
Un nouvel élément fini de coque axisymétrique semi-épaisse

Jean-Pierre Faye — Maurice Touratier

Laboratoire de Mécanique des Structures
ENSAM - 151, Bd de l'Hôpital
75013 PARIS

RÉSUMÉ. *Un nouvel élément fini est proposé pour l'analyse des coques axisymétriques à double courbure, semi-épaisses, élastiques, dans le domaine des petits déplacements. L'élément repose sur un nouveau modèle pour les plaques [TOU 91] et les coques [TOU 92 a-b] qui utilise une approche de type déplacement conférant aux déformations de cisaillement transversal une distribution non constante suivant l'épaisseur, et aux déformations normales et de distorsion suivant la surface moyenne une distribution non-linéaire au travers de l'épaisseur de la structure. L'élément proposé a trois noeuds et dix degrés de liberté, et est de continuité C1 pour le déplacement transversal, de continuité C0 pour le déplacement membranaire et la rotation de cisaillement. Enfin, une analyse des effets de bord est présentée et un résultat apparemment peu connu a été obtenu pour la contrainte de cisaillement transversal le long de la surface moyenne dans le cas du bord encastré : son maximum n'est pas situé à l'encastrement en général. La solution de référence est une solution éléments finis solides en bidimensionnel.*

ABSTRACT. *A new finite element is proposed to analyze axisymmetric semi-thick shells in elasticity and for small displacements. The element uses a new model for plates and shells due to Touratier [TOU 91-92 a-b]. All strains are non-linear in respect to the thickness coordinate. The element has three nodes and ten degrees of freedom, is of C1 continuity for the transverse displacement, and C0 for the membrane displacement and the shear rotation. Finally, an introduction to the edge effects for axisymmetric shells is presented. The study has shown some surprises concerning the hard clamped edge, in comparison with a two-dimensional eight node isoparametric solid finite element model used in reference : the transverse shear stress is not maximum at the clamped edge.*

MOTS CLÉS : *coque axisymétrique, cisaillement transversal, éléments finis, blocage numérique, effets de bord.*

KEY WORDS : *axisymmetric shell, transverse shear, finite element, locking edge effects.*

1 - Introduction

La modélisation des structures de type poutres, plaques et coques est encore aujourd'hui, et malgré une littérature très dense sur le sujet, une recherche ouverte, à la fois sur les plans théorique et numérique. De nombreuses synthèses sont disponibles, par exemple dans [BAT 90,92], [GIL 91], [ELI 87], [HRA 84], [BER 80], [NOO 89,91], [REI 85], [YAN 90], [AXE 87], [KAR 87]. La principale difficulté théorique rencontrée dans ce type de recherche réside dans la qualité du passage du tridimensionnel au bidimensionnel pour les plaques et les coques, l'épaisseur de ce type de structure étant généralement assez petite devant les autres dimensions pour autoriser cette opération qui présente un intérêt primordial d'un point de vue pratique (facilité d'utilisation, rapidité des calculs, ...). A ces considérations d'une importance majeure au plan théorique s'ajoute une pathologie de fonctionnement purement numérique dans les approximations par éléments finis sur ce type de modèle : il s'agit du blocage numérique dont le contrôle présente aussi des difficultés très sérieuses, voir par exemple [BAT 90,92] et [KER 90].

L'objectif de cet article est de présenter un nouvel élément fini de coques axisymétriques courbes et modérément épaisses, pour le domaine d'applications en petites perturbations élastiques [FAY 93]. L'élément repose sur un modèle théorique proposé pour les plaques [TOU 89, 91] et les coques [TOU 92 a-b]. L'élément est développé en coordonnées curvilignes pour les coques axisymétriques et les poutres courbes (dans ce dernier cas à section rectangulaire). Pour contrôler le blocage numérique en cisaillement, une rotation membranaire dépendant de la courbure est introduite et a pour effet, entre-autres, de découpler la déformation de cisaillement transversal, en accentuant en revanche le couplage membrane-flexion. Ainsi, l'interpolation cubique du déplacement transversal est de continuité C^1 , les autres déplacements généralisés liés à la membrane et au cisaillement transversal utilisant des interpolations quadratiques de continuité C^0 . Cette disposition permet aux grandeurs intervenant dans la définition de la déformation de cisaillement transversal de présenter une interpolation de même degré automatiquement. Le blocage en cisaillement est alors inexistant. Puis, le blocage en membrane est contrôlé en modifiant les interpolations des déformations membranaires résultant des choix précédents (sinon l'élément présente un blocage sérieux en membrane). La méthode dite "de substitution des déformations" [JAN 87] est utilisée : les déformations membranaires sont calculées à partir des interpolations de départ aux points d'intégration réduite (et en coordonnées réduites) puis extrapolées linéairement sur le domaine de l'élément à partir de ces valeurs. L'intégration numérique de l'élément sur l'épaisseur est explicite. L'élément courbe finalement proposé est doté de trois noeuds (un à chaque extrémité et un au centre), et présente au total dix degrés de liberté : quatre à chaque extrémité pour le déplacement transversal, sa dérivée première, le déplacement membranaire et la rotation de cisaillement ; deux au centre pour le déplacement membranaire et la rotation de cisaillement. Dans un domaine d'applications raisonnable, la réponse de l'élément est satisfaisante.

Enfin une analyse des effets de bord a été réalisée sur deux structures particulières : un cylindre droit à base circulaire, encasté à l'une de ses extrémités, libre à l'autre, et soumis à une pression interne uniforme ; un hémisphère tronqué, encasté sur sa grande base et soumis à une distribution de charges concentrées sur la base tronquée. Un résultat intéressant est apparu : la contrainte de cisaillement transversal n'est pas maximum au bord encasté mais à une courte distance de celui-ci et à l'intérieur de la couche limite développée par l'effet de bord. Il apparaît que le modèle présenté ici est plus sensible aux effets de bord que celui de Reissner-Mindlin.

2 - Indications sur la théorie utilisée

Des indications sont maintenant fournies sur le modèle de base ayant servi à la construction de l'élément fini de coque axisymétrique présentée au paragraphe suivant.

Soit donc A la surface moyenne d'une coque de forme arbitraire a priori, définie en coordonnées curvilignes orthogonales (ξ_1, ξ_2) coïncidant avec ses lignes de courbure principales. Le long des directions de coordonnées ξ_1 et ξ_2 , les vecteurs unitaires suivants sont introduits classiquement en géométrie des surfaces :

$$\vec{e}_1 = \alpha_1^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \alpha_2^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \tag{1}$$

où $\vec{r} = \vec{r}(\xi_1, \xi_2)$ est le vecteur position d'un point quelconque de la surface de référence et α_β les coefficients de la métrique de la surface, définis par :

$$\alpha_1^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \quad \text{et} \quad \alpha_2^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \tag{2}$$

La base considérée dans la suite pour étudier la coque est complétée par un troisième vecteur noté \vec{n} qui est la normale unitaire à la surface moyenne telle que $\vec{n} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$. Les rayons de courbure suivant les directions ξ_1 et ξ_2 sont notés R_1 et R_2 respectivement, et sont positifs si les centres de courbure sont situés du côté de la surface où la normale unitaire est négative. La troisième coordonnée nécessaire à la représentation de la coque est ζ mesurée suivant la direction \vec{n} de la normale à la surface moyenne (coordonnée suivant l'épaisseur). Ainsi, un élément différentiel au travers de la surface moyenne A est caractérisé par l'expression :

$$(dS)^2 = L_1^2 (d\xi_1)^2 + L_2^2 (d\xi_2)^2 + (d\zeta)^2 \tag{3}$$

tandis que l'élément de volume s'écrit :

$$dv = L_1 L_2 d\xi_1 d\xi_2 d\zeta \tag{4}$$

où

$$L_1 = \alpha_1 (1 + \zeta / R_1) \quad \text{et} \quad L_2 = \alpha_2 (1 + \zeta / R_2) \tag{5}$$

représentent les paramètres de Lamé de la surface moyenne A.

Ces dernières expressions permettent de caractériser aisément un élément différentiel appartenant à la surface moyenne puisqu'alors $\zeta = 0$ et donc :

$$(ds)^2 = \alpha_1^2 (d\xi_1)^2 + \alpha_2^2 (d\xi_2)^2 \tag{6}$$

Ces notions indispensables pour la suite de géométrie des surfaces ayant été rappelées, l'objectif immédiat est la construction de la cinématique de la coque en coordonnées curvilignes orthogonales notées ci-dessus ξ_1, ξ_2, ζ .

La coque considérée maintenant est axisymétrique et (\bar{n}, \bar{e}_1) désigne le plan de symétrie. Soit $\bar{U}_1^a, \bar{U}_2^a, \bar{U}_\zeta^a$ les composantes approchées (rappelées par l'indice supérieur a) du déplacement d'un point quelconque (ξ_1, ξ_2, ζ) de la coque en coordonnées curvilignes dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n})$. Puisque la coque est axisymétrique et caractérisée dans le plan (\bar{n}, \bar{e}_1) , alors :

$$\bar{U}_2^a = 0 \quad \text{et} \quad \partial / \partial \xi_2 = 0 \tag{7}$$

Les autres composantes du déplacement sont supposées de la forme approchée suivante, en statique, [TOU 92-a] :

$$\bar{U}_1^a(\xi_1, \zeta) = \frac{L_1}{\alpha_1} \bar{u}(\xi_1) + \frac{f(\zeta) - \zeta}{\alpha_1} \frac{d\bar{w}(\xi_1)}{d\xi_1} + f(\zeta) \bar{\omega}(\xi_1) \tag{8}$$

$$\bar{U}_\zeta^a(\xi_1) = \bar{w}(\xi_1)$$

avec :

$$f(\zeta) = \frac{e}{\pi} \sin \frac{\pi \zeta}{e} \tag{9}$$

Les commentaires suivants s'imposent pour [8] et [9] :

- . $\bar{u}(\xi_1)$ est le déplacement membranaire
- . $\bar{\omega}(\xi_1)$ est une rotation due au cisaillement
- . $\frac{d\bar{w}}{d\xi_1}(\xi_1)$ est la rotation de Kirchhoff-Love
- . $\bar{w}(\xi_1)$ est le déplacement transversal (suivant l'épaisseur)
- . dans [9], e est l'épaisseur de la coque, tandis que l'expression proposée a une essence tridimensionnelle [TOU 92-b] pour les plaques
- . la composante suivant \bar{e}_1 du déplacement présente une part antisymétrique en ζ qui s'écrit d'après les équations [8], [9] et [5] :

$$\bar{U}_1^a(\xi_1, \zeta) - \bar{u}(\xi_1) = \frac{\zeta}{R_1} \bar{u}(\xi_1) - \frac{\zeta}{\alpha_1} \frac{d\bar{w}(\xi_1)}{d\xi_1} + \frac{e}{\pi} \sin \frac{\pi \zeta}{e} \left[\bar{\omega}(\xi_1) + \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\bar{w}(\xi_1)}{d\xi_1} \right] \tag{10}$$

Il apparaît sous cette forme que la rotation d'un segment traversant l'épaisseur de la coque comprend la rotation classique de Kirchhoff-Love, une rotation due au cisaillement et une rotation produite par les effets membranaires en présence de courbure (si $R_1 \rightarrow \infty$, la courbure devient nulle et cette dernière rotation disparaît).

. dans [8], si $f(\zeta) = 0$, on retrouvera la théorie de Kirchhoff-Love, tandis qu'avec $f(\zeta) = \zeta$ on retrouvera la théorie de Reissner-Mindlin à la condition d'introduire un coefficient de correction du cisaillement. A noter qu'avec la proposition représentée par l'équation [9], aucun coefficient correcteur

n'est nécessaire, ce qui présente un avantage immédiat dans l'analyse des structures composites.

Ensuite, les déformations en petits déplacements sont calculées en coordonnées curvilignes orthogonales. Pour une structure axisymétrique, elles s'écrivent :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= \frac{\alpha_1}{L_1} \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \xi_1} + \frac{\bar{U}_\zeta}{R_1} \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \frac{\alpha_2}{L_2} \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} \frac{\bar{U}_1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{\bar{U}_\zeta}{R_2} \right) \\ 2 \bar{\varepsilon}_{1\zeta} &= \frac{\alpha_1}{L_1} \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \bar{U}_\zeta}{\partial \xi_1} - \frac{\bar{U}_1}{R_1} \right) + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \zeta} \\ \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta} &= \frac{\partial \bar{U}_\zeta}{\partial \zeta}\end{aligned} \quad [11]$$

où \bar{U}_1, \bar{U}_ζ sont les composantes du déplacement en coordonnées courbes.

En introduisant l'expression approchée [8] du déplacement dans la définition ci-dessus des déformations, il vient, toutes réductions faites et sans hypothèses supplémentaires :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= \frac{\alpha_1}{L_1} \left[-\frac{R_{1,1}\zeta}{\alpha_1 R_1^2} \bar{u} + \frac{L_1}{\alpha_1^2} \bar{u}_{,1} + \frac{f(\zeta) - \zeta}{\alpha_1^2} \bar{w}_{,11} - \frac{f(\zeta) - \zeta}{\alpha_1^3} \alpha_{1,1} \bar{w}_{,1} + \frac{f(\zeta)}{\alpha_1} \bar{w}_{,1} + \frac{\bar{w}}{R_1} \right] \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \frac{\alpha_2}{L_2} \left[\frac{L_1 \alpha_{2,1}}{\alpha_1^2 \alpha_2} \bar{u} + \frac{f(\zeta) - \zeta}{\alpha_1^2 \alpha_2} \alpha_{2,1} \bar{w}_{,1} + \frac{f(\zeta) \alpha_{2,1}}{\alpha_1 \alpha_2} \bar{w} + \frac{\bar{w}}{R_2} \right] \\ 2 \bar{\varepsilon}_{1\zeta} &= \left[f_{,\zeta}(\zeta) - \frac{\alpha_1 f(\zeta)}{R_1 L_1} \right] \left(\bar{w} + \frac{1}{\alpha_1} \bar{w}_{,1} \right) \quad \bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta} = 0\end{aligned} \quad [12]$$

où \bar{u}, \bar{w} et \bar{w} sont fonction de la coordonnée curviligne ξ_1 qui décrit la méridienne de la coque axisymétrique et avec $\bar{u}_{,1} = d\bar{u}/d\xi_1, \dots, f_{,\zeta}(\zeta) = df(\zeta)/d\zeta$.

Comme indiqué au début, la cinématique [8] conduit à un découplage de la déformation de cisaillement transversal et du déplacement membranaire (troisième équation dans [12]). En revanche, l'expression de la déformation suivant la méridienne est beaucoup plus compliquée que, si dans [8] on fait $L_1/\alpha_1 = 1$.

En effet, si dans [8] on prend $L_1/\alpha_1 = 1$, ce qui est très habituel dans la littérature, alors :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= \frac{\alpha_1}{L_1} \left[\frac{\bar{u}_{,1}}{\alpha_1} + \frac{f(\zeta) - \zeta}{\alpha_1^2} \bar{w}_{,11} + \frac{f(\zeta)}{\alpha_1} \bar{w}_{,1} + \frac{\bar{w}}{R_1} \right] \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \frac{\alpha_2}{L_2} \left[\frac{\alpha_{2,1} \bar{u}}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{f(\zeta) - \zeta}{\alpha_1^2 \alpha_2} \bar{w}_{,1} + \frac{f(\zeta)}{\alpha_1 \alpha_2} \bar{w} + \frac{\bar{w}}{R_2} \right] \\ 2 \bar{\varepsilon}_{1\zeta} &= \frac{f_{,\zeta} R_1 + f_{,\zeta} \zeta - f(\zeta)}{L_1 R_1} \bar{w}_{,1} + \left[f_{,\zeta} - \frac{\alpha_1 f(\zeta)}{L_1 R_1} \right] \bar{w} - \frac{\alpha_1 \bar{u}}{L_1 R_1}\end{aligned} \quad [13]$$

La comparaison des expressions [12] et [13] confirme les commentaires ci-dessus. La théorie complète s'appuyant sur [8] a été développée en détail dans [TOU 92-a]. La formulation du problème aux limites correspondant s'appuie sur le principe des puissances virtuelles.

3 - Un nouvel élément fini de coque axisymétrique courbe et semi-épaisse

Pour construire une approximation par éléments finis du modèle théorique présenté très succinctement au paragraphe précédent, les espaces suivants sont introduits :

$$\mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}^a \subset \mathcal{U} \text{ et } \hat{\mathcal{V}}^h \subset \hat{\mathcal{V}}^a \subset \hat{\mathcal{V}} \tag{14}$$

où \mathcal{U} est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles \bar{U}_1, \bar{U}_ξ de la solution tridimensionnelle exacte, \mathcal{W}^a est l'espace approché qui contient les déplacements approchés $\bar{U}_1^a, \bar{U}_\xi^a$ (équation [8]) également cinématiquement admissibles, \mathcal{W}^h est l'espace de l'approximation éléments finis de [8] et, enfin, les espaces $\hat{\mathcal{V}}, \hat{\mathcal{V}}^a, \hat{\mathcal{V}}^h$ sont ceux des mouvements virtuels correspondants ayant le plus souvent une structure analogue à $\mathcal{U}, \mathcal{W}^a$ et \mathcal{W}^h sauf au bord de la coque. On remarquera que le passage 3D→2D évoqué en introduction est caractérisé par [14] et que par ailleurs :

$$\dim(\mathcal{W}^h) = N < \dim(\mathcal{W}^a) = \infty \text{ et } \dim(\hat{\mathcal{V}}^h) = N < \dim(\hat{\mathcal{V}}^a) = \infty \tag{15}$$

Pour l'approximation par éléments finis, toutes les fonctions dans [8] et [12] seront affectées de l'indice supérieur droit h qui est associé à \mathcal{W}^h et $\hat{\mathcal{V}}^h$. Ainsi, par exemple, l'approximation par éléments finis (en fait l'interpolation) de \bar{u} sera désignée \bar{u}^h , etc. De même, le domaine réel de la coque axisymétrique étant noté Ω , son maillage sera représenté symboliquement par $U\Omega_c^h$ où Ω_c^h est le domaine géométrique d'un élément fini.

3.1 - Puissance virtuelle développée par les efforts intérieurs de cohésion dans une approximation par éléments finis

Ces quelques remarques étant faites, nous présentons maintenant la construction de la matrice de rigidité de l'élément fini de coque axisymétrique en coordonnées curvilignes en s'aidant du principe des puissances virtuelles. Ainsi, la puissance virtuelle développée par les efforts intérieurs de cohésion qui vaut par définition (S^h est le tenseur des contraintes et \hat{D}^h le tenseur des taux de déformations virtuelles dans une approximation par éléments finis en petits déplacements) :

$$\hat{P}_1^h = - \int_{U\Omega_c^h} S_{\alpha\beta}^h \hat{D}_{\alpha\beta}^h L_1 L_2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{16}$$

s'écrit, compte tenu des définitions adoptées :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1^h = & -2\pi \int_0^1 \left[\left(\frac{-M_{11}^h}{\alpha_1 R_1^2} R_{1,1} + \frac{N_{22}^h}{\alpha_1 \alpha_2} \alpha_{2,1} + \frac{M_{22}^h}{\alpha_1 \alpha_2 R_1} \alpha_{2,1} \right) \hat{u}^h - \frac{\tilde{M}_{11}^h - M_{11}^h}{\alpha_1^3} \alpha_{1,1} \hat{w}_{,1}^h + \dots \right. \\ & \dots + \left(\frac{N_{11}^h}{\alpha_1} + \frac{M_{11}^h}{\alpha_1 R_1} \right) \hat{u}^h + \left(\frac{N_{11}^h}{R_1} + \frac{N_{22}^h}{R_2} \right) \hat{w}^h + \left(\frac{\tilde{M}_{22}^h - M_{22}^h}{\alpha_1^2 \alpha_2} \alpha_{2,1} + \frac{\tilde{Q}_{1\zeta}^h}{\alpha_1} \right) \hat{w}_{,1}^h + \dots \quad [17] \\ & \left. \dots + \frac{\tilde{M}_{11}^h - M_{11}^h}{\alpha_1^2} \hat{w}_{,11}^h + \left(\frac{\tilde{M}_{22}^h}{\alpha_1 \alpha_2} \alpha_{2,1} + \tilde{Q}_{1\zeta}^h \right) \hat{w}^h + \frac{\tilde{M}_{11}^h}{\alpha_1} \hat{w}_{,1}^h \right] \alpha_1 \alpha_2 d\zeta_1 \end{aligned}$$

où les mouvements virtuels sont caractérisés d'une manière consistante variationnellement en les choisissant de la même forme que [8], mais en les distinguant de [8] par ajout du chapeau sur les déplacements généralisés. En outre sont définis automatiquement à partir de [16] et de l'expression des taux de déformations virtuelles (de la même forme que [12], mais en les distinguant par ajout d'un chapeau sur les grandeurs généralisées) les contraintes généralisées :

$$\begin{aligned} N_{11}^h &= \int_{-e/2}^{+e/2} S_{11}^h \frac{L_2}{\alpha_2} d\zeta, & N_{22}^h &= \int_{-e/2}^{+e/2} S_{22}^h \frac{L_1}{\alpha_1} d\zeta, \\ M_{11}^h &= \int_{-e/2}^{+e/2} \zeta S_{11}^h \frac{L_2}{\alpha_2} d\zeta, & M_{22}^h &= \int_{-e/2}^{+e/2} \zeta S_{22}^h \frac{L_1}{\alpha_1} d\zeta, \\ \tilde{M}_{11}^h &= \int_{-e/2}^{+e/2} f(\zeta) S_{11}^h \frac{L_2}{\alpha_2} d\zeta, & \tilde{M}_{22}^h &= \int_{-e/2}^{+e/2} f(\zeta) S_{22}^h \frac{L_1}{\alpha_1} d\zeta, \\ \tilde{Q}_{1\zeta}^h &= \int_{-e/2}^{+e/2} \left[f_{,\zeta}(\zeta) - \frac{\alpha_1 f(\zeta)}{R_1 L_1} \right] S_{1\zeta}^h \frac{L_1}{\alpha_1} \frac{L_2}{\alpha_2} d\zeta, \end{aligned} \quad [18]$$

Celles-ci sont les efforts membranaires classiques $N_{\beta\beta}^h$, les moments fléchissants ordinaires $M_{\beta\beta}^h$, des moments raffinés $\tilde{M}_{\beta\beta}^h$ dus à la fonction $f(\zeta)$ introduite, l'effort tranchant $\tilde{Q}_{1\zeta}^h$. On peut remarquer que si $f(\zeta) = 0$ alors $\tilde{M}_{\beta\beta}^h = 0$; $\tilde{Q}_{1\zeta}^h = 0$ tandis que si $f(\zeta) = \zeta$ alors $\tilde{M}_{\beta\beta}^h = M_{\beta\beta}^h$, (voir aussi [9] et les commentaires qui suivent).

La suite du calcul de [17] nécessite l'introduction d'une loi de comportement. Celle-ci est prise élastique-linéaire et orthotrope et sa forme locale est, dans le cas axisymétrique :

$$\begin{Bmatrix} S_{11}^h \\ S_{22}^h \\ S_{1\zeta}^h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{1111} & C'_{1122} & 0 \\ C'_{1122} & C'_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{1\zeta 1\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{11}^h \\ \bar{\epsilon}_{22}^h \\ 2 \bar{\epsilon}_{1\zeta}^h \end{Bmatrix} \quad [19]$$

avec : $C'_{\alpha\alpha\beta\beta} = C_{\alpha\alpha\beta\beta} - C_{\alpha\alpha\zeta\zeta} C_{\beta\beta\zeta\zeta} / C_{\zeta\zeta\zeta\zeta}$; $\alpha, \beta = 1, 2$ [20]

Les coefficients de comportement [20] tiennent compte de l'hypothèse de contrainte normale transversale $S_{\zeta\zeta}^h$ nulle car $\bar{\varepsilon}_{\zeta\zeta}^h$ est nulle, et l'épaisseur e de la coque demeure assez inférieure à ses autres dimensions.

Compte tenu de [18], [19] et [12] (avec l'indice supérieur droit h), la loi de comportement global s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}^h \\ \mathbf{M}^h \\ \bar{\mathbf{M}}^h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} & \mathbf{d} \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \mathbf{d}^T & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{0h} \\ \boldsymbol{\kappa}^h \\ \boldsymbol{\chi}^h \end{Bmatrix} \quad [21]$$

$$\bar{Q}_{1\zeta}^h = \bar{C}'_{1\zeta} \left(\bar{\omega}^h + \frac{1}{\alpha_1} \bar{w}_{,1}^h \right) = \bar{C}'_{1\zeta} \bar{\gamma}^h$$

Les coefficients des matrices carrées de format deux $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{D}, \bar{\mathbf{D}}, \mathbf{d}$ sont fournis en Annexe. L'intégration de ces matrices est explicite dans la direction de l'épaisseur. Les vecteurs apparaissant dans [21] sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{hT} &= \{N_{11}^h \quad N_{22}^h\}, \quad \mathbf{M}^{hT} = \{M_{11}^h \quad M_{22}^h\}, \quad \bar{\mathbf{M}}^{hT} = \{\bar{M}_{11}^h \quad \bar{M}_{22}^h\} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{0hT} &= \left\{ \bar{u}_{,1}^h + \frac{\bar{w}^h}{R_1}; \frac{R_{0,1}}{R_0} \bar{u}^h + \frac{\bar{w}^h}{R_2} \right\} \\ \boldsymbol{\kappa}^{hT} &= \left\{ -\frac{R_{1,1}}{R_1^2} \bar{u}^h + \frac{\bar{u}_{,1}}{R_1} - \bar{w}_{,11}^h; \frac{R_{0,1}}{R_0} \frac{\bar{u}^h}{R_1} - \frac{R_{0,1}}{R_0} \frac{\bar{w}_{,1}^h}{R_0} \right\} \\ \boldsymbol{\chi}^{hT} &= \left\{ \bar{w}_{,11}^h + \bar{\omega}_{,1}^h; \frac{R_{0,1}}{R_0} \bar{w}_{,1}^h + \frac{R_{0,1}}{R_0} \bar{\omega}^h \right\} \end{aligned} \quad [22]$$

Ainsi la puissance virtuelle devient :

$$\hat{\delta}_1^h = -2\pi \int_0^1 \left\{ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{0hT} \hat{\boldsymbol{\kappa}}^{hT} \hat{\boldsymbol{\chi}}^{hT} \hat{\boldsymbol{\gamma}}^h \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} & 0 \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} & \mathbf{d} & 0 \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \mathbf{d}^T & \bar{\mathbf{D}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}'_{1\zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{0h} \\ \boldsymbol{\kappa}^h \\ \boldsymbol{\chi}^h \\ \bar{\boldsymbol{\gamma}}^h \end{Bmatrix} d\xi_1 \quad [23]$$

avec $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{0h}, \dots$ correspondent à [22] pour les vitesses virtuelles $\hat{\bar{u}}^h, \dots$

3.2 - Interpolation de la cinématique dans l'approximation par éléments finis.

Des éléments finis de coques axisymétriques ont été développés pour les structures modérément épaisses, plutôt en continuité C^0 , voir par exemple [ZIE 77], [KAR 87] et [OLI 86]. Les approches actuelles sont en majorité de type dégénéré en raison des difficultés propres aux formulations en coordonnées curvilignes soulignées dans [HAN 84], [YAN 89] et [GUI 92]. Toutefois, l'approche coordonnées curvilignes a le mérite d'être exacte d'un point de vue géométrique et

par ailleurs elle offre la possibilité d'ouvrir le sujet à la fois sur le plan théorique et sur le plan numérique, l'élément fini étant alors une approximation d'une théorie de coque. Le débat est très controversé, voir par exemple [NOO 89]. Les développements présentés dans cet article s'appuient sur l'approche coordonnées curvilignes.

Pour achever la construction de la matrice de rigidité de l'élément fini considéré, il est maintenant nécessaire de choisir les interpolations pour $\bar{u}^h, \bar{\omega}^h, \bar{w}^h$ (de même pour $\hat{u}^h, \hat{\omega}^h, \hat{w}^h$) dans [22]. Considérons donc un élément Ω_c^h dans le maillage $u\Omega_c^h$. Pour cet élément, trois noeuds g_i sont retenus le long de la méridienne de la coque, figure 1. D'après la cinématique [8] \bar{w}^h doit être de continuité C^1 et les autres variables de continuité C^0 puisqu'il s'agit d'une méthode aux déplacements. Par suite, les déplacements généralisés $\bar{w}^h, \bar{\omega}^h$ et \bar{u}^h sont approximés par une interpolation cubique pour \bar{w}^h et quadratique pour $\bar{\omega}^h$ et \bar{u}^h :

$$\bar{w}^h(\xi_1) = N_w \mathbf{q}^e, \quad \bar{\omega}^h(\xi_1) = N_\omega \mathbf{q}^e, \quad \bar{u}^h(\xi_1) = N_u \mathbf{q}^e \quad [24]$$

où les degrés de liberté sont définis par :

$$\mathbf{q}^{eT} = \left\{ \bar{u}^e(g_1) \bar{\omega}^e(g_1) \bar{w}^e(g_1) \bar{w}_{,1}^e(g_1) ; \bar{u}^e(g_2) \bar{\omega}^e(g_2) ; \bar{u}^e(g_3) \bar{\omega}^e(g_3) \bar{w}^e(g_3) \bar{w}_{,1}^e(g_3) \right\} \quad [25]$$

tandis que les interpolations en coordonnée réduite ξ , ($-1 \leq \xi \leq +1$) s'expriment par :

$$\begin{aligned} N_w &= \left[0 \ 0 \ H_1^0(\xi) \ H_1^1(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ H_2^0(\xi) \ H_2^1(\xi) \right] \\ N_\omega &= \left\{ 0 \ N_1(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ N_2(\xi) \ 0 \ N_3(\xi) \ 0 \ 0 \right\} \\ N_u &= \left\{ N_1(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \ N_2(\xi) \ 0 \ N_3(\xi) \ 0 \ 0 \ 0 \right\} \end{aligned} \quad [26]$$

Dans [26], $H_j^k(\xi)$ sont les fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite, $N_i(\xi)$ sont les fonctions d'interpolation quadratiques de Serendip, toutes données en Annexe. Il est par ailleurs évident que les mêmes fonctions d'interpolation sont adoptées pour le champ des vitesses virtuelles dont le vecteur des valeurs nodales est noté $\hat{\mathbf{q}}^e$.

Remarque : L'expression [12] des déformations montre, comme souligné déjà, que la déformation de cisaillement transverse est découplée de la membrane suite au choix de la cinématique [8]. Cette déformation s'exprime alors de façon inhabituelle car elle est indépendante du déplacement membranaire \bar{u} . On exploite ici ce résultat de façon heuristique pour éliminer complètement le verrouillage en cisaillement transverse puisque, d'après [24] et [26], $\bar{\omega}^h$ et $\bar{w}_{,1}^h$ ont alors une

interpolation de même ordre, condition suffisante pour éviter le blocage numérique

sur l'expression $\left(\bar{w}_{,1}^h = \frac{d \bar{w}^h}{d \xi_1} \right)$:

$$2 \bar{\varepsilon}_{1\zeta}^h = \left[\frac{d f(\zeta)}{d \zeta} - \frac{\alpha_1 f(\zeta)}{R_1 L_1} \right] \left(\bar{\omega}^h + \frac{1}{\alpha_1} \bar{w}_{,1}^h \right) \tag{27}$$

Par contre, l'interpolation [24] ne suffit pas à éviter les anomalies numériques en membrane : l'élément, tel quel, verrouille sérieusement. Pour pallier ce défaut, la méthode de substitution des déformations est appliquée aux déformations $\bar{\varepsilon}_{11}^h$ et $\bar{\varepsilon}_{22}^h$ de membrane. Cette dernière méthode est maintenant bien connue, voir par exemple [JAN 87] et [POL à paraître]. Signalons enfin que l'élimination des pathologies numériques ci-dessus évoquées (blocage en cisaillement, blocage en membrane, représentation des modes rigides) est une difficulté considérable pour les éléments développés en coordonnées curvilignes, cas de la présente étude, voir par exemple [GUI 92], [YAN 89], [HAN 84].

3.3 - Matrices élémentaires de l'élément fini de coque axisymétrique

Pour construire la matrice de rigidité de l'élément fini considéré, il suffit d'explicitier l'expression [23] de la puissance virtuelle développée par les efforts intérieurs de cohésion en introduisant les interpolations [24] dans les déformations généralisées [22].

Ces dernières deviennent :

$$\left\{ \begin{matrix} \varepsilon^{oh} \\ \kappa^h \\ \chi^h \\ \bar{\gamma}^h \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_\varepsilon \\ \mathbf{B}_\kappa \\ \mathbf{B}_\chi \\ \mathbf{B}_\gamma \end{bmatrix} \mathbf{q}^e \tag{28}$$

où les matrices \mathbf{B}_ε , \mathbf{B}_κ , \mathbf{B}_χ sont de format (2×10) , \mathbf{B}_γ est de format (1×10) ; et sont données en Annexe.

Dans [28], la matrice \mathbf{B}_ε est modifiée selon l'approche dite de substitution des déformations. Les déformations membranaires $\varepsilon^{oh} = \mathbf{B}_\varepsilon \mathbf{q}^e$ dans [28] sont

d'abord évaluées aux deux points $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$ en coordonnées réduites, puis ensuite extrapolées linéairement à partir de ces deux points sur le domaine de l'élément. Ceci s'effectue comme suit :

i - évaluation aux points $\xi = \pm 1/\sqrt{3}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{oh} = (\mathbf{B}_\varepsilon)_{\xi=\pm 1/\sqrt{3}} \mathbf{q}^e = \left\{ (\varepsilon_{11}^{oh})_{\xi=\pm 1/\sqrt{3}} (\varepsilon_{22}^{oh})_{\xi=\pm 1/\sqrt{3}} \right\}^T \quad [29]$$

ii - extrapolation sur le domaine :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{oh} &= (\varepsilon_{11}^{oh})_{\xi=-1/\sqrt{3}} \tilde{N}_1(\xi) + (\varepsilon_{11}^{oh})_{\xi=+1/\sqrt{3}} \tilde{N}_2(\xi) \\ \varepsilon_{22}^{oh} &= (\varepsilon_{22}^{oh})_{\xi=-1/\sqrt{3}} \tilde{N}_1(\xi) + (\varepsilon_{22}^{oh})_{\xi=+1/\sqrt{3}} \tilde{N}_2(\xi) \end{aligned} \quad [30]$$

avec :

$$\tilde{N}_1(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3} \xi) \quad \text{et} \quad \tilde{N}_2(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3} \xi) \quad [31]$$

On voit donc que dans [28], la matrice \mathbf{B}_ε est remplacée par la matrice $\bar{\mathbf{B}}_\varepsilon$ résultant de [29] à [31], et donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{oh} = \bar{\mathbf{B}}_\varepsilon \mathbf{q}^e \quad [32]$$

Enfin, la matrice élémentaire de rigidité \mathbf{K}^e est définie par :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1^h &= -2\pi \hat{\mathbf{q}}^{eT} \int_{-1}^{+1} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{B}}_\varepsilon \\ \mathbf{B}_\kappa \\ \mathbf{B}_\chi \\ \mathbf{B}_\gamma \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} & 0 \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} & \mathbf{d} & 0 \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \mathbf{d}^T & \bar{\mathbf{D}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{C}}'_{1\zeta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{B}}_\varepsilon \\ \mathbf{B}_\kappa \\ \mathbf{B}_\chi \\ \mathbf{B}_\gamma \end{array} \right\} \alpha_1 \alpha_2 J d\xi \mathbf{q}^e \\ &= -\hat{\mathbf{q}}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \quad [33] \end{aligned}$$

Cette dernière matrice est intégrée avec cinq points de Gauss le long de la coordonnée réduite ξ et explicitement suivant la coordonnée d'épaisseur ζ . On trouvera en Annexe quelques éléments de géométrie utilisés pour construire la matrice de rigidité élémentaire \mathbf{K}^e .

Finalement, l'expression du principe des puissances virtuelles [GER 86] et la forme discrétisée associée due à [24] et ses analogues pour les vitesses virtuelles généralisées $\hat{\mathbf{w}}^h(\xi_1)$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}^h(\xi_1)$ et $\hat{\mathbf{u}}^h(\xi_1)$ permettent d'expliciter sans difficulté les autres matrices et vecteurs de charge élémentaires.

3.4 - Evaluations numériques du nouvel élément fini

L'élément fini présenté ci-dessus a été implémenté dans le code de calcul Abaqus [ABA 91]. Les évaluations suivantes ont été effectuées sur l'élément proposé ici.

Rang de la matrice de rigidité. Les valeurs propres de la matrice de rigidité ont été calculées. Avec cinq points d'intégration suivant la méridienne, une seule valeur propre est trouvée très proche de zéro ce qui est correct pour une structure axisymétrique qui présente un seul mouvement de corps rigide. Les tests ont été effectués sur un cylindre et un hémisphère. Pour la poutre courbe déduite de la présente approche avec $R_2 = \infty$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, trois mouvements de corps rigide ont été observés en utilisant les tests figurant dans [GUI 92].

Tests de blocage numérique. Comme indiqué précédemment, deux formes de blocage numérique peuvent considérablement nuire au fonctionnement d'un élément de coque : le blocage en cisaillement transverse et celui en membrane. Le blocage en cisaillement a été éliminé directement par un choix de cinématique et des interpolations. Ceci a été vérifié d'abord sur une poutre cantilever, à section rectangulaire, très élancée (longueur $L = 100m$, épaisseur $e = 0,1m$), sous une charge concentrée d'extrémité valant 1N. Avec l'élément de coque proposé, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$. La poutre est maillée avec un seul élément : l'élément proposé ici, sa version en intégration réduite pour le cisaillement, et un élément d'Euler-Bernoulli d'Abaqus fournissent la même valeur pour le déplacement transversal : $\bar{w}^h = 1.9048 \cdot 10^{-2} m$ en prenant un module d'Young $E = 210 GPa$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Pour vérifier la sensibilité numérique de l'élément au blocage en membrane, une poutre courbe a été considérée, voir figure 2. La poutre est de section rectangulaire (épaisseur e , largeur unitaire), est telle que sa ligne moyenne constitue un quart de cercle, est encastree à une extrémité et est soumise à une charge transversale concentrée à son autre extrémité, voir figure 2. Les résultats apparaissent figure 2 (voir aussi Tables en Annexe). Le maillage comporte six éléments, et quatre points d'intégration sont nécessaires. Pour les rapports R_2/e (noté R/e) étudiés, l'élément est insensible au blocage en membrane. Il n'est jamais sensible au blocage en cisaillement, mais devient, sur ce test, sensible au blocage en membrane à partir de $R/e = 10^3$.

Test de convergence pour les déplacements transversal et membranaire

Problème 1. Il s'agit d'une coque isotrope cylindrique encastree-libre et soumise à une pression interne uniforme, ses caractéristiques sont données figure 3. Les résultats obtenus apparaissent figure 4 à 8 (voir aussi Tables en Annexe), pour les valeurs maximum des déplacements transversal \bar{w}^h et membranaire \bar{u}^h mesurés à l'extrémité libre du cylindre, en $\xi = 0$, en fonction de l'épaisseur e du cylindre et du nombre de degrés de liberté dans le maillage. Les courbes de convergence de l'élément proposé noté SIN sont comparées avec celles de l'élément SAX2 de coque

axisymétrique semi-épaisse de type Reissner-Mindlin du code de calcul Abaqus. Ce dernier élément a trois noeuds, utilise l'intégration réduite et un facteur de correction du cisaillement transversal égal à 5/6. Sur ce test, l'élément proposé présente de bonnes propriétés de convergence sans recours à l'intégration réduite.

Problème 2. Une coque isotrope hémisphérique tronquée, encastrée à sa grande base, soumise à un chargement concentré sur l'autre base est considérée, voir ses caractéristiques figure 9. Les résultats du calcul apparaissent figures 10 et 11 (voir aussi Tables en Annexe) pour les composantes \bar{U}_1^h et \bar{U}_2^h du déplacement dans le repère global en fonction du nombre de degrés de liberté. La coque considérée est très mince ($R/h=10^3$). L'élément fini proposé ici est comparé avec l'élément SAX2 d'Abaqus (évoqué au problème précédent). On peut observer que l'élément proposé ici présente une convergence plutôt lente mais monotone due à une mauvaise représentation du mode rigide et pas au verrouillage en membrane, tandis que la réponse de SAX2 oscille. Ce test montre que les deux éléments considérés (SAX2 et SIN) n'ont pas atteint un degré de perfection total. Par contre, leur réponse sur des problèmes d'hémisphères tronqués, mais plutôt épais, est excellente.

4 - Analyse des effets de bord

Cette section est consacrée à l'analyse des effets de bord, du point de vue numérique, en considérant de nouveau le cylindre encastré-libre et soumis à une pression uniforme interne, voir figure 3, avec $e = 0.2m$. Il s'agit donc d'un problème de coque épaisse. La solution de référence (en l'absence de solution exacte tridimensionnelle) est une solution éléments finis de solides bidimensionnels en axisymétrique. L'élément considéré est le classique quadrilatère à huit noeuds, le maillage est constitué de 100×18 éléments (longueur \times épaisseur). Les résultats pour les déplacements et les contraintes locales sont présentés figures 12 à 19 (distributions suivant la méridienne ou une ligne parallèle, ou suivant l'épaisseur), voir aussi Tables en Annexe. Les comparaisons entre l'élément SAX2 (Abaqus) et l'élément proposé ici, la solution de référence étant donnée par le modèle éléments finis solides en bidimensionnel, montrent que, dans l'ensemble, l'utilisation d'un modèle raffiné permet de mieux tenir compte des distributions réelles, notamment des contraintes locales, surtout près des bords. Par ailleurs, la distribution de la contrainte de cisaillement transversal le long de la méridienne présente une allure semble-t-il peu connue : celle-ci n'est pas maximum à l'encastrement (excepté évidemment à l'intersection du plan d'encastrement et des frontières externe et interne du cylindre où toutes les contraintes sont extrêmement grandes) mais non loin de l'encastrement à une distance très proche du bord de la couche limite. En fait, cette contrainte a une valeur non nulle à l'encastrement, croît jusqu'au maximum indiqué puis décroît pour tendre assez rapidement vers zéro lorsque l'on s'éloigne de l'encastrement vers l'extrémité libre. Ce pic, en quelque sorte présenté par la contrainte de cisaillement transversal, est même plus prononcé au fûr et à mesure que l'épaisseur du cylindre décroît.

En conclusion, il apparaît que l'élément proposé ici est plus sensible aux effets de bord que les éléments de type Reissner-Mindlin puisque par exemple à l'encastrement les distributions non linéaires des contraintes sont bien reproduites (mais pas avec le modèle de Reissner-Mindlin) et que le pic de contrainte de cisaillement transverse est lui aussi rendu avec notre modèle (localisation correcte du maximum et de sa valeur). Par contre, la contrainte de cisaillement est trouvée nulle à l'encastrement et ceci est évidemment incorrect. Un tel résultat était prévisible d'après [12], puisque la condition d'encastrement introduite ici est telle que :

$$\bar{U}(P) = \bar{0}, \forall P \in \text{surface d'encastrement} \quad [34]$$

Ce type de comportement a une justification théorique en s'appuyant sur la décomposition des équations exactes tridimensionnelles pour une plaque épaisse élastique et les solutions correspondantes : de l'équation biharmonique, de l'équation de cisaillement et de l'équation transcendante. La solution de cette dernière équation est un moyen consistant pour contrôler l'anomalie enregistrée. On peut aussi avoir recours à des modèles encore plus sophistiqués tenant compte du pincement suivant l'épaisseur sans accroître le nombre de déplacements généralisés (voir par exemple [TOU 88] pour les plaques). Toutefois, ce type d'approche ne présente pas un grand intérêt du point de vue pratique "éléments finis" en raison des dérivées d'ordre élevé et du comportement qui apparaissent dans la cinématique.

5 - Conclusion

Un nouvel élément fini de coque axisymétrique courbe a été présenté pour des structures élastiques, modérément épaisses, en petits déplacements. L'élément est développé en coordonnées curvilignes sur une approche de type déplacement. La cinématique de base conduit à une distribution non-linéaire des contraintes au travers de l'épaisseur de la coque. L'élément est de continuité C1, a trois noeuds : quatre degrés de liberté aux noeuds d'extrémité et deux degrés de liberté au noeud central, car la dérivée du déplacement transversal intervient dans la cinématique. Cette dernière fait apparaître pour les structures courbes une "rotation membranaire" due à la courbure. Les interpolations retenues permettent d'éviter directement le blocage numérique en cisaillement transverse. Pour le contrôle du blocage numérique en membrane, la méthode de substitution des déformations est utilisée. L'élément a un comportement numérique très satisfaisant pour les structures cylindriques et, comparé à la référence éléments finis bidimensionnels de solide, il apparaît plus précis que l'élément du type Reissner-Mindlin. Enfin, une introduction à l'analyse des effets de bord a été réalisée. L'élément basé sur un modèle raffiné mais simple est plus sensible aux effets de bord que les éléments de type Reissner-Mindlin. La distribution de la contrainte de cisaillement transverse selon la méridienne pour une structure dont un bord est encasté présente une allure comportant un pic qui est situé non loin de l'encastrement : ainsi, la contrainte de cisaillement transverse n'est pas maximum à l'encastrement.

6 - Références

- [ABA 91] ABAQUS, Version 4.9, User's Manual, Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc. (1991)
- [AXE 87] AXELRAD, E.L., "Theory of Flexible Shells". North Holland (1987)
- [BAT 90] BATOZ, J.L. et DHATT, G., "Modélisation de structures par éléments finis", vol. 2. Hermès, Paris (1990)
- [BAT 92] BATOZ, J.L. et DHATT, G., "Modélisation de structures par éléments finis", vol. 3. Hermès, Paris (1992)
- [BER 80] BERT, C.W., in "Analysis and Performance of Composites". Edited by L.J. Broutman. Wiley and Sons, New York (1980)
- [ELI 87] ELISHAKOFF, I. and IRRETIER, H., "Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells and their Applications". Proceedings of the Euromech-Colloquium 219. Springer-Verlag, Berlin (1987)
- [FAY 93] FAYE, J.P., "Éléments finis raffinés de coques axisymétriques et de poutres courbes". Thèse Université P. Sabatier, Toulouse, (1993 - à paraître)
- [GER 86] GERMAIN, P., "Mécanique". Ellipse, Paris (1986)
- [GIL 91] GILEWSKI, W. and RADWANSKA, M. "A survey of Finite Element Models for the Analysis of Moderately Thick Shells". Finite Elements in Analysis and Design 9, 1-21 (1991)
- [GUI 92] GUIMARAES, J.E.F. and HEPPLER, G.R., "On Trigonometric Basis Functions for Curved Beam Finite Elements". Computers and Structures, Vol. 45, n°2, 405-413 (1992)
- [HAN 84] HANSEN, J.S. and HEPPLER, G.R., "A Mindlin Shell Element that Satisfies Rigid-Body Requirements". AIAA Journal, Vol. 23, n°2, 288-295 (1984)
- [HRA 84] HRABOK, M.M. and HRUDEY, T.J., "A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements". Computers and Structures, 19(3), 479-495 (1984)
- [JAN 87] JANG, J. and PINSKY, P.M., "An Assumed Covariant Strain Based 9-Node Shell Element". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 2389-2411 (1987)
- [KAR 87] KARDESTUNCER, H., "Finite Element Handbook". Mac Graw Hill (1987)
- [KER 90] KERBER, T., "Revue des Éléments Finis de Coques au Travers des Phénomènes de Verrouillage et de leurs Remèdes". La Recherche Aérospatiale, Vol. 3, 45-76 (1990)
- [NOO 89] NOOR, A.K., BELYTSCHKO, T. and SIMO, J.C., "Analytical and Computational Models of Shells". ASME-CED, Vol. 3 (1989)
- [NOO 90] NOOR, A.K., "Bibliography of Monographs and Surveys on Shells". ASME Applied Mechanics Review, Vol. 43, n° 9, 223-224 (1990)
- [OLI 86] OLIVER, J. and ONATE, E., "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures Using Finite Elements. Part II : Arches, Frames and Axisymmetric Shells". International Journal for Numerical Methods in Engineering
- [POL à paraître] POLIT, O., TOURATIER, M. and LORY, P., "A New Eight Node Quadrilateral Shear Bending Plate Finite Element". International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [REI 85] REISSNER, E., "Reflections on the Theory of Elastic Plates". ASME Applied Mechanics Review, 38, 1453-1464 (1985)
- [TOU 88] TOURATIER, M., "A Refined Theory of Thick Composite Plate". Mechanics Research Communications, Vol. 15 (4), 229-236 (1988)
- [TOU 89] TOURATIER, M., "Un modèle simple et efficace en mécanique des structures composites". C.R. Académie Sciences, Paris, t309, série II, 933-938 (1989)

[TOU 91] TOURATIER, M., "An Efficient Standard Plate Theory". International Journal of Engineering Sciences, Vol. 29, n°8, 901-916 (1991)

[TOU 92a] TOURATIER, M., "A Generalization of Shear Deformation Theories for Axisymmetric Multilayered Shells". International Journal of Solids and Structures, Vol. 29, n°11, 1379-1399 (1992)

[TOU 92b] TOURATIER, M., "A Refined Theory of Laminated Shallow Shells". International Journal of Solids and Structures, Vol. 29, n°11, 1401-1415 (1992)

[YAN 89] YANG, T.Y., KAPANIA, R.K. and SAIGAL, S., "Accurate Rigid-Body Modes Representation for a Nonlinear Curved Thin-Shell Element". AIAA Journal, Vol. 27, n°2, 211-218 (1989)

[YAN 90] YANG, H.T.Y., SAIGAL, S. and LLAW, D.G., "Advances of Thin Shell Finite Elements and some Applications-Version I". Computers and Structures, Vol. 35, n°4, 481-504 (1990)

[ZIE 77] ZIENKIEWICZ, O.C., BAUER, J., MORGAN, K. and ONATE, E., "A simple Element for Axisymmetric Shells with Shear Deformation". International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, n°10, 1545-1558 (1977)

[ZIE 86] ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method". Third Edition Mc Graw-Hill, London (1986)

7. Figures

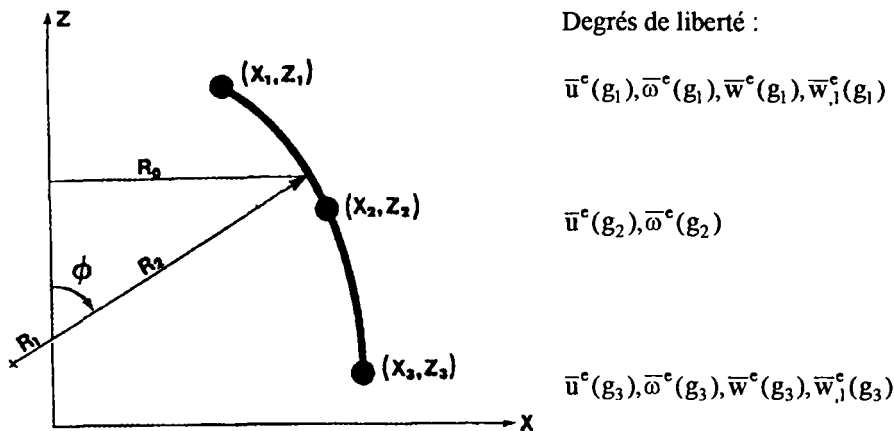
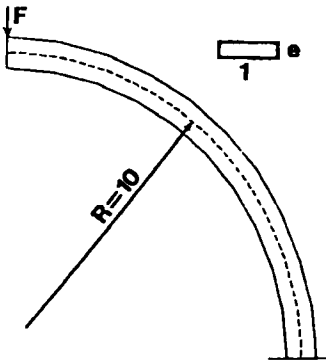


Figure 1. Elément fini de coque axisymétrique



Propriétés matériau :
 Module d'Young $E = 210 \text{ GPa}$
 Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

$R = 10 \text{ m}$; Référence analytique poutres minces
 $F = 1000 \text{ N}$

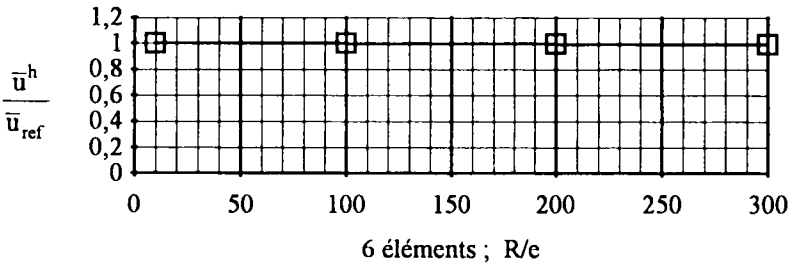


Figure 2. (a) Test de verrouillage poutre courbe

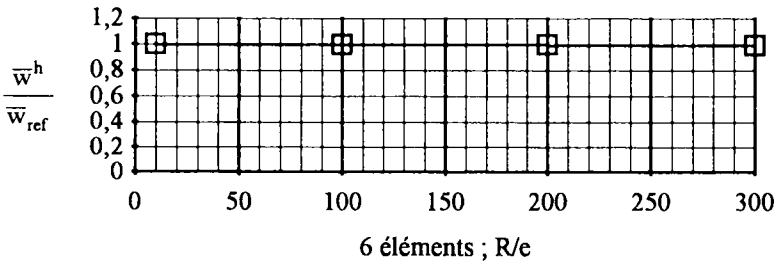
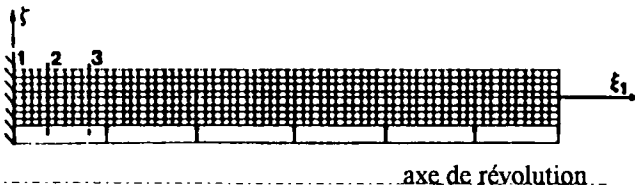


Figure 2. (b) Test de verrouillage poutre courbe



axe de révolution

Propriétés matériau : module d'Young $E = 210 \text{ GPa}$;
 Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
 Pression interne : 1 MPa ; Rayon moyen = 1 m ; longueur $l = 2 \text{ m}$;

Figure 3. La coque cylindrique encastrée-libre considérée

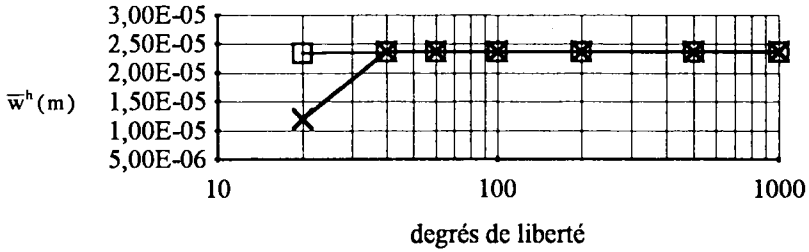


Figure 4. Courbe de convergence du déplacement transversal \bar{w}^h pour une coque cylindrique isotrope encastée-libre sous une pression interne de 1MPa. Sa longueur est $l = 2m$, son rayon moyen $R = 1m$ et son épaisseur $e = 0.2m$.
(\times SAX2 ; \square SIN)

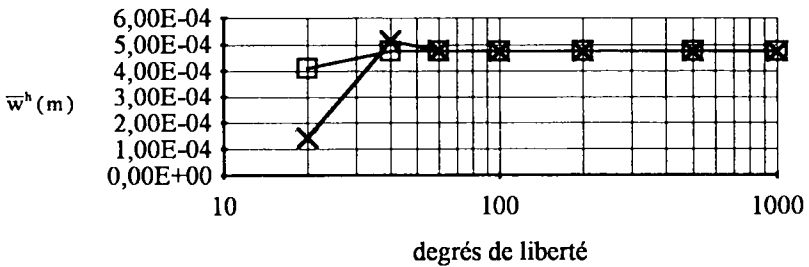


Figure 5. Courbe de convergence du déplacement transversal \bar{w}^h pour une coque cylindrique isotrope encastée-libre sous une pression interne de 1MPa. Sa longueur est $l = 2m$, son rayon moyen $R = 1m$ et son épaisseur $e = 0.01m$.
(\times SAX2 ; \square SIN)

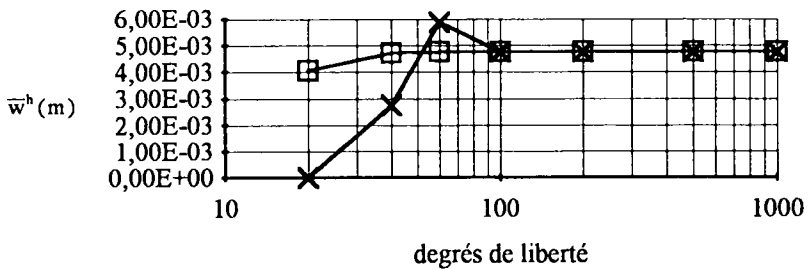


Figure 6. Courbe de convergence du déplacement transversal \bar{w}^h pour une coque cylindrique isotrope encastée-libre sous une pression interne de 1MPa. Sa longueur est $l = 2m$, son rayon moyen $R = 1m$ et son épaisseur $e = 0.001m$.
(\times SAX2 ; \square SIN, courbe avec valeurs numériques sans sens physique)

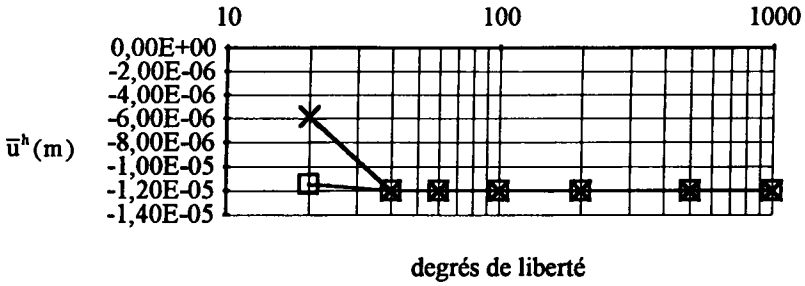


Figure 7. Courbe de convergence du déplacement en membrane \bar{u}^h pour la coque cylindrique isotrope encastree-libre sous pression interne de 1MPa. Sa longueur est $l = 2m$, son rayon moyen $R = 1m$ et son épaisseur $e = 0.2m$. (x SAX2 ; □ SIN)

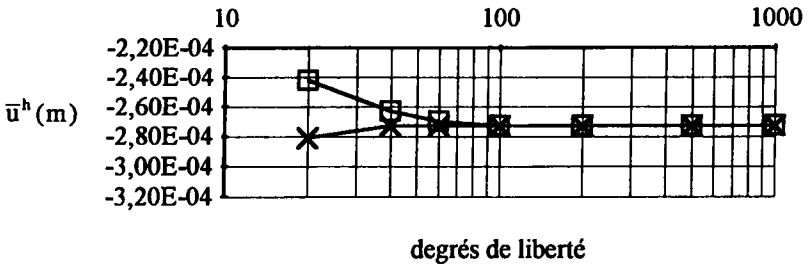


Figure 8. Courbe de convergence du déplacement en membrane \bar{u}^h pour la coque cylindrique isotrope encastree-libre sous pression interne de 1MPa. Sa longueur est $l = 2m$, son rayon moyen $R = 1m$ et son épaisseur $e = 0.01m$. (x SAX2 ; □ SIN)

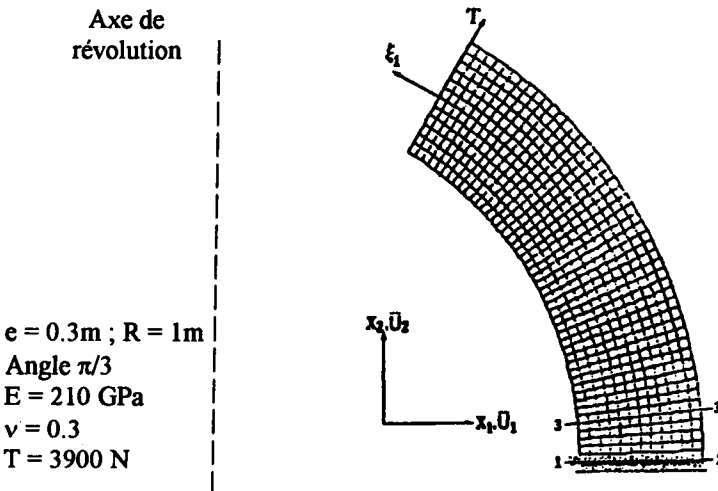


Figure 9. Hémisphère tronquée

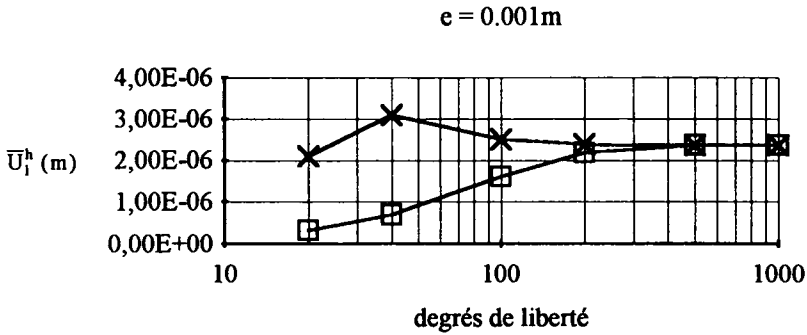


Figure 10. Courbe de convergence du déplacement global \bar{U}_1^h à $\zeta = 0$ et $\xi_1 = \pi / 3$, dans le repère cartésien pour une coque hémisphérique tronquée mince encastrée à sa base inférieure et soumise à une charge concentrée T à son extrémité libre. Le rayon moyen de la coque est $R = 1m$ et son épaisseur $e = 0.001m$.
(\times SAX2 ; \square SIN)

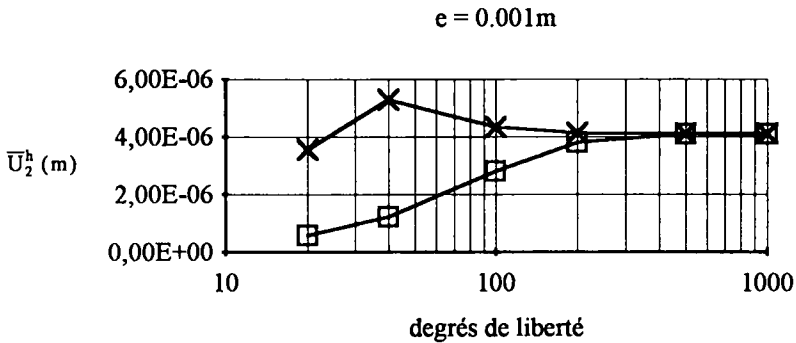


Figure 11. Courbe de convergence du déplacement global \bar{U}_2^h à $\zeta = 0$ et $\xi_1 = \pi / 3$, dans le repère cartésien pour une coque hémisphérique tronquée mince encastrée à sa base inférieure et soumise à une charge concentrée T à son extrémité libre. Le rayon moyen de la coque est $R = 1m$ et son épaisseur $e = 0.001m$.
(\times SAX2 ; \square SIN)

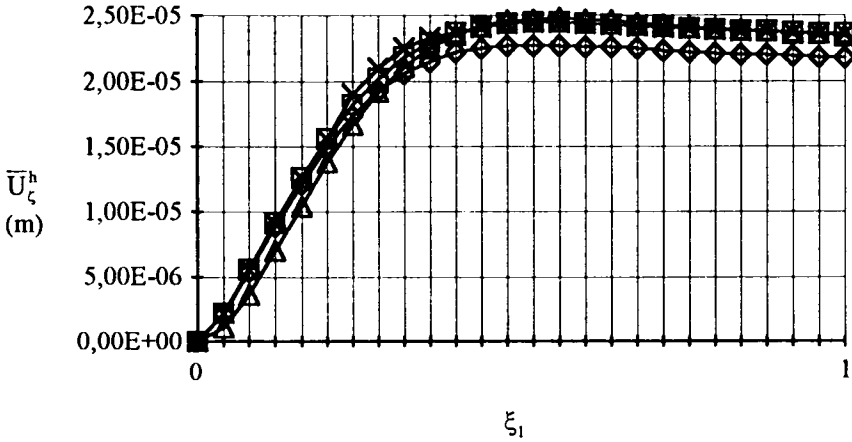


Figure 12. Distribution du déplacement transversal \bar{U}_c^h le long de la surface moyenne pour une coque cylindrique isotrope épaisse encastée-libre sous pression interne, d'épaisseur $e = 0.2m$, voir Fig.3.

(\diamond solution éléments finis de solide 2D ; \square notre élément fini à 3 noeuds ; Δ élément de Kirchhoff-Love à 3 noeuds ; \times élément fini de Reissner-Mindlin d'Abaqus avec un coefficient correcteur de cisaillement égal à 5/6)

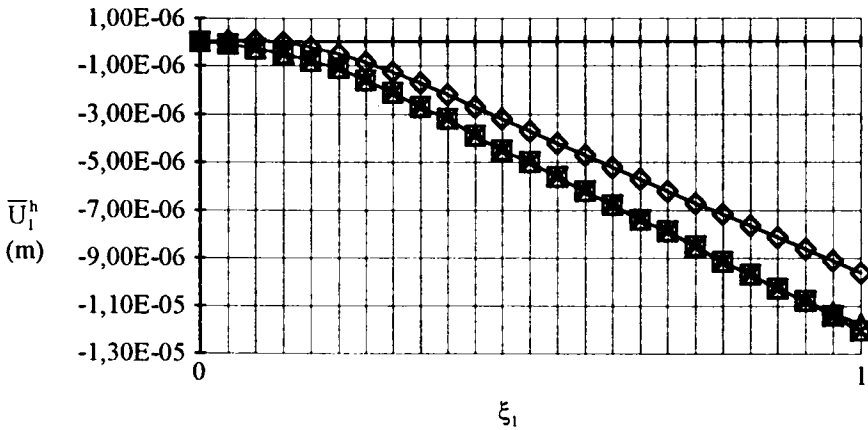


Figure 13. Distribution du déplacement axial \bar{U}_l^h le long de la surface moyenne pour une coque cylindrique isotrope épaisse encastée-libre sous pression interne, d'épaisseur $e = 0.2m$, voir Fig.3.

(\diamond solution éléments finis de solide 2D ; \square notre élément fini à 3 noeuds ; Δ élément de Kirchhoff-Love à 3 noeuds ; \times élément fini de Reissner-Mindlin d'Abaqus avec un coefficient correcteur de cisaillement égal à 5/6)

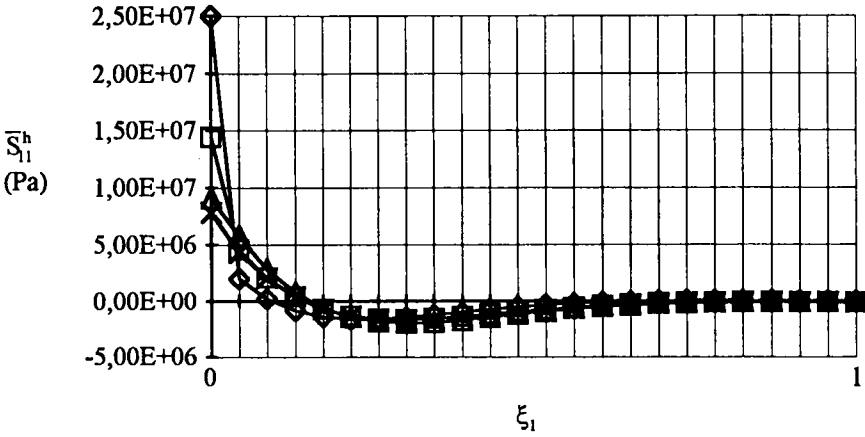


Figure 14. Distribution de la contrainte axiale \bar{S}_{11}^h le long de la surface $\zeta = -e/2$ pour une coque cylindrique isotrope épaisse encastrée-libre sous pression interne, d'épaisseur $e = 0.2m$, voir Fig.3.

(\diamond solution éléments finis de solide 2D ; \square notre élément fini à 3 noeuds ; Δ élément de Kirchhoff-Love à 3 noeuds ; \times élément fini de Reissner-Mindlin d'Abaqus avec un coefficient correcteur de cisaillement égal à 5/6)

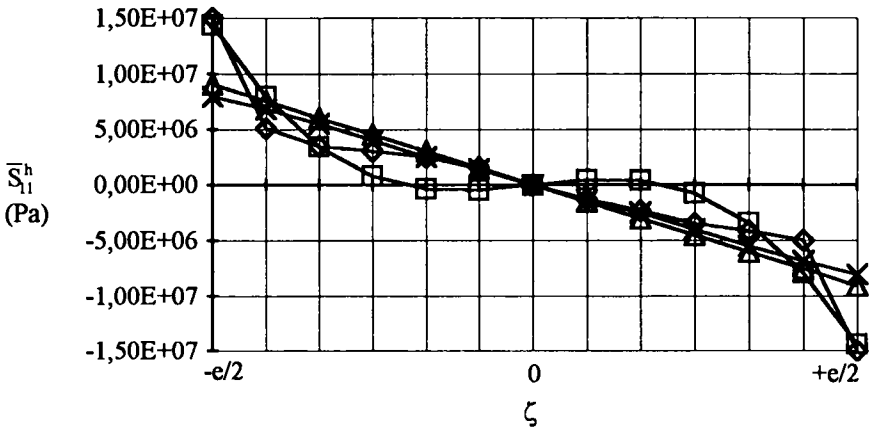


Figure 15. Distribution de la contrainte axiale \bar{S}_{11}^h dans l'épaisseur (section 1) pour une coque cylindrique isotrope épaisse encastrée-libre sous pression interne, d'épaisseur $e = 0.2m$, voir Fig.3.

(\diamond solution éléments finis de solide 2D ; \square notre élément fini à 3 noeuds ; Δ élément de Kirchhoff-Love à 3 noeuds ; \times élément fini de Reissner-Mindlin d'Abaqus avec un coefficient correcteur de cisaillement égal à 5/6)

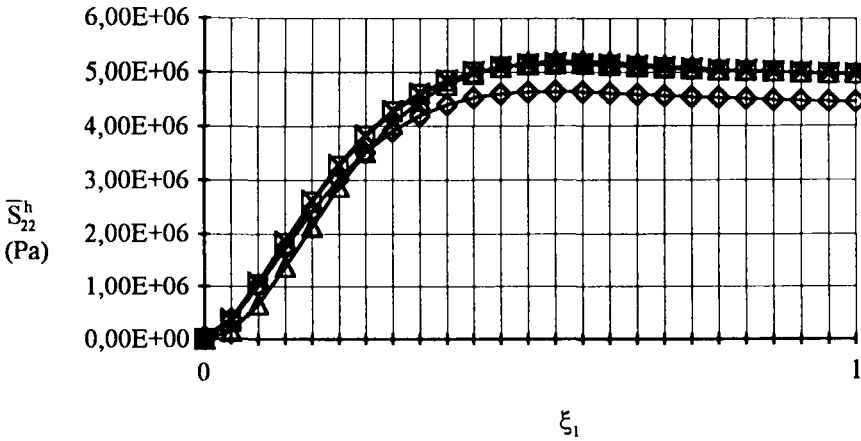


Figure 16. Distribution de la contrainte circonférentielle \bar{S}_{22}^h le long de la surface moyenne pour une coque cylindrique isotrope épaisse encastrée-libre sous pression interne, d'épaisseur $e = 0.2m$, voir Fig.3.

(\diamond solution éléments finis de solide 2D ; \square notre élément fini à 3 noeuds ; Δ élément de Kirchhoff-Love à 3 noeuds ; \times élément fini de Reissner-Mindlin d'Abaqus avec un coefficient correcteur de cisaillement égal à 5/6)

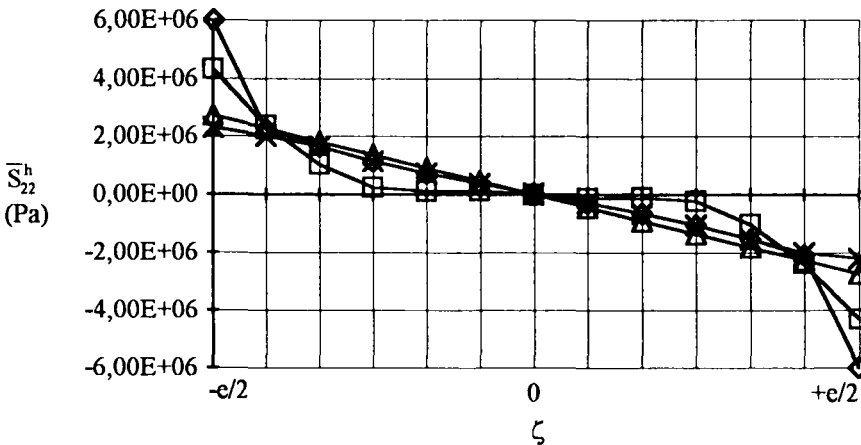


Figure 17. Distribution de la contrainte circonférentielle \bar{S}_{22}^h dans l'épaisseur (section 1) pour une coque cylindrique isotrope épaisse encastrée-libre sous pression interne, d'épaisseur $e = 0.2m$, voir Fig.3.

(\diamond solution éléments finis de solide 2D ; \square notre élément fini à 3 noeuds ; Δ élément de Kirchhoff-Love à 3 noeuds ; \times élément fini de Reissner-Mindlin d'Abaqus avec un coefficient correcteur de cisaillement égal à 5/6)

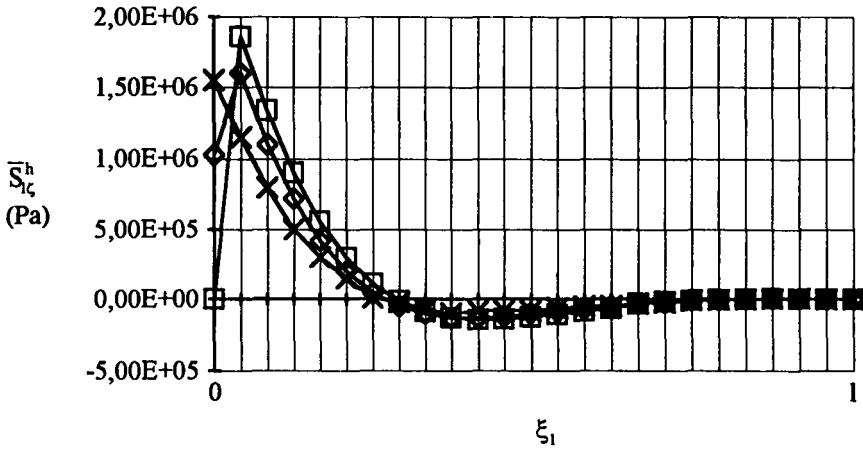


Figure 18. Distribution de la contrainte de cisaillement transversal \bar{S}_c^h le long de la surface moyenne pour une coque cylindrique isotrope épaisse encastrée-libre sous pression interne, d'épaisseur $e = 0.2m$, voir Fig.2.

(◇ solution éléments finis de solide 2D ; □ notre élément fini à 3 noeuds ; Δ élément de Kirchhoff-Love à 3 noeuds ; × élément fini de Reissner-Mindlin d'Abaqus avec un coefficient correcteur de cisaillement égal à 5/6)

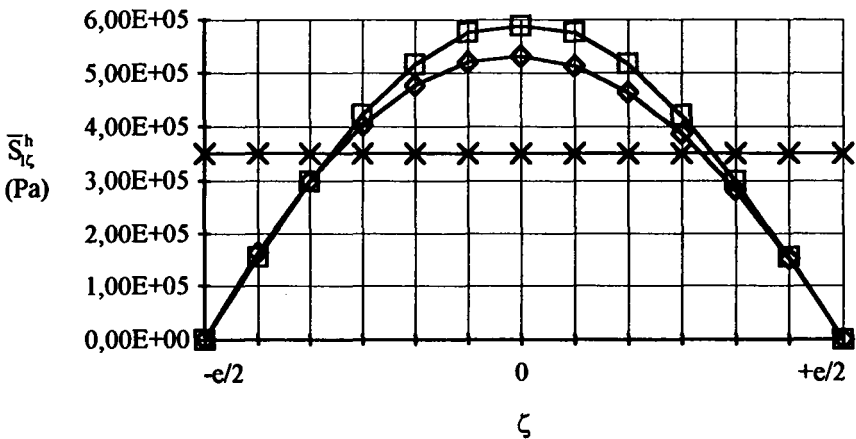


Figure 19. Distribution de la contrainte de cisaillement \bar{S}_c^h dans l'épaisseur (section 3, $\xi_1 = 0.31m$) pour une coque cylindrique isotrope épaisse encastrée-libre sous pression interne, d'épaisseur $e = 0.2m$, voir Fig.3.

(◇ solution éléments finis de solide 2D ; □ notre élément fini à 3 noeuds ; Δ élément de Kirchhoff-Love à 3 noeuds ; × élément fini de Reissner-Mindlin d'Abaqus avec un coefficient correcteur de cisaillement égal à 5/6)

8. Annexes

8.1. Loi de comportement généralisée [21]

$$\mathbf{A} = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{bmatrix} C'_{1111} \frac{L_2 \alpha_1}{\alpha_2 L_1} & C'_{1122} \\ C'_{1122} & C'_{2222} \frac{L_1 \alpha_2}{\alpha_1 L_2} \end{bmatrix} d\zeta$$

$$\mathbf{B} = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{bmatrix} C'_{1111} \zeta \frac{L_2 \alpha_1}{\alpha_2 L_1} & C'_{1122} \zeta \\ C'_{1122} \zeta & C'_{2222} \zeta \frac{L_1 \alpha_2}{\alpha_1 L_2} \end{bmatrix} d\zeta$$

$$\mathbf{D} = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{bmatrix} C'_{1111} \zeta^2 \frac{L_2 \alpha_1}{\alpha_2 L_1} & C'_{1122} \zeta^2 \\ C'_{1122} \zeta^2 & C'_{2222} \zeta^2 \frac{L_1 \alpha_2}{\alpha_1 L_2} \end{bmatrix} d\zeta$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{bmatrix} C'_{1111} f(\zeta) \frac{L_2 \alpha_1}{\alpha_2 L_1} & C'_{1122} f(\zeta) \\ C'_{1122} f(\zeta) & C'_{2222} f(\zeta) \frac{L_1 \alpha_2}{\alpha_1 L_2} \end{bmatrix} d\zeta$$

$$\mathbf{d} = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{bmatrix} C'_{1111} \zeta f(\zeta) \frac{L_2 \alpha_1}{\alpha_2 L_1} & C'_{1122} \zeta f(\zeta) \\ C'_{1122} \zeta f(\zeta) & C'_{2222} \zeta f(\zeta) \frac{L_1 \alpha_2}{\alpha_1 L_2} \end{bmatrix} d\zeta$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{bmatrix} C'_{1111} f^2(\zeta) \frac{L_2 \alpha_1}{\alpha_2 L_1} & C'_{1122} f^2(\zeta) \\ C'_{1122} f^2(\zeta) & C'_{2222} f^2(\zeta) \frac{L_1 \alpha_2}{\alpha_1 L_2} \end{bmatrix} d\zeta$$

$$\bar{C}'_{\kappa} = \int_{-e/2}^{+e/2} C'_{1\kappa 1\kappa} \left[f'(\zeta) - f(\zeta) \frac{\alpha_1}{L_1 R_1} \right]^2 \frac{L_1 L_2}{\alpha_1 \alpha_2} d\zeta$$

8.2. Fonctions d'interpolation

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi); N_2(\xi) = 1-\xi^2; N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$$

$$H_1^0(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi); H_1^1(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(2+\xi)J$$

$$H_2^0(\xi) = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi); H_2^1(\xi) = \frac{1}{4}(-1+\xi^2)(1+\xi)J$$

$$J = \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi}$$

8.3. Considérations géométriques (voir aussi, [ZIE 86])

Un point du méridien est représenté dans un repère cartésien par ses coordonnées $X(\xi)$ et $Z(\xi)$. Ainsi, les interpolations des positions des noeuds sont :

$$X(\xi) = N_1(\xi)X_1 + N_2(\xi)X_2 + N_3(\xi)X_3 ;$$

$$Z(\xi) = N_1(\xi)Z_1 + N_2(\xi)Z_2 + N_3(\xi)Z_3 ;$$

voir Figure 20.

Nous avons :

$$\alpha_1 = 1 \text{ et } \alpha_2 = R_0.$$

De plus, le rayon de courbure principal R_1 est :

$$R_1 = (X_{,\xi}^2 + Z_{,\xi}^2)^{3/2} / (X_{,\xi} Z_{,\xi\xi} - Z_{,\xi} X_{,\xi\xi}).$$

Puisque $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = R_0$, nous avons alors :

$$X(\xi) = R_0(\xi)$$

et

$$R_2 = R_0(\xi) / \sin\phi(\xi).$$

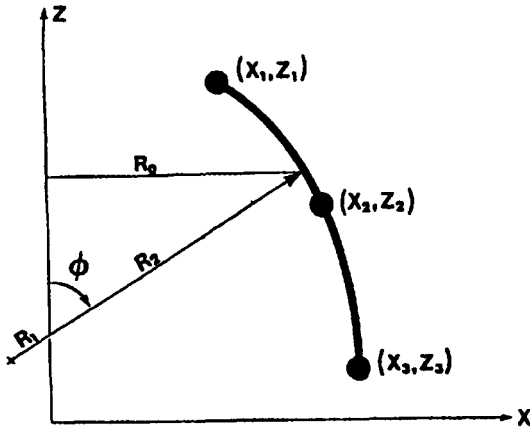


Figure 20.

8.4. Matrices B_ϵ , B_κ , B_x , B_γ

$$B_\epsilon = \begin{bmatrix} N_{1,l} & 0 & H_1^0/R_1 & H_1^1/R_1 & N_{2,l} & \\ R_{0,l}N_1/R_0 & 0 & H_1^0/R_2 & H_1^1/R_2 & R_{0,l}N_2/R_0 & \dots \\ & & & & & \\ & & & & 0 & N_{3,l} & 0 & H_2^0/R_1 & H_2^1/R_1 \\ \dots & & & & 0 & R_{0,l}N_3/R_0 & 0 & H_2^0/R_2 & H_2^1/R_2 \end{bmatrix}$$

$$B_\kappa = \begin{bmatrix} -\frac{R_{1,l}}{R_1^2}N_1 + \frac{N_{1,l}}{R_1} & 0 & -H_{1,l}^0 & -H_{1,l}^1 & -\frac{R_{1,l}}{R_1^2}N_2 + \frac{N_{2,l}}{R_1} & \dots \\ \frac{R_{0,l}}{R_0} \frac{N_1}{R_1} & 0 & -\frac{R_{0,l}}{R_0}H_{1,l}^0 & -\frac{R_{0,l}}{R_0}H_{1,l}^1 & \frac{R_{0,l}}{R_0} \frac{N_2}{R_1} & \dots \\ & & & & & \\ & & & & 0 & -\frac{R_{1,l}}{R_1^2}N_3 + \frac{N_{3,l}}{R_1} & 0 & -H_{2,l}^0 & -H_{2,l}^1 \\ \dots & & & & 0 & \frac{R_{0,l}}{R_0} \frac{N_3}{R_1} & 0 & -\frac{R_{0,l}}{R_0}H_{2,l}^0 & -\frac{R_{0,l}}{R_0}H_{2,l}^1 \end{bmatrix}$$

e=0.2m	Nombre de degrés de liberté						
$10^5 \bar{w}^h$ (m)	20	40	60	100	200	400	1000
SAX2	1.2008	2.3652	2.3649	2.3648	2.3647	2.3647	2.3647
SIN	2.3251	2.3551	2.3555	2.3557	2.3558	2.3559	2.3559

Table de valeurs numériques pour les courbes de convergence du déplacement transversal \bar{w}^h , Figure 4, pour la coque cylindrique isotrope encastrée-libre.

e=0.01m	Nombre de degrés de liberté						
$10^4 \bar{w}^h$ (m)	20	40	60	100	200	400	1000
SAX2	1.4350	5.1268	4.7643	4.7619	4.7619	4.7619	4.7619
SIN	4.0873	4.7454	4.7619	4.7619	4.7619	4.7619	4.7619

Table de valeurs numériques pour les courbes de convergence du déplacement transversal \bar{w}^h , Figure 5, pour la coque cylindrique isotrope encastrée-libre.

e=0.001m	Nombre de degrés de liberté						
$10^3 \bar{w}^h$ (m)	20	40	60	100	200	400	1000
SAX2	0.0179	2.7484	5.8702	4.7565	4.7619	4.7619	4.7619
SIN	4.0532	4.7032	4.7575	4.7619	4.7619	4.7619	4.7619

Table de valeurs numériques pour les courbes de convergence du déplacement transversal \bar{w}^h , Figure 6, pour la coque cylindrique isotrope encastrée-libre. (Valeurs pour cette table sans sens physique)

e=0.2m	Nombre de degrés de liberté						
$10^5 \bar{u}^h$ (m)	20	40	60	100	200	400	1000
SAX2	-5.7523	-1.2099	-1.2099	-1.2099	-1.2099	-1.2099	-1.2099
SIN	-1.1438	-1.1888	-1.1961	-1.2000	-1.2022	-1.2029	-1.2029

Table de valeurs numériques pour les courbes de convergence du déplacement en membrane \bar{u}^h , Figure 7, pour la coque cylindrique isotrope encastrée-libre.

e=0.01m	Nombre de degrés de liberté						
$10^4 \bar{u}^h$ (m)	20	40	60	100	200	400	1000
SAX2	-2.8088	-2.7480	-2.7469	-2.7468	-2.7468	-2.7468	-2.7468
SIN	-2.4391	-2.6390	-2.6982	-2.7328	-2.7452	-2.7465	-2.7465

Table de valeurs numériques pour les courbes de convergence du déplacement en membrane \bar{u}^h , Figure 8, pour la coque cylindrique isotrope encastrée-libre.

e=0.001m	Nombre de degrés de liberté					
$10^6 \bar{U}_1^h$ (m)	20	40	100	200	500	1000
SAX2	2.0996	3.0901	2.5090	2.3832	2.3667	2.3632
SIN	0.3272	0.7021	1.6123	2.1855	2.3636	2.3678

Table de valeurs numériques pour les courbes de convergence du déplacement \bar{U}_1^h global, Figure 10, pour la coque hémisphérique tronquée.

e=0.001m	Nombre de degrés de liberté					
$10^6 \bar{U}_2^h$ (m)	20	40	100	200	500	1000
SAX2	3.5691	5.2955	4.3508	4.1354	4.1077	4.0987
SIN	0.5787	1.2261	2.7990	3.7916	4.0891	4.0872

Table de valeurs numériques pour les courbes de convergence du déplacement \bar{U}_2^h global, Figure 11, pour la coque hémisphérique tronquée.

e=0.2m	ξ_1			
$10^5 \bar{U}_\zeta^h$ (m)	$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = 1/4$	$\xi_1 = 1/2$	$\xi_1 = 1$
2D	0.	1.7422	2.2698	2.1750
SIN	0.	1.8153	2.4439	2.3559
KL	0.	1.7400	2.4627	2.3462
SAX2	0.	1.8567	2.4536	2.3647

Table de valeurs numériques de la distribution du déplacement transversal \bar{U}_ζ^h , pour une coque cylindrique isotrope encastrée-libre, Figure 12.

e=0.2m	ξ_1			
$10^5 \bar{U}_1^h$ (m)	$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = 1/4$	$\xi_1 = 1/2$	$\xi_1 = 1$
2D	0.	-0.0859	-0.3675	-0.9569
SIN	0.	-0.1350	-0.4734	-1.2029
KL	0.	-0.1671	-0.4432	-1.1760
SAX2	0.	-0.1379	-0.4929	-1.2099

Table de valeurs numériques pour la distribution du déplacement axial \bar{U}_1^h , pour une coque cylindrique isotrope encastrée-libre, Figure 13.

e=0.2m	ξ_1			
$10^{-7}\bar{S}_{11}^h$ (Pa)	$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = 1/4$	$\xi_1 = 1/2$	$\xi_1 = 1$
2D	∞	-0.1554	-0.0488	0.
SIN	1.4415	-0.1683	-0.0695	0.
KL	0.9060	-0.1946	-0.0824	0.
SAX2	0.7630	-0.1463	-0.0545	0.

Table de valeurs numériques pour la distribution de la contrainte axiale \bar{S}_{11}^h , Figure 14, pour une coque cylindrique isotrope encastree-libre.

e=0.2m	ζ ; section 1				
$10^{-7}\bar{S}_{11}^h$ (Pa)	$\zeta = -e/2$	$\zeta = -e/4$	$\zeta = 0$	$\zeta = +e/4$	$\zeta = +e/2$
2D	∞	2.6660	0.0015	-2.3964	∞
SIN	1.4415	0.0798	0.	-0.0776	-1.4423
KL	0.9064	0.4537	0.	-0.4558	-0.9056
SAX2	0.7630	0.3185	0.	-0.3185	-0.7630

Table de valeurs numériques pour la distribution sur l'épaisseur de la contrainte axiale \bar{S}_{11}^h , à la section 1, Figure 15, pour une coque cylindrique isotrope encastree-libre.

e=0.2m	ξ_1			
$10^{-6}\bar{S}_{22}^h$ (Pa)	$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = 1/4$	$\xi_1 = 1/2$	$\xi_1 = 1$
2D	0.0412	3.5098	4.6332	4.4396
SIN	0.	3.8120	5.1322	4.9512
KL	0.	3.5096	5.1898	4.9323
SAX2	0.	3.8382	5.1491	4.9659

Table de valeurs numériques pour la distribution de la contrainte circonferentielle \bar{S}_{22}^h , Figure 16, pour une coque cylindrique isotrope encastree-libre.

e=0.2m	ζ ; section 1				
$10^{-6} \bar{S}_{22}^h$ (Pa)	$\zeta = -e/2$	$\zeta = -e/4$	$\zeta = 0$	$\zeta = +e/4$	$\zeta = +e/2$
2D	∞	1.1436	0.0412	-1.0477	∞
SIN	4.3224	0.2346	0.	-0.2330	-4.3217
KL	2.3078	1.1435	0.	-1.0489	-2.2033
SAX2	2.2911	1.1464	0.0018	-1.1428	-2.2875

Table de valeurs numériques, distribution sur l'épaisseur de la contrainte circonférentielle \bar{S}_{22}^h , à la section 1, Figure 17, pour une coque cylindrique isotrope encastrée-libre.

e=0.2m	ξ_1 (m)			
$10^{-6} \bar{S}_{1\zeta}^h$ (Pa)	$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = 0.0417$	$\xi_1 = 0.0833$	$\xi_1 = 0.1250$
2D	1.0293	1.5800	1.5637	1.3460
SIN	0.	1.9309	1.8619	1.5316
KL	---	---	---	---
SAX2	1.5504	1.3388	1.0656	0.9808
$10^{-6} \bar{S}_{1\zeta}^h$ (Pa)	$\xi_1 = 0.2083$	$\xi_1 = 1/4$	$\xi_1 = 1/2$	$\xi_1 = 1$
2D	0.9089	0.0471	-0.1043	0.
SIN	1.0582	0.0753	-0.1149	0.
KL	---	---	---	---
SAX2	0.6778	0.0508	-0.0616	0.

Table de valeurs numériques pour la distribution de la contrainte de cisaillement $\bar{S}_{1\zeta}^h$, Figure 18, pour une coque cylindrique isotrope encastrée-libre.

e=0.2m	ζ ; section 3				
$10^{-5} \bar{S}_{1\zeta}^h$ (Pa)	$\zeta = -e/2$	$\zeta = -e/4$	$\zeta = 0$	$\zeta = +e/4$	$\zeta = +e/2$
2D	0.	4.0301	5.3122	3.8789	0.
SIN	0.	4.2235	5.8761	4.2116	0.
KL	---	---	---	---	---
SAX2	3.5018	3.5018	3.5018	3.5018	3.5018

Table de valeurs numériques pour la distribution sur l'épaisseur de la contrainte de cisaillement $\bar{S}_{1\zeta}^h$, à la section 3, Figure 19, pour une coque cylindrique isotrope encastrée-libre.