. 93-95.
- [SCO 61] SCORDELIS A.C., E.L. CROY and I.R. STUBBS, Experimental and Analytical Study of a Folded Plate, *ASCE J. Struct. Div.*, 87, 1961, p. 139-160.
- [TAY 86] TAYLOR R.L., J.C. SIMO, O.C. ZIENKIEWICZ and A.C. CHAN, The Patch Test: A Condition for Assessing Finite Element Convergence, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22, 1986, p. 39-62.
- [TES 81] TESSLER A. and S.B. DONG, On a Hierarchy of Conforming Timoshenko Beam Elements, *J. Comput. Struct.*, 14, 1981, p. 335-344.

- [TSO 73] TSO W.K. and J.K. BISWAS, General Analysis of Nonplanar Coupled Shear Walls, ASCE J. Struct. Div., 99, 1973, p. 365-380.
- [WIL 73] WILSON E.L., R.L. TAYLOR, W.P. DOHERTY and J. GHABOUSSI, Incompatible Displacement Models, in Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, (eds. S.J. Fenves, N. Perrone, A.R. Robinson and W.C. Schnobrich), Academic Press, 1973, p. 43-57.
- [WIL 74] WILSON E.L., The Static Condensation Algorithm, Int. J. Numer. Methods Eng., 8, 1974, p. 9-203.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O.C. and R.L. TAYLOR, The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity, McGraw-Hill, London, 1991.