

---

# Application de la MEF pour l'évaluation et l'étude du renforcement des ponts du type dalle de béton sur poutres d'acier

Mario Fafard\* — Jian Jun Lin\* — Bruno Massicotte \*\*  
Denis Beaulieu\*

\*Département de génie civil  
Université Laval  
Québec, Québec  
Canada G1K 7P4

\*\*Département de génie civil  
École Polytechnique de Montréal  
Montréal, Québec  
Canada H3C 3A7

---

**RÉSUMÉ.** Afin de prédire la capacité ultime de ponts constitués d'une dalle de béton sur des poutres d'acier, nous présentons un modèle d'éléments finis qui permet de modéliser la dalle de béton, les poutres d'acier, et l'interface acier-béton. Dans les deux premiers cas, nous utilisons un élément de coque triangulaire à six noeuds (DLTP). Une loi de comportement hypo-élastique qui tient compte de la fissuration et du raidissement en tension est utilisée pour modéliser le béton. Pour l'acier, nous utilisons un modèle élastique-parfaitement plastique. L'interface béton-acier est représenté par un élément de contact avec une loi de frottement avec dégradation des surfaces, ou par un élément de goujon lorsque l'action composite est totale. Le modèle a été validé avec des tests expérimentaux. Dans le but d'étudier une technique de renforcement utilisant des boulons post-contraints, une étude paramétrique a été effectuée.

**ABSTRACT.** In order to predict the ultimate capacity of bridges composed of a concrete slab laying on steel girders, we present a finite element model which allows the modeling of a concrete slab, steel girders and the steel-concrete interface. In the first two cases, we use a six-node (DLTP) triangular shell element. For concrete, a hypoelastic constitutive law taking into account cracking and the tension stiffening effect is used. For steel, we use an elastic-perfectly plastic model. The concrete-steel interface is represented by a contact element with a friction law which either includes a surface deterioration model, or by a stud element when a composite action is mobilized. The model was validated with experimental tests. In order to study a strengthening technique using post-stressed bolts, a parametric study was carried out.

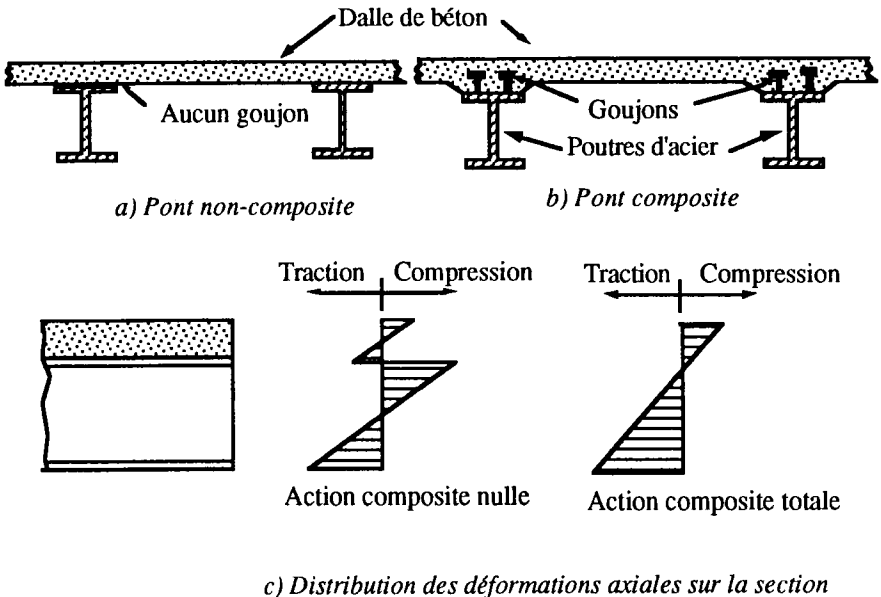
*MOTS-CLÉS : Capacité ultime, contact, coque, déversement, efficacité du renforcement, éléments finis, loi constitutive, pont non-composite, renforcement*

*KEYWORDS : Constitutive law, contact, finite element, lateral buckling, non composite bridge, shell, strengthening efficiency, strengthening technique, ultimate capacity*

## 1. Introduction

En Amérique du Nord, il s'est construit dans les années 50 des ponts de courte et moyenne portées où la dalle de béton repose simplement sur des poutres d'acier sans aucune liaison mécanique entre ces deux éléments (Fig. 1a). Dû à ce mode de construction, et dans le cas hypothétique où il n'y a que des efforts de flexion, la dalle de béton et la poutre d'acier résistent aux efforts selon leur rigidité flexionnelle relative (Fig. 1c). Ce mode de construction limite donc la capacité portante de ce type de ponts par rapport à un pont où une action composite totale peut être développée (Fig. 1b). En fait, les ponts non-composites possèdent une réserve de résistance qui pourrait être mobilisée si ces ponts devenaient composites.

Afin de tenir compte de l'augmentation du volume du trafic routier et des charges légales circulant sur les routes et autoroutes, les charges de conception actuelles sont très différentes des charges de conception des années 50. À titre d'exemple, au Québec, le poids du camion normalisé utilisé aujourd'hui est de 660 kN alors qu'il était de 215 kN dans les années 50.



**Figure 1.** Pont à section mixte acier-béton

Pour tenir compte de cette réalité, les ingénieurs doivent évaluer la capacité portante des ponts construits il y a une quarantaine d'années, afin de vérifier s'ils peuvent supporter le trafic routier actuel. Deux décisions peuvent être prises dès que l'ingénieur a identifié un pont trop faible soit limiter le tonnage admissible sur celui-ci ou encore, renforcer le pont afin d'augmenter sa capacité portante.

La détermination de la capacité ultime d'un pont se base sur le calcul aux états limites. Cette méthode nécessite la connaissance de la charge qui amène la rupture du pont. Les méthodes de calcul utilisées actuellement se basent sur des modèles simplifiés, le plus souvent bidimensionnels, ce qui amènent une sous-estimation de la capacité réelle.

Cet article présente un modèle tridimensionnel non linéaire basé sur la méthode des éléments finis pour la détermination de la capacité ultime des ponts existants. De même, nous présentons une technique de renforcement simple qui permet d'augmenter la capacité ultime des ponts non composites. Cette technique consiste à placer localement des boulons post-contraints au travers de la dalle de béton et de l'aile supérieure des poutres d'acier afin de mobiliser le frottement dalle-poutre d'acier pour développer une action composite partielle.

La dalle de béton et les poutres d'acier sont discrétisées avec des éléments de coque plate triangulaire à six noeuds DLTP [DHA 86], [FAF 89]. Cet élément est construit par la superposition d'un élément de plaque mince DKTP (élément de type Kirchhoff discret [BAT 90]) et d'un élément de membrane LST (Linear Strain Triangle).

Nous utilisons une formulation lagrangienne actualisée pour tenir compte des non-linéarités géométriques. Le modèle constitutif pour représenter le comportement du béton est du type hypo-élastique qui tient compte de la fissuration, du raidissement en tension (tension stiffening) et du radoucissement des contraintes (strain softening) dans la direction orthogonale aux fissures [MAS 90a]. L'armature est représentée par des couches d'acier d'épaisseur équivalente ayant un comportement unidirectionnel. La loi constitutive de l'acier d'armature et des poutres d'acier est basée sur le modèle classique élastique-parfaitement plastique.

Afin de tenir compte de l'interface acier-béton, nous utilisons un élément de contact en petits déplacements relatifs (élément à deux noeuds). L'hypothèse des petits déplacements relatifs est justifiée par le fait que le déplacement relatif entre deux points initialement vis-à-vis demeure petit tout au long du processus de chargement.

Il a été démontré expérimentalement [LAB 91] [RAB 88] que la loi classique de Coulomb pour représenter le frottement est inefficace pour simuler le comportement de l'interface acier-béton lorsque le glissement est amorcé; il y a une détérioration de la surface entraînant une perte de résistance. Afin de tenir compte de ce phénomène, le frottement a été modélisée avec une loi du type dégradation [CUR 84] [PLE 85] qui tient compte du facteur irréversible du frottement, de la contrainte normale, du niveau de déplacement relatif, de la contrainte tangentielle et d'un facteur d'ajustement qui doit être obtenu expérimentalement.

Dans le cas où un pont a été construit avec des goujons pour obtenir une action composite totale, ceux-ci sont modélisés à l'aide d'un élément de cisaillement où la loi de comportement est basée sur la relation cisaillement-déplacement proposée par [YAM 68].

Afin de valider le modèle numérique, des comparaisons seront effectuées avec des tests expérimentaux. Nous utiliserons les résultats publiés par [YAM 72] sur une poutre continue à deux portées. Cette poutre a été construite avec des connecteurs de cisaillement permettant de développer une action composite totale. Cette comparaison permettra de valider le modèle sans élément de contact.

Nous présenterons une comparaison avec des tests effectués à l'Université Laval [DIO 91] sur un pont sans connecteurs de cisaillement (non-composite) et sur un pont initialement non-composite et renforcé à l'aide de la technique des boulons post-contraints. Ce dernier test nous permettra, en outre, de démontrer l'importance d'utiliser un modèle de frottement qui tient compte de la dégradation des surfaces.

Étant donné que la technique de renforcement proposée de ponts existants est peu connue, nous terminons l'article par la présentation d'une étude paramétrique qui permet de dégager quelques tendances pour établir un choix optimal du nombre de boulons et du niveau de précontrainte.

## 2. Forme variationnelle en description lagrangienne actualisée

### 2.1 Équations générales

La forme variationnelle permettant d'établir l'équilibre de la structure peut être écrite sous la forme suivante :

$$W(\underline{u}, \underline{s}, \lambda) = W_a(\underline{u}, \underline{s}) + W_b(\underline{u}, \underline{s}) + W_I(\underline{u}, \underline{s}) - W_{ext}(\lambda) \quad [1]$$

où  $W_a$  et  $W_b$  sont les formes variationnelles liées au travail virtuel interne des poutres d'acier et de la dalle de béton respectivement,  $W_I$  est la forme variationnelle reliée au travail virtuel à l'interface acier-béton qui permet le couplage entre  $W_a$  et  $W_b$ , et  $W_{ext}$  est le travail virtuel externe. Les vecteurs  $\underline{u}$  et  $\underline{s}$  sont les déplacements et les contraintes dans chaque partie de la structure et  $\lambda$  est un facteur de charge qui multiplie un chargement de référence  $\{F\}$  appliqué sur la structure :

$$W_{ext} = \lambda \langle U^* \rangle \{F\} \quad [2]$$

Dans l'équation [2],  $\langle U^* \rangle$  représente les déplacements virtuels de la structure entière.

Étant donné les non-linéarités présentes dans la modélisation du comportement des ponts, nous utilisons le processus itératif de résolution du type Newton-Raphson pour obtenir la solution. Correspondant à la forme variationnelle [1], nous pouvons lui associer la variation de  $W$  qui permet de générer la matrice tangente :

$$\Delta W = \Delta W_a(\underline{u}, \Delta \underline{u}, \underline{s}) + \Delta W_b(\underline{u}, \Delta \underline{u}, \underline{s}) + \Delta W_I(\underline{u}, \Delta \underline{u}, \underline{s}) \quad [3]$$

Que ce soit pour la dalle de béton ou pour les poutres d'acier, le travail virtuel interne s'écrit pour les corps orientés dans la configuration courante et dans un système orthogonal local (Fig. 2) [FAF 89] :

$$W = \int_V \text{tr}([D^*]_i [\sigma_i]) dV \quad [4]$$

où  $[\sigma_t]$  est le tenseur de contraintes de Cauchy et  $[D^*_i]$  est le tenseur virtuel de déformation pour un champ de déplacement virtuel  $\langle u^* \ v^* \ w^* \rangle$ . Le choix d'un système de coordonnées orientées permet d'utiliser un élément fini simple en superposant les effets de membrane et de flexion.

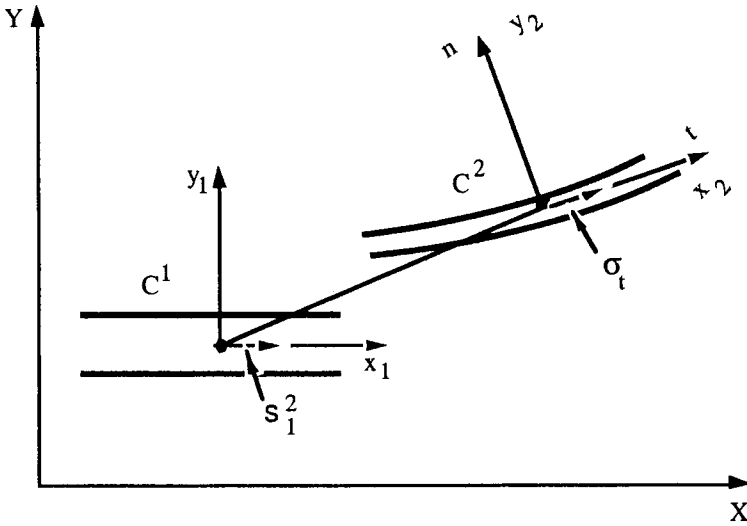


Figure 2. Repère co-rotationnel

Afin d'introduire le point de vue algorithmique, nous indiquerons par la suite la configuration connue  $C^1$  avec l'historique des contraintes et les paramètres liés aux lois constitutives, et par  $C^2$  la configuration recherchée ou une approximation de celle-ci. Ainsi, l'équation [4] peut se réécrire en formulation lagrangienne actualisée à chaque pas de chargement (FLAP) :

$$W_i^2 = \int_{V^1} \text{tr}([E_i^*][S_i^2]) dV \quad [5]$$

où  $[S_i^2]$  est le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff (PK2) dans  $C^2$  par rapport à  $C^1$  et  $[E_i^*]$  le tenseur de déformation virtuel de Green-Lagrange :

$$[S_i^2] = (\det[F])[F]^{-1}[\sigma^2]F^{-T} \quad [6]$$

$$[F] = I + \left[ \frac{\partial \underline{u}_i^2}{\partial \underline{x}_i} \right] = [I] + [A] \quad [7]$$

$$[E_1^*] = [F]^T [D^*] [F] = \frac{1}{2} \left( [F^*]^T [F] + [F]^T [F^*] \right) \tag{8}$$

$$\langle u \rangle^2 = \langle u_1^2 \ v_1^2 \ w_1^2 \rangle ; \langle x \rangle = \langle x_1 \ y_1 \ z_1 \rangle$$

avec  $[F^*] = [A^*]$  et  $u = u^*$  dans la matrice  $[A]$  de l'équation [7]. Sous l'hypothèse des petites déformations, nous pouvons facilement démontrer que :

$$[F] = [R] [U] \approx [R] ; \det [F] \approx 1 \tag{9}$$

$$[S_1^2] = [\sigma_1^2] = [R]^T [\sigma^2] [R] \tag{10}$$

où  $[R]$  est la matrice de rotation entre  $C^1$  et  $C^2$ . En d'autres mots, lorsque l'on attache un référentiel localement à un domaine, les contraintes de Cauchy se confondent aux contraintes de PK2 localement (repère co-rotationnel). Ceci est la base de la théorie des corps orientés en FLAP. Il est facile d'évaluer la matrice  $[R]$  pour un élément triangulaire plat. Cette matrice de transformation est fonction des coordonnées  $\underline{x}_1$  de la structure.

Les autres quantités apparaissant dans [5] s'obtiennent par les relations suivantes :

$$[S_1^2] = [\sigma_1^2] + [S_1^{2-1}] ; \{S_1^{2-1}\} = [H^{ep}] \{E_1^{2-1}\} \\ \{E_1^{2-1}\} = \frac{1}{2} \left( [F]^T [F] - 1 \right) \tag{11}$$

où  $[F]$  est évalué avec les déplacements  $u^2$  calculés entre  $C^1$  et  $C^2$ .

Correspondant à [5] nous pouvons obtenir la variation de  $W$  (pour  $W_a$  et  $W_b$ ) :

$$\Delta W = \int_{V^1} \text{tr} \left( [\Delta E_1^*] [S_1^2] \right) dv + \int_{V^1} \text{tr} \left( [E_1^*] [\Delta S] \right) dV^1 \tag{12}$$

$$[\Delta E_1^*] = \frac{1}{2} \left( [F^*]^T [\Delta F] + [\Delta F]^T [F^*] \right) \\ \{\Delta S\} = [H^{ep}] \{\Delta E\} ; [\Delta E] = \frac{1}{2} \left( [\Delta F]^T [F] + [F]^T [\Delta F] \right) \tag{13}$$

Finalement, le travail virtuel externe s'écrit pour un chargement indépendant des déplacements où  $\{f_v\}$  et  $\{f_s\}$  sont respectivement les charges volumique et de contour :

$$W_{\text{ext}} = \int_{V^1} \langle u^* \rangle \langle f_{v1}^2 \rangle dv + \int_{S_1} \langle u^* \rangle \langle f_{s1}^2 \rangle ds \tag{14}$$

## 2.2 Forme variationnelle pour les coques plates

Il est possible dans le cas des corps minces d'utiliser le tenseur de Green-Lagrange pour la partie membrane et la théorie linéaire, et le tenseur linéaire des déformations correspondant pour la flexion. L'hypothèse sous-jacente permettant d'utiliser une forme linéaire pour la flexion en grandes rotations est que la flexion prend place après les mouvements de corps rigide (ou inversement) et que les rotations associées à la flexion sont petites [FRE 78] [AKO 87] [GUO 87] [FAF 87]. Ceci permet d'utiliser le même champ de déformation qu'en flexion linéaire géométrique. La matrice de rotation [R] permet de tenir compte des grandes rotations entre  $C^1$  et  $C^2$ .

Ainsi, les déformations entre  $C^1$  et  $C^2$  s'écrivent :

$$\{E_I^{2-1}\} = \{e_m\} + z\{\chi\} \quad [15]$$

$$\{e_m\} = \begin{Bmatrix} u_{,x_1} \\ v_{,y_1} \\ u_{,y_1} + v_{,x_1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} [(u_{,x_1})^2 + (v_{,x_1})^2 + (w_{,x_1})^2] \\ \frac{1}{2} [(u_{,y_1})^2 + (v_{,y_1})^2 + (w_{,y_1})^2] \\ u_{,x_1}u_{,y_1} + v_{,x_1}v_{,y_1} + w_{,x_1}w_{,y_1} \end{Bmatrix} \quad [16]$$

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x_1} \\ \beta_{y,y_1} \\ \beta_{x,y_1} + \beta_{y,x_1} \end{Bmatrix} \quad [17]$$

La matrice de transformation est calculée avec les dernières coordonnées actualisées (correspondant à  $C^1$ ) permettant le passage du référentiel global au référentiel corotationnel. Les tenseurs définis en [13] peuvent facilement être obtenus de [15], [16] et [17].

## 2.3 Forme variationnelle de l'interface

La forme variationnelle et sa variation associée à l'interface sont :

$$W_I = \int_{\Gamma^1} \langle \gamma \rangle \{L(\gamma) + C_0\} d\Gamma \quad [18]$$

$$\Delta W_I = \int_{\Gamma^1} \langle \gamma \rangle \{\Delta L\} d\Gamma \quad [19]$$

$\langle \gamma \rangle = \langle dn \, dt \rangle = \langle d_b \rangle - \langle d_a \rangle$  est le déplacement relatif dans le repère local entre deux points situés à l'interface béton-acier,  $L$  est un opérateur linéaire et  $C_0$  sont les

forces externes appliquées à l'interface (considérée nulle par la suite). Dans le cas du contact en petit déplacement,  $\underline{L}$  s'écrit :

$$\{L\} = [\kappa] \{\gamma\} \tag{20}$$

où  $[\kappa]$  est la matrice obtenue de la loi de comportement de l'interface.

Dans le cas où le couplage entre la dalle de béton et les poutres d'acier se fait au travers de connecteurs en cisaillement (goujons), l'opérateur  $\underline{L}$  est fonction du modèle constitutif utilisé. Ce modèle sera détaillé à la section 4.

### 3. Discrétisation par la méthode des éléments finis

#### 3.1 Élément de coque DLTP

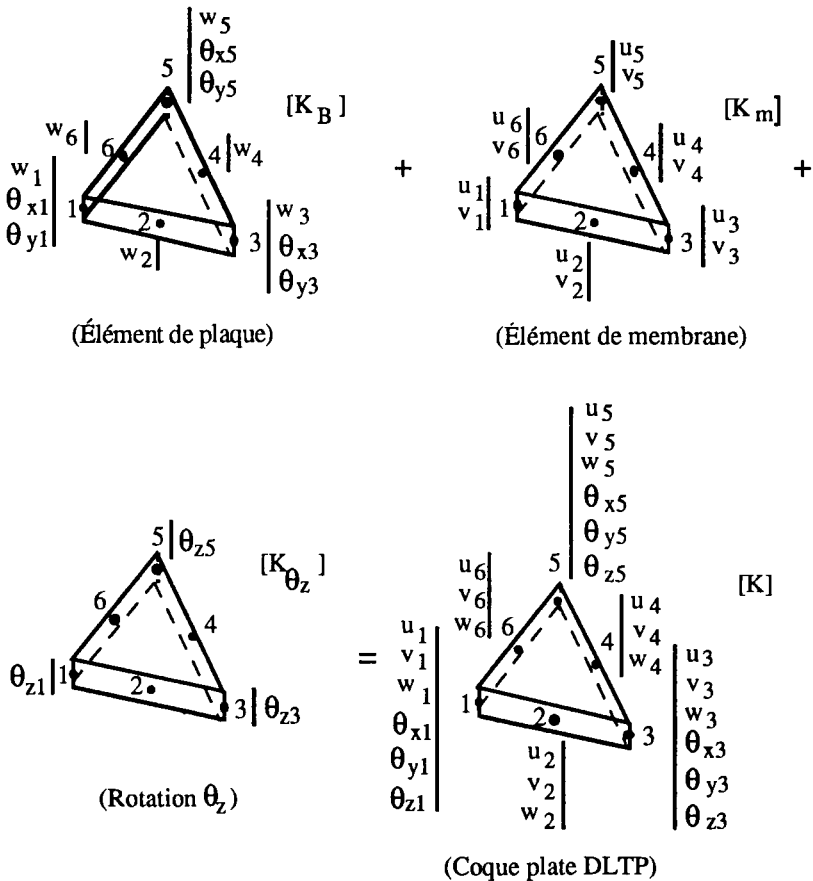


Figure 3. Élément de coque DLTP



L'élément DLTP [DHA 86] est construit par la superposition d'un élément de plaque mince DKTP (Discrete Kirchhoff Triangle Plus) basée sur la théorie de Kirchhoff discrète [BAT 90] et de l'élément de membrane quadratique en déplacement LST (Linear Strain Triangle). Cet élément a été développé dans le but de bien représenter le champ de déformation dans le cas où la coque plate est sollicitée en membrane. Strictement du point de vue flexion, il n'y a pas d'amélioration par rapport à l'élément triangulaire à trois noeuds DKT [DHA 86]. Cependant, dans le domaine des ponts où l'âme des poutres en I est sollicitée en flexion dans son plan, il est important d'utiliser un élément performant en membrane.

Pour compléter l'élément illustré à la figure 3, nous ajoutons une partie fictive pour la rotation  $\theta_z$  afin de permettre le passage du repère global au repère co-rotationnel.

Cet élément testé en théorie linéaire [DHA 86] et en théorie non linéaire [FAF 89], a donné de très bons résultats. Nous présentons ici l'essentiel de la forme discrète des équations [5] et [12].

Pour la partie membrane, nous utilisons les fonctions d'interpolation classique du triangle à six noeuds données dans plusieurs ouvrages de référence [BAT 90].

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_u \rangle \\ \langle N_v \rangle \\ \langle N_w \rangle \end{bmatrix} \{u_n\} \quad [21]$$

$$\begin{aligned} \langle N_u \rangle &= \langle N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ N_3 \dots \rangle \\ \langle N_v \rangle &= \langle 0 \ N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \dots \rangle ; \{u_n\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \dots\} \\ \langle N_w \rangle &= \langle 0 \ 0 \ N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \dots \rangle \end{aligned}$$

Pour la flexion, nous utilisons les fonctions de l'élément DKTP [BAT 90] [FAF 89] [DHA 86] :

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle H_x \rangle \\ \langle H_y \rangle \end{bmatrix} \{w_n\} ; \{w_n\} = \langle w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ w_3 \ \theta_{x3} \dots \rangle \quad [22]$$

Notons que les déplacements  $w_i$  apparaissant dans [21] et [22] sont les mêmes. Nous devons interpoler le déplacement  $w$  pour évaluer le tenseur de Green-Lagrange [16]. À partir de [21] et [22] nous obtenons la forme discrète pour  $W$  :

$$W = \langle u_n^* \rangle \int_{A^1} [B_m]^T \{N_1^2\} dA + \langle w_n^* \rangle \int_{A^1} [B_f]^T \{M_1^2\} dA \quad [23]$$

$$\{N_1^2\} = \int_{-b/2}^{b/2} \{S_1^2\} dz ; \{M_1^2\} = \int_{-b/2}^{b/2} z \{S_1^2\} dz \quad [24]$$

$$[B_m] = [B_i] + [B_{n1}] \quad [25]$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \langle N_{u,x_1} \rangle \\ \langle N_{v,y_1} \rangle \\ \langle N_{u,y_1} \rangle + \langle N_{v,x_1} \rangle \end{bmatrix} ; [B_{nl}] = \begin{bmatrix} \sum_{a=u,v,w} a_{,x_1} \langle N_{a,x_1} \rangle \\ \sum_{a=u,v,w} a_{,y_1} \langle N_{a,y_1} \rangle \\ \sum_{a=u,v,w} (a_{,x_1} \langle N_{a,y_1} \rangle + a_{,y_1} \langle N_{a,x_1} \rangle) \end{bmatrix} \quad [26]$$

où a représente respectivement u, v et w (le signe  $\Sigma$  représente la somme de vecteurs lignes et non une somme terme à terme)

$$[B_f] = \begin{bmatrix} \langle H_{x,x_1} \rangle \\ \langle H_{y,y_1} \rangle \\ \langle H_{x,y_1} \rangle + \langle H_{y,x_1} \rangle \end{bmatrix} \quad [27]$$

De même, nous obtenons la forme discrète de  $\Delta W$  (éq. [12]) à partir de [21] et [22] :

$$\begin{aligned} \Delta W = & \langle u_n^* \rangle \int_{A^1} [B_m]^T [H_{ep}^m] [B_m] + [B_\phi]^T [N_1^2] [B_\phi] dA \{ \Delta u_n \} \\ & + \langle w_n^* \rangle \int_{A^1} [B_f]^T [H_{ep}^f] [B_f] dA \{ \Delta w_n \} + \langle w_n^* \rangle \int_{A^1} [B_f]^T [H_{ep}^{mf}] [B_m] dA \{ \Delta u_n \} \\ & + \langle u_n^* \rangle \int_{A^1} [B_m]^T [H_{ep}^{mf}] [B_f] dA \{ \Delta w_n \} \end{aligned} \quad [28]$$

$$[H_{ep}^m] = \int_{-h/2}^{h/2} [H_{ep}] dz ; [H_{ep}^{mf}] = \int_{-h/2}^{h/2} z [H_{ep}] dz ; [H_{ep}^f] = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [H_{ep}] dz \quad [29]$$

$$[B_\phi] = \begin{bmatrix} \langle N_{u,x_1} \rangle \\ \langle N_{u,y_1} \rangle \\ \langle N_{v,x_1} \rangle \\ \langle N_{v,y_1} \rangle \\ \langle N_{w,x_1} \rangle \\ \langle N_{w,y_1} \rangle \end{bmatrix} ; [N_1^2] = \begin{bmatrix} [N] & [0] & [0] \\ [0] & [N] & [0] \\ [0] & [0] & [N] \end{bmatrix} ; [N] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix}_1 \quad [30]$$

Notons qu'il est possible d'utiliser une variante aux équations [23] et [28] en FLAP que l'on nomme FLAPI. Ces deux équations sont définies dans le repère co-rotationnel et utilisent des quantités mesurées dans  $C^2$  par rapport à  $C^1$ . Toutes les variables (déplacements et coordonnées) du repère global sont transformées dans le repère co-rotationnel par une matrice de transformation  $[T(\underline{X}_1)]$  fonction de  $\underline{X}_1$ . Après évaluation de [23] et [28], nous transportons ces quantités du repère co-rotationnel au repère global :

$$W = \langle u_n^* \rangle \{ r_{int}^e \} = \langle U_n^* \rangle [T_1]^T \{ r_{int} \} = \langle U_n^* \rangle \{ R_{int}^e \} \quad [31]$$

$$\Delta W = \langle u_n^* \rangle [k_i^e] \{ \Delta u_n \} = \langle U_n^* \rangle [T_1]^T [k_i^e] [T_1] \{ \Delta U_n \} = \langle U_n^* \rangle [K_i^e] \{ \Delta U_n \} \quad [32]$$

où  $\langle U_n^* \rangle$  et  $\langle \Delta U_n \rangle$  sont les variables dans le repère global.

$$\langle U_n^* \rangle = \langle U_1^* \quad V_1^* \quad W_1^* \quad \theta_{x1}^* \quad \theta_{y1}^* \quad \theta_{z1}^* \quad U_2^* \quad V_2^* \quad W_2^* \quad U_3^* \quad \dots \rangle$$

Nous pouvons utiliser à la place de la matrice  $[T_1]$ , fonction des dernières coordonnées actualisées  $\underline{x}_1$ , la matrice  $[T_i]$  fonction de coordonnées  $\underline{x}_i$  de la configuration la plus actuelle en cours de résolution (configuration non équilibrée). Ainsi nous pouvons exprimer les quantités dans  $C^i$  par rapport à  $C^i$  (description eulérienne). Dans ce cas, la matrice  $[B_m]$  est identiquement égale à  $[B_1]$  dans les équations [23] et [28]. Le passage du repère co-rotationnel au repère global se fait pour les équations [31] et [32] avec la matrice de passage  $[T_i]$  à la place de  $[T_1]$ . Ainsi en FLAPI, nous utilisons exactement la forme variationnelle basée sur la théorie des petits déplacements fonction des coordonnées  $\{x_i\}$ .

La matrice  $[H_{ep}]$  apparaissant dans l'équation [29] dépend de la loi de comportement en cause (béton ou acier). L'intégration sur l'épaisseur peut être effectuée numériquement à l'aide de la quadrature de Gauss ou Radau [FRE 78] ou par la méthode des couches [FAF 89]. Nous avons utilisé la quadrature de Radau où des points d'intégration se situent aux fibres extrêmes (peaux supérieure et inférieure) pour mieux suivre la progression de la loi de comportement au travers l'épaisseur. L'intégration sur la surface de l'élément est effectuée par une quadrature du type Hammer [BAT 90].

### 3.2 Élément d'interface

À l'instar de l'élément de coque, l'équilibre de l'interface se situe dans un repère co-rotationnel. Que ce soit pour l'élément de contact ou l'élément de goujon, la forme variationnelle et sa variation sont définies par les équations suivantes lorsque l'on utilise un élément à deux noeuds :

$$W_I = \langle u_2^* - u_1^* \rangle \{ f_I(u_2 - u_1) \} = \langle u_n^* \rangle \{ r_{int} \} \quad [33]$$

$$\Delta W_I = \langle u_2^* - u_1^* \rangle [k_T] \{ \Delta u_2 - \Delta u_1 \} = \langle u_n^* \rangle [k_T] \{ \Delta u_n \} \quad [34]$$

$$\langle u_1 \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \rangle ; \langle u_2 \rangle = \langle u_2 \quad v_2 \quad w_2 \rangle ; \langle u_n \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \rangle$$

Pour l'élément de contact, nous utilisons la méthode de pénalisation pour définir  $\{f_I\}$  et  $[k_T]$  lorsqu'il y a contact. Pour l'élément de goujon, nous faisons l'hypothèse que le comportement en cisaillement est indépendant du comportement axial. Les matrices  $\{f_I\}$  et  $[k_T]$  seront définies à la section suivante.

Lorsque les quantités  $\{r_{int}\}$  et  $[k_T]$  sont définies, nous appliquons les mêmes transformations que pour l'élément de coque à l'aide de [31] avec  $[T_1]$  en FLAP et  $[T_i]$  en FLAPI.

## 4. Lois constitutives

### 4.1 Acier

La théorie de la plasticité classique est utilisée pour établir la loi constitutive de l'acier. Le critère de Von Mises est utilisé :

$$f = \sqrt{\frac{2}{3} \text{Tr} [\sigma^I]^2} - \bar{\sigma}(k) \leq 0 \quad [35]$$

où  $[\sigma^I]$  est le tenseur déviateur,  $\bar{\sigma}(k)$  la limite d'élasticité courante de l'acier et  $k$  un paramètre d'écrouissage. La matrice élasto-plastique s'écrit [SIM 86] :

$$[H_{ep}] = H_e - \frac{1}{a} \{v\} \{v\} \quad [36]$$

$$\{v\} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle [H_e] ; \quad a = \bar{h} - \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle \{v\}$$

La matrice  $[H_e]$ , de dimensions  $3 \times 3$ , est la matrice de comportement élastique en élasticité bidimensionnelle, définie avec l'hypothèse des contraintes planes.

L'intégration de la loi de comportement est effectuée par un schéma implicite [SIM 86]. Comme mentionné à la sous-section 3.1, nous effectuons une intégration numérique sur l'épaisseur pour obtenir les efforts de membrane  $\{N\}$  et de flexion  $\{M\}$ .

### 4.2 Béton

La loi de comportement en contraintes planes utilisée a été développée pour décrire le comportement global de structures en béton armé [MAS 90a]. Les hypothèses suivantes ont été émises pour la dérivation de cette loi de comportement :

1. - Modèle hypo-élastique incrémental en contrainte plane.
2. - Le béton est considéré isotrope jusqu'à la fissuration.
3. - Après l'amorce de la fissuration, le béton est considéré comme un matériau orthotrope en utilisant une approche répartie pour la fissuration (smeared crack approach).
4. - Deux fissures peuvent se former en un point dans des directions orthogonales et peuvent pivoter suivant la direction des contraintes principales ou des déformations principales (stress rotating ou strain rotating model).
5. - Après fissuration en tension ou écrasement en compression, les contraintes sont relâchées progressivement selon le niveau de déformation et le module tangent est mis à zéro dans la direction associée à la fissure.
6. - Les fissures peuvent se refermer.
- 7.- Lorsque le béton se rompt par écrasement en compression, la rupture est considérée selon toutes les directions.

8.- Après fissuration en tension, la direction parallèle à la fissure se comporte indépendamment de la direction perpendiculaire à la fissure.

Selon l'hypothèse 3 énoncée précédemment, le béton est globalement considéré orthotrope. Les axes d'orthotropie sont définis par rapport au repère co-rotationnel de chaque élément. Dans ce cas général, la matrice  $[H_{ep}]$  du béton dans le repère co-rotationnel s'écrit :

$$[H_{ep}] = [R]^T [H] [R] \tag{37}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu^2} & \frac{\nu E_2}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E_2}{1-\nu^2} & \frac{E_2}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix}; [R] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2-s^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{matrix} \tag{38}$$

La variable  $\theta$  définit l'angle entre l'axe  $x_1$  du repère co-rotationnel et l'axe qui supporte la contrainte principale  $\sigma_1$  ou la déformation principale  $\epsilon_1$  (stress ou strain rotating crack). Les différents paramètres physiques  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$  et  $\beta$  dépendent de l'état du béton (fissuré ou non) et sont définis par la suite.

#### 4.2.1 Enveloppe de rupture

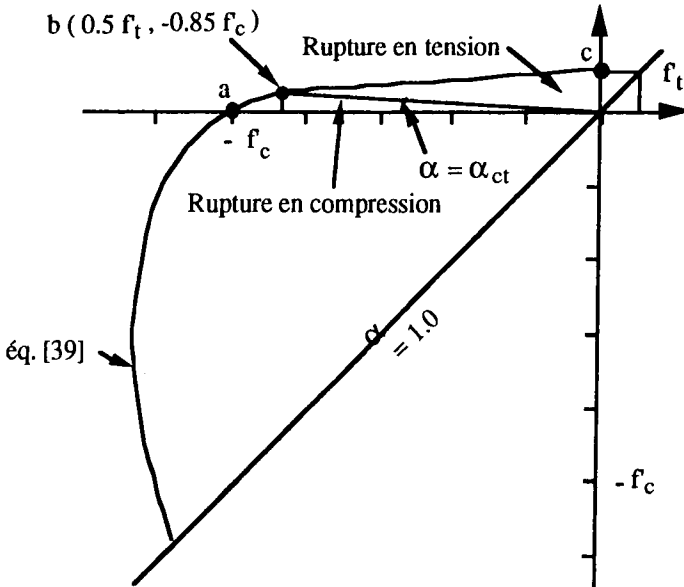


Figure 4. Exemple de rupture du béton

Le critère utilisé pour décrire la rupture du béton dans un état biaxial de contrainte est défini dans l'espace des contraintes principales selon trois zones : tension biaxiale, compression biaxiale et tension-compression (fig. 4). Dans la zone de compression biaxiale, le modèle défini par [KUP 73] est utilisé. La contrainte équivalente de rupture est définie par :

$$\sigma_{cu} = - \left( \frac{1+3.65\alpha}{(1+\alpha)^2} \right) f'_c ; \quad \alpha = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \leq 1.0 \quad (\sigma_1 > \sigma_2) \quad [39]$$

où  $f'_c$  est la contrainte de rupture en compression obtenue d'un test uniaxial (valeur positive).

Dans le cas d'un état de contrainte traction-compression, une enveloppe bilinéaire est utilisée. Pour une valeur de  $\alpha$  définie par [39] plus grande que  $\alpha_{ct}$  définie par la suite, nous considérons que le béton se rompt en compression :

$$\alpha_{ct} = - \frac{23 f_t}{34 f_c} \quad [40]$$

où  $f_t$  est la contrainte de rupture en traction uniaxiale. La contrainte limite de rupture est fonction de la droite définie par les points a et b sur la figure 4. Dans le cas où  $\alpha$  est plus petit que  $\alpha_{ct}$ , nous considérons que le béton se rompt en tension. La contrainte de rupture sera déterminée par la droite reliant les points b et c de la figure 4. Dans ce cas, la résistance en compression dans la direction parallèle à la fissure est réduite à  $.85 f'_c$  lorsque la fissure s'ouvre et à  $.6 f'_c$  lorsque la fissure est complètement ouverte.

Finalement, dans le cas où un point est en tension biaxiale, la limite de rupture est déterminée par  $f_t$  d'une façon indépendante dans la direction des deux contraintes principales.

#### 4.2.2 Loi de comportement en compression avant rupture

Avant la rupture,  $E_1 = E_2 = E$  et  $\beta = 1$  dans la matrice [H] définie à l'équation [38]. La courbe contrainte-déformation uniaxiale utilisée pour le béton en compression est celle proposée par [SAE 64] :

$$\sigma = \frac{E_c \varepsilon}{1 + \left( \frac{E_c}{E_{sec}-2} \right) R_\varepsilon + R_\varepsilon^2} ; \quad E_{sec} = \frac{\sigma_{cu}}{\varepsilon_{cu}} ; \quad R_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cu}} \quad [41]$$

$\varepsilon_{cu}$  est la limite ultime en déformation variant selon le rapport des contraintes principales,  $E_c$  est le module tangent initial (module de Young) et  $\sigma_{cu}$  est la résistance en compression selon l'enveloppe définie à l'équation [39]. La figure 5 illustre cette courbe (famille de courbes) valide jusqu'à la rupture. Le module tangent  $E$  est donné par la relation suivante ( $E = d\sigma/d\varepsilon$ ) :

$$E = \frac{E_c (1 - R_\epsilon^2)}{\left[ 1 + \left( \frac{E_c}{E_{sec}} - 2 \right) R_\epsilon + R_\epsilon^2 \right]^2} \quad [42]$$

Le coefficient de Poisson pour des niveaux de compression inférieurs à 75% de la limite ultime demeure à peu près inchangé mais augmente pour des niveaux supérieurs à 75%. Le modèle suivant est utilisé pour définir  $\nu$  :

$$\nu = \nu_0 + (0.5 - \nu_0) + \left( \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{cu}} \right)^2 (1 - \alpha) \quad [43]$$

où  $\sigma_{min}$  est la contrainte principale la plus faible et  $\nu_0$  le coefficient de Poisson initial.

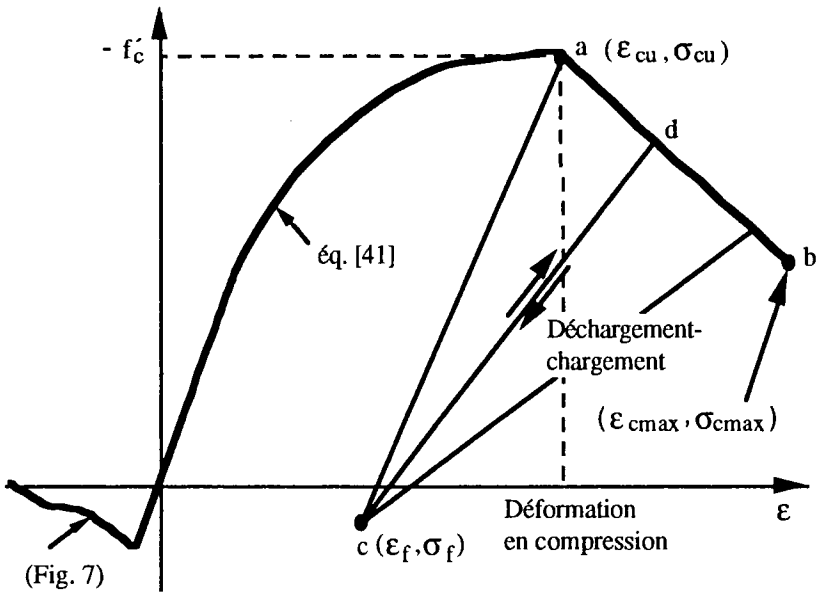


Figure 5. Courbe contrainte-déformation du béton

#### 4.2.3 Loi de comportement en traction avant rupture

Le module de Young pour un béton en traction est défini par le module sécant  $E_c$  initial défini précédemment. Il y a proportionnalité directe en  $\sigma$  et  $\epsilon$  en traction jusqu'à la rupture (Fig. 6). Le coefficient de Poisson est défini par l'équation [43].

#### 4.2.4 Loi de comportement en compression après rupture

Lorsque l'on détecte en un point qu'il y a rupture en compression, nous considérons que tout le béton en compression rupture, i.e. qu'il n'y a plus de

possibilité de développer des efforts dans aucune direction à ce point; ceci est conforme aux observations expérimentales. Dans ce cas, le module de Young et le coefficient de Poisson sont mis à zéro et le cisaillement  $G$  à la valeur minimale définie par (shear retention factor) :

$$G_{\min} = \frac{0.1 E_c}{2(1 + \nu_o)} \quad [44]$$

L'état de contraintes présent à la rupture est graduellement réduit (strain softening) tel qu'illustré sur la figure 5 (les contraintes dans les deux directions sont diminuées).

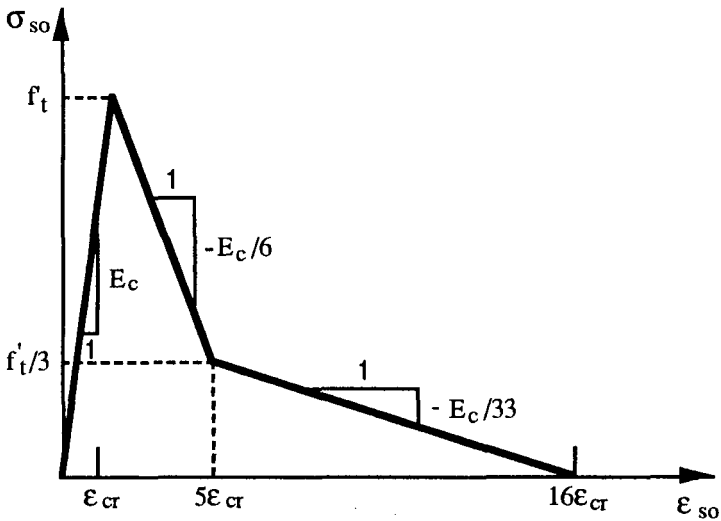


Figure 6. Courbe contrainte-déformation du béton non armé en traction

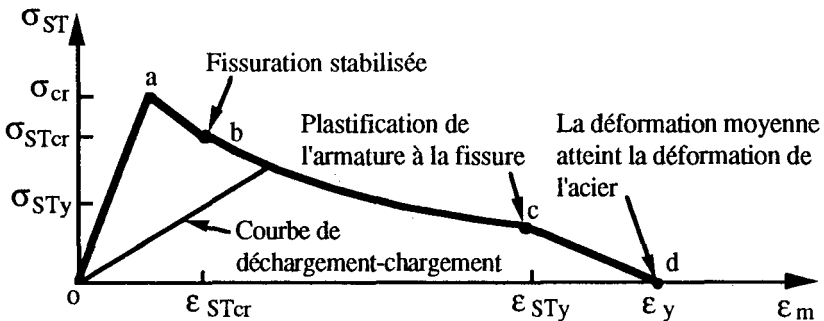


Figure 7. Courbe contrainte-déformation du béton armé en traction



La branche descendante en compression après rupture est considérée linéaire. Le point a correspond à la limite de rupture et le point b correspond aux coordonnées suivantes :

$$\varepsilon_{c \max} = \frac{2E_c \varepsilon_{cu}}{E_{sec}} \geq 5\varepsilon_{cu} ; \varepsilon_{c \max} = \frac{2E_c \varepsilon_{cu}}{E_{sec}} \geq 5\varepsilon_{cu}$$

Lorsque l'on se situe sur la branche descendante a-b de la figure 5 (après rupture), il est admis que si un déchargement survient en cours de résolution, celui-ci suit la droite reliant le point c de la figure 5 au point situé sur la droite a-b juste avant déchargement. Le point c est défini par :

$$\sigma_f = 0.1 \sigma_{cu} ; \varepsilon_f = \varepsilon_{cu} = \frac{1.1 \sigma_{cu}}{E_c}$$

La validité de ce modèle a été corroborée par des tests expérimentaux [MAS 90b].

#### 4.2.5 Loi de comportement en traction après rupture

Le comportement post-rupture en traction présenté ici est valide autant pour les bétons armés que ceux non armés. Le modèle tient compte du radoucissement en tension dû à l'ouverture des fissures et du raidissement en tension entre les fissures dû à la présence de l'armature. La figure 6 illustre la courbe représentant le radoucissement pour un béton non armé et la figure 7 illustre la courbe contrainte-déformation décrivant la contribution moyenne du béton lorsque l'armature est présente. Cette courbe n'est pas unique et varie en fonction du ratio d'armature et de l'orientation des fissures par rapport à l'armature [MAS 90a].

Le module de cisaillement est progressivement réduit également à l'aide de la relation suivante lorsqu'il y a une seule fissure :

$$G_{cr} = \frac{E_2}{4} \left( \frac{\sigma_{st}}{\sigma_{cr}} + 1 \right) \geq G_{min} \quad [45]$$

où  $\sigma_{cr}$  est la contrainte de rupture en traction et  $E_2$  le module tangent dans la direction parallèle à la fissure. S'il existe deux fissures orthogonales au même point, alors  $G_{cr} = G_{min}$ . De même, lorsque la contrainte de traction perpendiculaire à la fissure atteint zéro à la fin de la courbe de la figure 7, la fissure est considérée ouverte pleinement et  $G_{cr} = G_{min}$ .

#### 4.2.6 Discrétisation de l'armature

Comme mentionné précédemment, les barres d'armature sont représentées par des couches d'épaisseur équivalente. Chaque couche a un comportement uniaxial dans la direction des barres d'armature considérées et suit la loi de comportement de l'acier, décrite à la sous-section 4.1. L'orientation de l'action de l'armature se fait par rapport à l'axe x du repère co-rotationnel et ne change pas en cours de chargement.

### 4.3 Goujons

Lorsque l'on utilise des goujons à l'interface acier-béton pour simuler une action composite totale, nous devons introduire une loi de comportement selon les directions tangentielle et normale. Comme mentionné précédemment à la sous-section 3.2, nous avons adopté un comportement indépendant selon la direction normale par rapport à la direction tangentielle. Dans la direction normale, la rigidité axiale et la contrainte uniaxiale suivent la loi classique de la plasticité :

$$\sigma_n = \sigma_1 + S_1^{2-1} ; S_1^{2-1} = E_T \{-1 \ 1\} \{u_n\}_1^2 \quad [46]$$

où  $\sigma_1$  est la contrainte dans la configuration  $C^1$ ,  $E_T$  le module tangent de la courbe contrainte-déformation uniaxiale,  $L$  la longueur du goujon et  $\langle u_n \rangle$  les déplacements axiaux dans le repère co-rotationnel entre  $C^1$  et  $C^2$ . Le module tangent sert à évaluer la rigidité tangente de la matrice  $[k_T]$  :

$$k_n = \frac{E_T A_s}{L} \quad [47]$$

où  $A_s$  est l'aire du goujon. Dans la direction tangentielle, nous utilisons la loi de comportement suivante [YAM 68] :

$$Q = a (1 - e^{-b\gamma}) \quad [48]$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes obtenues d'un test expérimental et  $\gamma$  est le déplacement relatif entre les deux extrémités du goujon :

$$\gamma = \sqrt{(v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2} \quad [49]$$

Les quantités  $v_1$ ,  $w_1$  et  $v_2$ ,  $w_2$  sont les déplacements aux noeuds de l'élément L2 dans le repère co-rotationnel entre  $C^0$  et  $C^2$ .

Les constantes  $a$  et  $b$  sont obtenues d'une courbe expérimentale en choisissant deux points notés  $(Q_1, \gamma_1)$  et  $(Q_2, \gamma_2)$  avec  $\gamma_2 = 2\gamma_1$  :

$$a = \frac{(Q_1)^2}{2 Q_1 - Q_2} ; b = \frac{1}{\gamma_1} \ln \left( \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} \right) \quad [50]$$

À l'aide des relations empiriques suivantes [OLL 71] :

$$\frac{Q}{Q_u} = (1 - e^{-0,709\gamma})^{2/5} ; Q_u = 0,5 A_{sc} \sqrt{f'_c E_c} \leq f_u A_s \quad [51]$$

nous pouvons obtenir les valeurs de  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $\gamma_2$  pour calculer les constantes  $a$  et  $b$ . Ces équations sont valides pour  $L \geq 4d$  où  $d$  est le diamètre des goujons. Dans l'équation [51]  $f_u$  est la limite de rupture de l'acier et  $A_s$  l'aire du goujon.

À partir de la relation [48], nous pouvons obtenir le module tangent :

$$k_t = \frac{dQ}{d\gamma} = ab e^{-b\gamma} \quad [52]$$

Ce module tangent, de même que la force de cisaillement agissent dans une direction tangente résultante dans le plan y-z. Il faut donc établir selon les axes y et z, la portion de la force Q agissant dans chaque direction. Nous utilisons la relation de proportionnalité suivante pour établir cette relation :

$$\frac{\Delta v}{\Delta w} = \frac{f_{ty}}{f_{tz}} \quad [53]$$

où  $\Delta v$  et  $\Delta w$  sont les déplacements relatifs entre les noeuds 1 et 2, entre les configurations  $C^1$  et  $C^2$ , et  $f_{ty}$  et  $f_{tz}$  les forces tangentielles selon les axes y et z dans le repère co-rotationnel. Connaissant  $\Delta v$  et  $\Delta w$ , ceci fixe la relation entre  $f_{ty}$  et  $f_{tz}$ .

$$f_{ty} = \frac{Q}{\sqrt{\left(\frac{\Delta v}{\Delta w}\right)^2 + 1}} ; f_{tz} = f_{ty} \frac{\Delta w}{\Delta v} \quad [54]$$

où Q est obtenu de [48]. Ainsi, le résidu et la matrice tangente s'écrivent pour cet élément :

$$\{f_{int}^e\} = \langle f_n \ f_{ty} \ f_{tz} \ -f_n \ -f_{ty} \ -f_{tz} \rangle ; (f_n = A_s \sigma_n) \quad [55]$$

$$[K_T^e] = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 & -k_n & 0 & 0 \\ & k_{ty} & 0 & 0 & -k_{ty} & 0 \\ & & k_{tz} & 0 & 0 & -k_{tz} \\ & & & k_n & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & k_{ty} & 0 \\ & & & & & k_{tz} \end{bmatrix} \quad [56]$$

#### 4.4 Contact avec frottement

Nous utiliserons les hypothèses suivantes pour établir le modèle constitutif pour le contact.

1. L'interface est traité comme un milieu orthotrope, c'est-à-dire que le modèle constitutif est indépendant selon la normale et la tangente.
2. Pour le plan tangent, le comportement est isotrope et suit la loi donnée par la relation [53].
3. Les variables cinématiques fondamentales sont les déplacements relatifs entre les deux points en contact et suivent la relation suivante :

$$\{d_i^2\} = \{\Delta d\} = \{\Delta d^e\} + \{\Delta d^p\} \quad [57]$$

où  $\Delta d$  est le déplacement relatif entre les noeuds et ce entre les configurations  $C^1$  et  $C^2$ .

4. Selon la normale, lorsqu'il y a contact, le comportement est purement élastique ( $\Delta d_n^p = 0$ ) et la contrainte est proportionnelle à un coefficient de pénalisation.
5. Dans la direction tangentielle, la contrainte élastique est proportionnelle au déplacement élastique tangent via un coefficient de pénalité lorsque le contact est collant.
6. L'écoulement plastique dans la direction tangentielle est du type :

$$\Delta \underline{d}^p = d\lambda \frac{\partial f_t}{\partial \underline{\sigma}_t} \text{ où } f_t \text{ est le critère de plasticité tangent.} \quad [58]$$

7. Le changement d'état (contact-séparation) à l'interface ne dépend que de la force normale ou du déplacement relatif normal  $\Delta d_n$ .

À partir de l'hypothèse 3, nous obtenons l'équation suivante qui établit la relation entre l'accroissement des forces et l'accroissement des déplacements relatifs :

$$\{S_i^{2-1}\} = \{\Delta \sigma\} = [H_{cp}] \{\Delta d\} \quad [59]$$

$$[H_{cp}] = [H^c] - \frac{1}{h} \{v\} \{v\} ; \{v\} = [H^c] \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle \quad [60]$$

$$\bar{h} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle [H^c] \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle + \frac{k^p}{\alpha_{eq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{eq}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle \{\sigma\} \quad [61]$$

La variable  $\sigma_{eq}$  représente la contrainte effective de contact et  $k^p$  le module plastique [YAM 90]. La dernière partie de l'équation [61] représente la variable liée à l'écrouissage [YAM 90].

Selon les hypothèses 1 et 4, les relations constitutives peuvent être établies de façon indépendante dans les directions normale et tangentielle.

#### 4.4.1 Direction normale

Le critère de contact selon la normale s'écrit en utilisant l'hypothèse 7 :

$$f_n = \sigma_n < 0 \quad [62]$$

c'est-à-dire que si la force normale est négative, il y a contact élastique. En utilisant la méthode de pénalité, et selon l'hypothèse 4, le critère suivant est plutôt utilisé :

$$d_n = (d_n)^1 + \Delta d_n \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n = (\alpha_n)^1 + k_n \Delta d_n \leq 0 \\ |\underline{\sigma}| \geq 0 \end{cases}$$

$$d_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n = 0 & k_n = 0 \\ \underline{\sigma} = 0 & k_t = 0 \end{cases} \quad [63]$$

où  $k_n$  et  $k_t$  sont les coefficients de pénalisation selon  $n$  et  $t$ , et  $\underline{\sigma}$  les forces tangentielles.

#### 4.4.2 Direction tangentielle

Le contact entre deux solides peut être collant ou glissant. Le passage d'un état à l'autre s'établit selon le critère de plasticité tangentielle.

$$f_t \leq 0 \quad [64]$$

Par exemple, pour la loi classique de Coulomb on a :

$$f = |\underline{\sigma}_t| - \mu_0 |\sigma_n| \leq 0 \quad [65]$$

où  $\mu_0$  est le coefficient de frottement obtenu de tests expérimentaux. Il a été démontré expérimentalement [LAB 91] [RAB 88] que le coefficient  $\mu$  diminue en fonction du déplacement relatif entre les interfaces acier-béton en contact. Un phénomène similaire a été observé à l'interface d'autres matériaux [PLE 85]. Cette dégradation peut être attribuée à plusieurs phénomènes (déformation des aspérités, vitesse de glissement, etc.).

Plusieurs modèles ont été proposés pour décrire ce phénomène [KLA 85] [PAN 85] [PLE 85]. Le critère suivant a été retenu [CUR 84] :

$$f_t = |\underline{\sigma}_t| - \mu |\sigma_n| \leq 0 ; \mu = \mu_0 e^{-\eta} ; \eta = \omega |\Delta d_t^p| \left\| \frac{\underline{\sigma}_t}{|\sigma_n|} \right\| \quad [66]$$

où  $\omega$  est une constante dite de dégradation et doit être évaluée expérimentalement ou par calibration numérique. La figure 8 illustre la différence entre le critère de Coulomb et celui de l'équation [66].

À partir de l'équation [66], nous pouvons établir les relations [58] et [60] en sachant que :

$$|\underline{\sigma}_t| = \sqrt{(\sigma_y)^2 + (\sigma_z)^2} \quad [67]$$

où  $\sigma_{ty}$  et  $\sigma_{tz}$  sont les forces tangentielles selon les directions y et z respectivement dans le repère co-rotationnel;

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} \right\} = \frac{\partial f}{\partial |\underline{\sigma}_t|} \left\{ \frac{\partial |\underline{\sigma}_t|}{\partial \sigma_t} \right\} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_t} \right\} \quad [68]$$

$$\{\Delta d_t^p\} = d \lambda' \left\{ \frac{\sigma_t}{|\sigma_t|} \right\} ; d \lambda' = d \lambda (1 + \mu \omega |\Delta d_t^p|) \quad [69]$$

Notons finalement que dans le cas où il y a glissement, nous avons la relation suivante qui s'applique selon la direction tangente :

$$(k_t)_g = k_t \left( 1 - \frac{k_t}{k_t + k_t^p} \right) \quad [70]$$

où  $k_t$  est le coefficient de pénalité avant glissement,  $(k_t)_g$  celui après glissement obtenu de l'équation [60] et [61], et  $k_t^p = c k_t$ . La variable  $c$  est un coefficient petit.

Si  $c = 0$ , il y a glissement parfait. Dans le cas contraire, le comportement est similaire à l'acier avec écrouissage. L'introduction du module plastique a seulement pour but de stabiliser la résolution numérique si nécessaire.

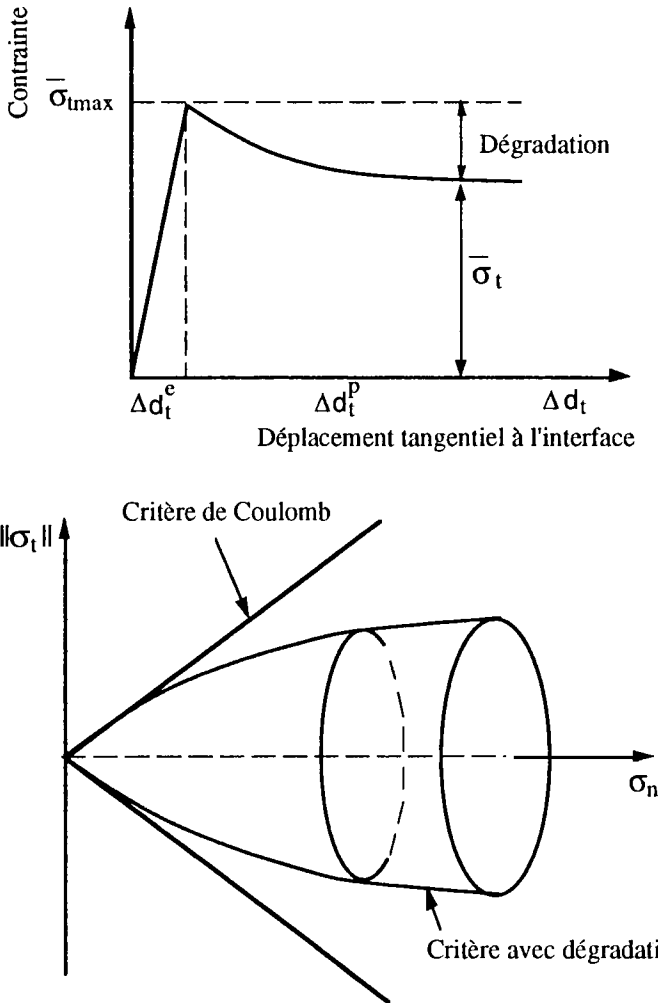


Figure 8. Loi de frottement à l'interface

### 5. Méthode de résolution

Les non-linéarités rencontrées dans l'étude à la rupture des ponts sont de trois types, soit les non-linéarités géométriques (grands déplacements, instabilité), les non-linéarités matérielles (acier, béton, frottement, goujon) et le contact (contact-

séparation). Étant donné la présence du contact et des fortes non-linéarités géométriques, nous avons systématiquement utilisé la méthode de Newton-Raphson standard avec et sans facteur de sous-relaxation  $\alpha$  :

$$[K_T^i] \{\Delta u^i\} = \{R^i\} ; \underline{u}^{i+1} = \underline{u}^i + \alpha \Delta \underline{u}^i \quad [71]$$

où  $\underline{u}^i$  les déplacements à l'itération  $i$  entre  $C1$  et  $C^i$ . À cette dernière équation, nous ajoutons une équation auxiliaire correspondant à la méthode de pilotage utilisée :

$$f(u^i, \lambda^i) = 0 ; \lambda^{i+1} = \lambda^i + \Delta \lambda^i \quad [72]$$

où  $\lambda$  est le paramètre de charge (éq. [2]). Le pilotage a été fait soit en déplacement imposé ou en longueur d'arc imposée.

## 6. Validation du modèle numérique

Deux exemples sont présentés afin de démontrer la validité du modèle numérique. La comparaison des résultats numériques se fera par rapport à des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

Le premier exemple consiste à étudier une poutre continue à section mixte (acier-béton) agissant en action composite totale. L'interface est modélisée à l'aide d'éléments de goujons. Cet exemple permet de valider le modèle sans contact.

Le second exemple est un pont à échelle réduite constitué de deux poutres d'acier sur appuis simples où deux conditions d'interface ont été considérées : dalle simplement déposée sur les poutres d'acier et dalle simplement déposée puis renforcée à l'aide de boulons post-contraints. Les éléments de contact ont été utilisés pour modéliser l'interface. La deuxième condition d'interface a permis de valider et de calibrer la modèle de frottement avec dégradation.

Notons que le comportement de plusieurs autres types de pont a été simulé [LIN 91]. D'excellents résultats ont été obtenus avec le modèle.

### 6.1 Poutre composite continue en portée double

La figure 9 illustre la géométrie de la poutre testée expérimentalement par [YAM 72]. Cette poutre continue à deux portées égales a été chargée avec deux charges d'intensité égale à mi-portée. La poutre d'acier en I a une hauteur de 152 mm et les ailes ont une largeur de 76 mm. Deux rangées de goujons de dimensions 9x50 mm sont uniformément espacés à 146 mm le long de la poutre. La charge ultime mesurée en laboratoire est de 150 kN. La rupture de la poutre a été provoquée par la ruine en cisaillement des goujons, suivie par la rupture du béton en compression sur une des portées. La tableau 1 donne les propriétés mécaniques des différentes composantes.

La poutre composite a été modélisée en tenant compte de la double symétrie. La figure 9 illustre le maillage de cette poutre. Un total de 160 éléments a été utilisé.

La figure 10 illustre pour le test expérimental et le test numérique, la déformée de la poutre et les déformations axiales dans la poutre d'acier à la fibre inférieure à une charge de 121 kN (les résultats sont présentés en unités impériales). Nous

observons une très bonne corrélation entre les tests expérimentaux et numériques. Le modèle numérique a prédit une charge ultime de 144.3 kN, soit une différence de 3% par rapport au test expérimental (150.2 kN). La charge ultime numérique correspond au dernier palier de chargement où la convergence a pu être obtenue.

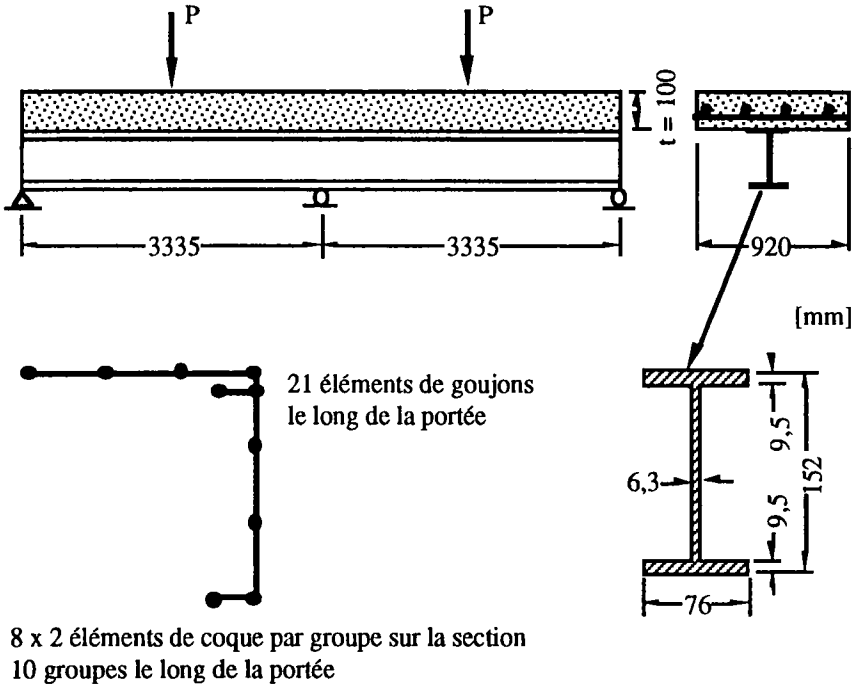
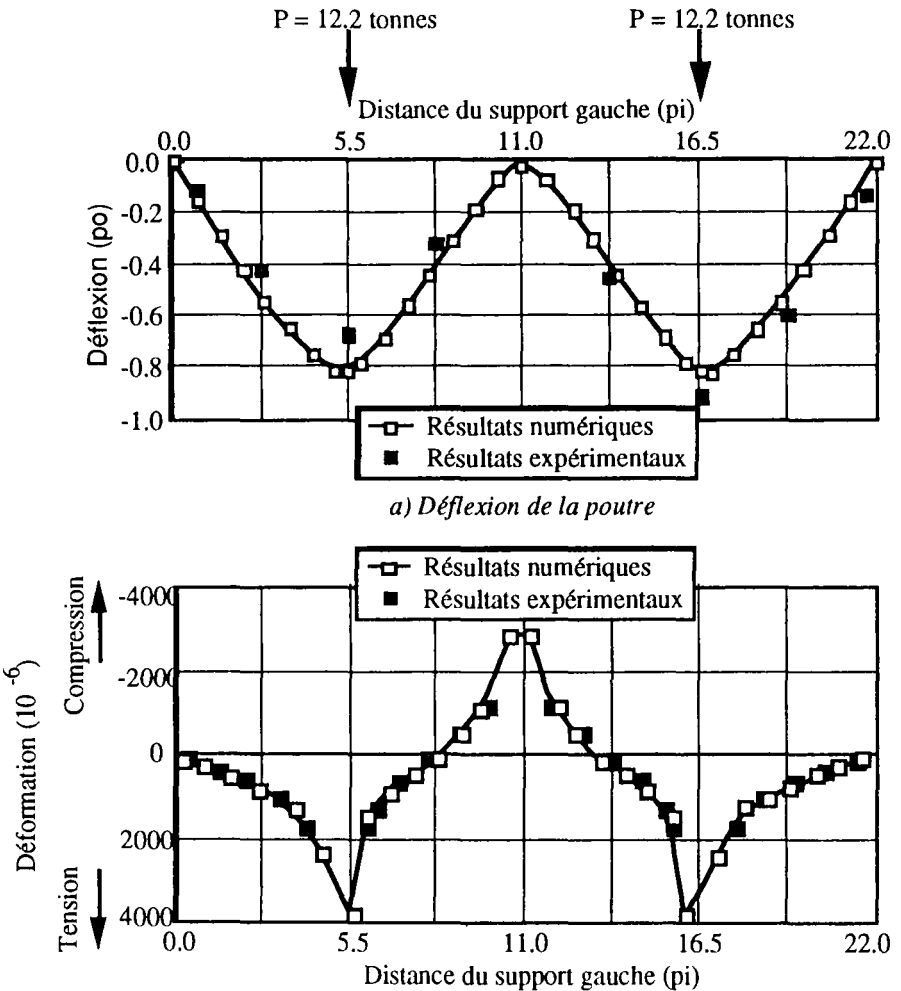


Figure 9. Poutre de portée double

Acier		Béton	
$f_y = 300$	MPa	$f_c = 47.6$	MPa
$E_s = 20400$	MPa	$E_c = 30400$	MPa
$\bar{h} = 0.005$	(écrouissage)	$f_t = 2.3$	MPa
$a = 48$	kN (Éq.[50])	$\epsilon_{cu} = 0.0027$	
$b = 2.9$	(1/mm) Éq.[50]	$\nu_o = 0.2$	(estimé)

Tableau 1. Propriétés des matériaux pour la poutre continue de portée double





Note: 1 tonne = 9.95 kN, 1 po = 25.4 mm, 1 pi = 304 mm

Figure 10. Résultats pour la poutre continue de portée double

## 6.2 Pont avec dalle simplement déposée

Plusieurs tests expérimentaux ont été effectués sur un pont à échelle réduite, constitué de deux poutres d'acier W310x21 et d'une dalle de béton de 100 mm d'épaisseur (fig. 11). Ces tests avaient pour buts : de démontrer le rôle bénéfique du frottement pour la stabilisation des poutres contre le déversement, de tester une méthode de renforcement, et d'obtenir des résultats pour la calibration d'un modèle d'éléments finis.

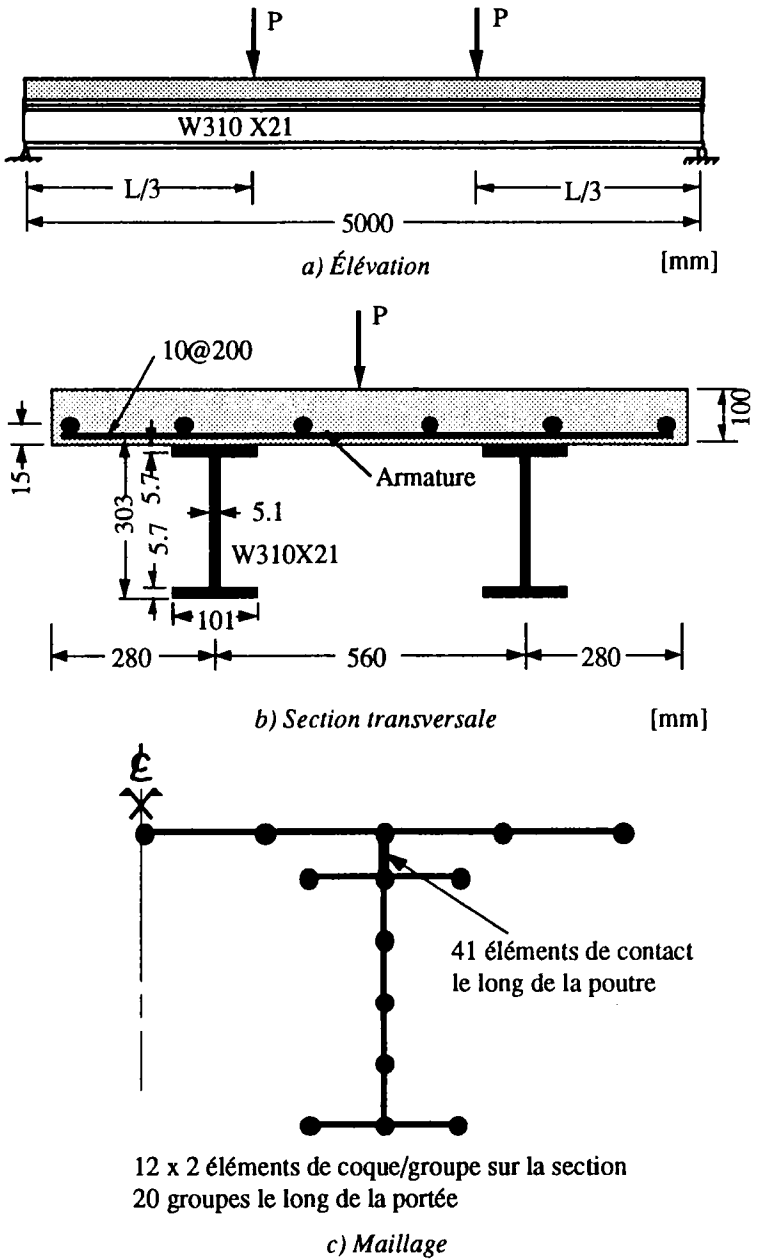


Figure 11. Pont à échelle réduite

Deux tests numériques ont été effectués, correspondant à deux conditions d'interface acier-béton différentes. Dans les deux cas, les propriétés des matériaux et les dimensions des composantes du pont sont les mêmes. Le tableau 2 fournit les propriétés des matériaux utilisés.

Acier	Béton
$f_y = 335$ MPa (poutre)	$f_c = 35$ MPa
$= 400$ MPa (armature)	$f_t = 3$ MPa
$E_s = 200000$ MPa	$E_c = 30000$ MPa
$\bar{h} = 0.005$ (écrouissage)	$\epsilon_{cu} = 0.0027$ $\nu_o = 0.2$

Tableau 2. Propriétés des matériaux du pont de la figure 11

Dans les deux tests, des éléments de contact ont été utilisés. La seule différence est que dans le cas du pont renforcé, des éléments de barre sont introduits afin d'induire la post-contrainte. Ces éléments rendent solidaires en partie les poutres et la dalle avant le début du chargement. Les rigidités initiales pour les éléments de contact étaient de  $10^8$  pour  $k_n$  et  $10^5$  pour  $k_t$ . Après séparation et après l'amorce du glissement, les paramètres  $c_n$  et  $c_t$  (Eq. [70]) étaient de  $10^{-6}$  et  $10^{-4}$  respectivement. Le coefficient de frottement initiale utilisé est de 0.5 [RAB 88] [LAB 91]. Le facteur de dégradation  $\omega$  de l'équation [66] dépend des propriétés de l'interface. Basé sur les résultats de [LAB 91] et après quelques tests numériques, ce coefficient a été fixé à 0.1.

Dans les deux cas, nous avons exploité la symétrie longitudinale du pont lors de la discrétisation, étant donné que le chargement est symétrique par rapport à la demi-portée. Nous n'avons pas exploité la double symétrie afin de permettre le déversement d'une seule poutre s'il y a lieu. La figure 11c) illustre le maillage utilisé (480 éléments).

### 6.2.1 Résultats pour le pont non renforcé

Nous avons étudié dans un premier temps le pont avec la dalle simplement déposée avec un coefficient de frottement nul ( $\mu_0 = 0$ ), afin de démontrer l'effet stabilisateur du frottement dalle-poutre. La figure 12 illustre les résultats numériques et expérimentaux pour les déplacements transversaux et latéraux. La charge ultime obtenue des tests expérimentaux est de 122 kN alors que celle prédite par le modèle numérique est de 82 kN. La rupture obtenue par le modèle numérique est le déversement d'une poutre dans le domaine élasto-plastique.

La courbe marquée par des carrés blancs illustre les déplacements transversaux des ailes supérieures et inférieures de la section à la mi-portée du pont. Il y a rotation de la section correspondant au déversement. Aucune rotation similaire n'a été observée pour les tests expérimentaux.

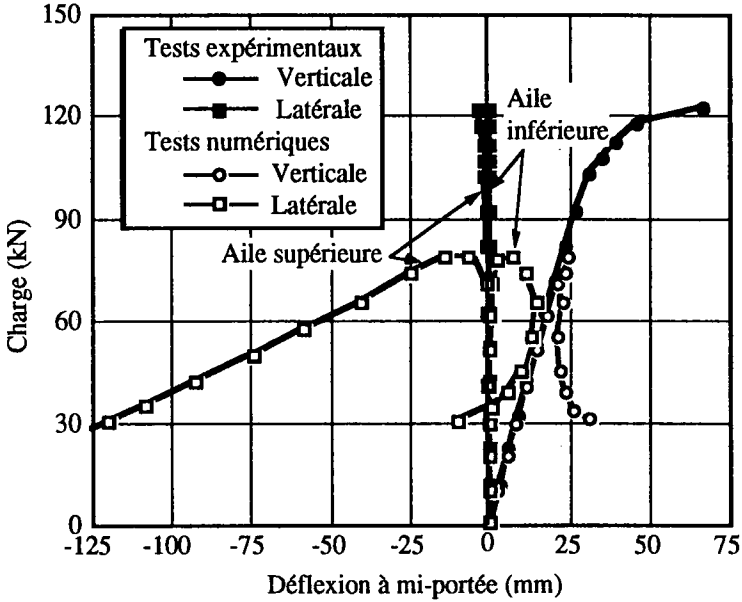


Figure 12. Résultats pour le pont non renforcé ( $\mu = 0$ ).

Dans le deuxième test, nous avons utilisé un coefficient de frottement  $\mu_0 = 0.5$ . Le modèle de Coulomb a été utilisé ( $\omega = 0$ ). La figure 13 illustre la courbe charge-déplacement verticale d'une des poutres à la mi-portée et le glissement mesuré aux appuis. La charge ultime obtenue numériquement est de 117 kN, soit 97% de la charge ultime expérimentale. Le mode de rupture est la plastification de la section d'acier.

Dans cet exemple, le frottement développé à l'interface n'agit que pour stabiliser la poutre contre le déversement et permet ainsi l'augmentation de la charge ultime (82 kN versus 117 kN). Aucune action composite entre les poutres et la dalle n'a pu être développée. Il a été observé lors de la modélisation numérique qu'au fur et à mesure que le chargement augmentait sur le pont, une grande partie de l'interface acier-béton perdait contact. Seule une petite zone sous les charges demeurait en contact, favorisant ainsi la stabilisation des poutres contre le renversement. D'autres comparaisons ont été effectuées sur ces tests et sont disponibles dans [LIN 93].

## 6.2.2 Résultats pour le pont renforcé

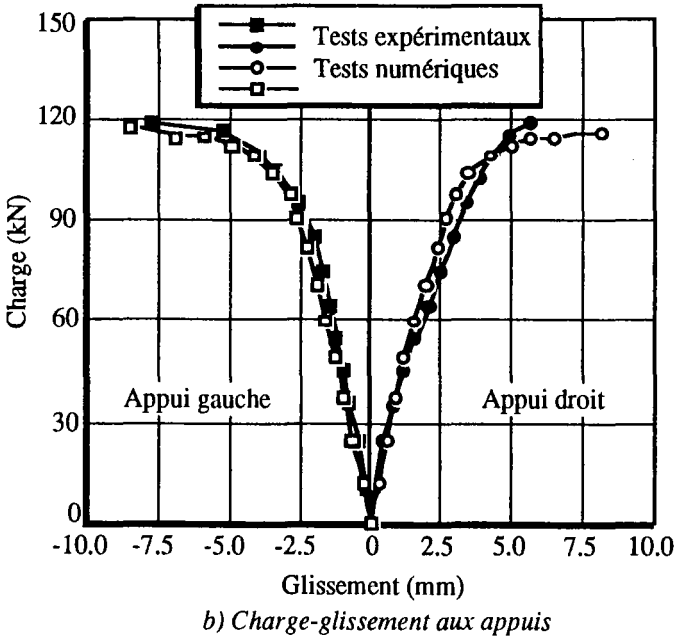
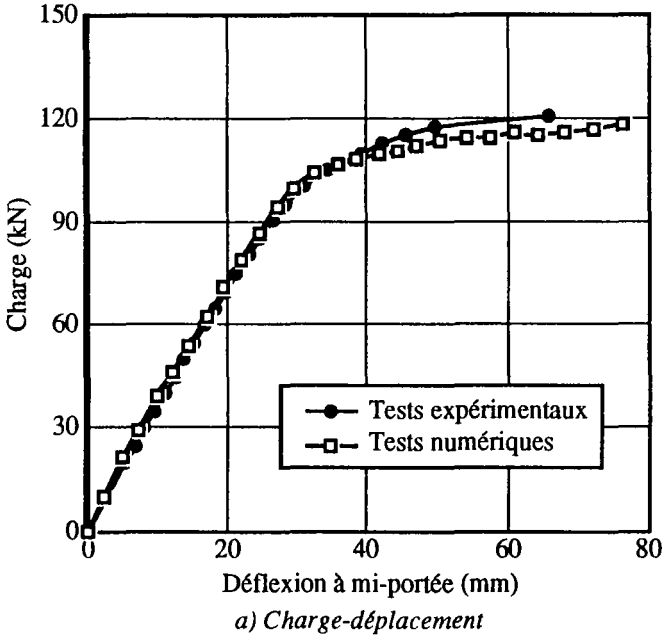


Figure 13. Résultats pour le pont non-renforcé ( $\mu = 0.5$ ,  $w = 0.0$ )

D'après les observations expérimentales et numériques sur le pont non renforcé [DIO 91] [LIN 93] la zone de contact acier-béton est très réduite, dû au décollement de la dalle en cours de chargement. Afin de mobiliser le frottement à l'interface acier-béton pour développer une action composite partielle, le pont à échelle réduite a été renforcé à l'aide de boulons post-contraints placés à travers de la dalle de béton et de l'aile supérieure des poutres d'acier [DIO 91].

Un total de 20 boulons à haute résistance a été utilisé. La post-contrainte induite était de 320 MPa et les boulons avaient 12.5 mm de diamètre et la longueur était de 100 mm. La charge ultime expérimentale est de 182 kN et le mode de rupture observé est la plastification des poutres d'acier.

Le maillage pour ce test est le même que celui utilisé précédemment. Vingt éléments de barre ont été introduits pour induire la post-contrainte avant le début du chargement.

Deux cas ont été considérés lors des tests numériques. Nous avons utilisé le modèle de Coulomb avec  $\mu_0 = 0.5$  et le modèle avec dégradation où  $\omega = 0.1$  et  $\mu_0 = 0.5$ . Dans ce dernier cas, la charge de rupture obtenue est de 173 kN, soit 5% inférieure à la charge ultime obtenue du test expérimental. Dans le premier cas, nous avons obtenu une charge de rupture supérieure à celle expérimentale.

La figure 14 illustre les courbes charge-déplacement à la mi-portée pour le test expérimental (points noirs), le test numérique avec dégradation (points blancs) et le test numérique sans dégradation des surfaces (carrés blancs). Il est clair, d'après cette figure, que lorsqu'il y a présence de boulons post-contraints qui augmentent la surface de contact, le modèle avec dégradation des surfaces doit être utilisé pour prédire le comportement du pont.

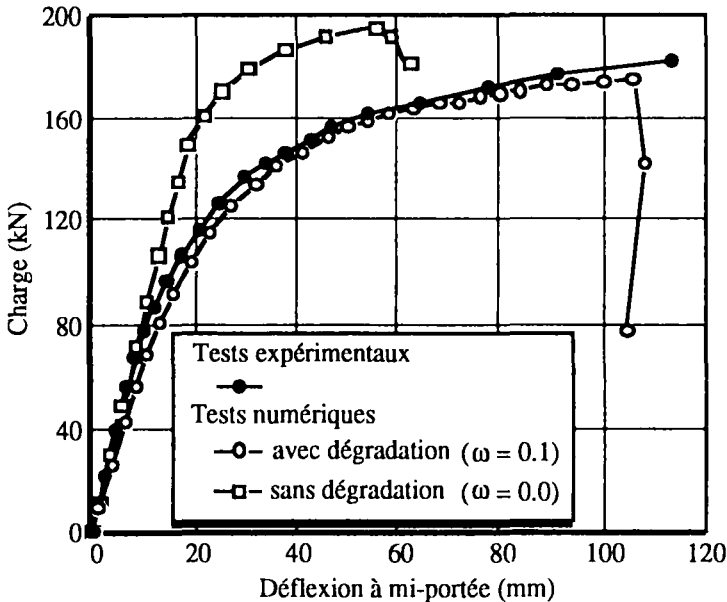


Figure 14. Courbe charge-déplacement du pont renforcé.

Dans le cas du pont non renforcé, aucune différence n'a été observée lorsque l'on utilise le modèle de Coulomb ou le modèle avec dégradation. Ceci est dû au fait que les surfaces en contact sont très petites et localisées et de plus, le frottement mobilisé ne permet pas de développer une action composite partielle : aucune force de frottement n'est développée dans le sens de la portée du pont.

Dans le cas du pont renforcé, des forces de frottement ont été développées dans l'axe du pont localement autour des zones où les boulons post-contraints ont été installés. Ce frottement a permis de développer une action composite partielle, en plus de stabiliser les poutres contre le déversement. Ainsi, la charge ultime a pu être augmentée de 117 kN à 173 kN lorsque l'on utilise des boulons post-contraints.

## 7. Étude paramétrique sur le renforcement

Afin de mettre en évidence les différents paramètres influençant la capacité ultime de ponts initialement non-composites renforcés à l'aide de boulons post-contraints, nous avons effectué une étude paramétrique. Cette technique de renforcement peut être utilisée pour renforcer des ponts existants où la dalle de béton repose simplement sur des poutres d'acier et qui ont une capacité ultime trop faible pour supporter les charges routières actuelles. Ces ponts ont été construits il y a une quarantaine d'années.

Les principaux paramètres étudiés sont le nombre de boulons post-contraints, le niveau de la post-contrainte et le type de chargement. Le pont utilisé pour l'étude de ces paramètres est celui de la figure 11, soit le pont à échelle réduite. Les propriétés mécaniques sont données au tableau 2.

Afin de comparer les résultats, nous utilisons un paramètre d'efficacité du renforcement, défini par :

$$R_e = \frac{P_{ur} - P_{uu}}{P_{uu}} \times 100$$

où  $P_{ur}$  est la charge ultime du pont renforcé par les boulons et  $P_{uu}$  la charge ultime du pont non renforcé.

### 7.1 Nombre de boulons post-contraints

Le nombre de boulons post-contraints considéré par poutre était 0, 6, 10 et 20. Ces boulons de 12.5 mm de diamètre étaient uniformément distribués sur chaque poutre du pont. La post-contrainte dans les boulons était de 320 MPa. Les modèles sont identifiés par NR<sub>0</sub>, NR<sub>6</sub>, NR<sub>10</sub> et NR<sub>20</sub> respectivement. Dans ce cas, nous comparerons les résultats avec le pont parfaitement composite, où 40 éléments de goujon de 12.5 mm de diamètre ont été utilisés (identifiés par NR<sub>40</sub>). Le modèle de frottement avec dégradation a été utilisé à l'interface où  $\mu_0 = 0.5$  et  $\omega = 0.1$ .

La mode de rupture du pont non renforcé est le déversement élasto-plastique, alors que pour les ponts renforcés le mode de rupture est la plastification de la section d'acier en flexion.

Le tableau 3 présente les résultats obtenus numériquement. Nous remarquons que l'augmentation de la charge de rupture n'est pas proportionnelle au nombre de

boulons post-contraints utilisés. L'utilisation de 20 boulons n'augmente pas significativement la capacité ultime du pont par rapport au pont avec 10 boulons. Ceci est important, étant donné le coût d'installation sur place des boulons : pour le double du coût d'installation, l'augmentation de la capacité ultime n'est que de 7%.

La capacité ultime obtenue avec 40 goujons correspond à la limite supérieure qui peut être obtenue pour ce pont (action composite totale). Nous remarquons qu'il y a un gain de 15,0% de capacité ultime pour le modèle NR<sub>40</sub> par rapport au modèle NR<sub>10</sub> et de 11% par rapport au modèle NR<sub>20</sub>.

Modèle	nombre de boulons	P <sub>u</sub> [kN]	mode de rupture	R <sub>e</sub> (%)
NR <sub>0</sub>	0	112	déversement	-
NR <sub>6</sub>	6	144	flexion	29
NR <sub>10</sub>	10	166	flexion	48
NR <sub>20</sub>	20	173	flexion	55
NR <sub>40</sub>	40	192	flexion	71

Tableau 3. Effet du nombre de boulons post-contraints

## 7.2 Niveau de post-contrainte

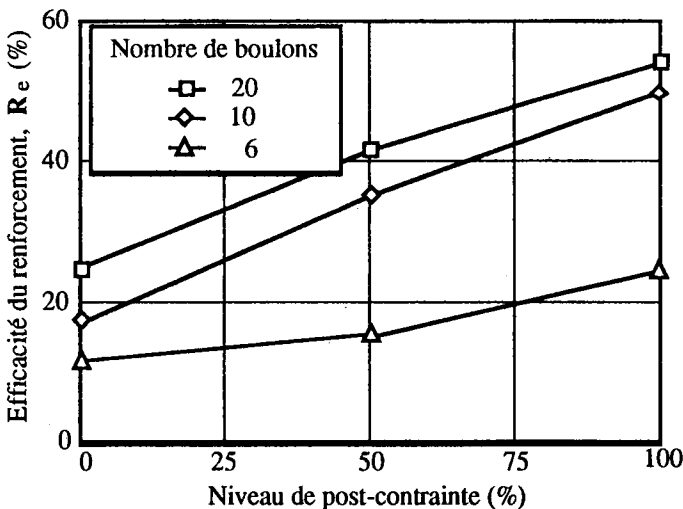


Figure 15. Efficacité du renforcement en fonction du niveau de post-contrainte.

Afin d'étudier l'effet du niveau de la post-contrainte dans les boulons, le même modèle que précédemment a été utilisé. Trois niveaux ont été considérés : 0, 50 et 100% de la post-contrainte précédente (320 MPa). Dans le cas où la post-contrainte



est nulle, les boulons ne font que maintenir en contact la dalle de béton et les poutres d'acier. Cependant, en cours de chargement, dû aux non-linéarités géométriques, une contrainte axiale peut être induite dans les boulons. Nous avons utilisé respectivement 6, 10 et 20 boulons post-contraints pour les trois niveaux de précontrainte énumérés précédemment. La figure 15 montre le paramètre  $R_e$  en fonction des variables précédentes.

L'efficacité du renforcement augmente avec le niveau de post-contrainte induit dans les boulons. L'efficacité du renforcement est faible pour le cas avec 6 boulons pour 0 et 50% de post-contrainte, car nous avons obtenu un mode de rupture par flambage local de l'aile supérieure d'une des poutres d'acier. Également, les boulons post-contraints ont plastifié.

### 7.3 Type de chargement

Le mode de chargement considéré jusqu'à maintenant était deux charges concentrées placées symétriquement sur le pont. Nous avons considéré dans la présente étude, six charges d'intensité égale uniformément réparties le long de la portée du pont. Dans un cas, nous avons localisé ces charges sur la ligne centrale du pont et dans un autre cas, les charges étaient excentrées à une distance de  $b/2$  par rapport au bord du pont où  $b$  est la demi-largeur de la dalle de béton.

Le renforcement considéré est de 0, 6 et 10 boulons post-contraints à 320 MPa pour le chargement centré et 0 et 10 boulons pour celui excentré.

La figure 16a) illustre le moment maximum développé à la section centrale pour le cas où il y a deux charges et six charges réparties sur le pont. En général, le chargement distribué permet de développer un moment ultime supérieur par rapport au cas où il n'y a que deux charges. Ceci est dû au fait que les charges distribuées permettent de développer des forces de frottement d'une manière plus uniforme le long des poutres. De même, il a été observé que la plupart des boulons post-contraints ont plastifié pour le cas avec deux charges, alors que seulement deux boulons ont plastifié pour le cas des six charges distribuées.

La figure 16b) montre les résultats pour deux charges concentriques et excentriques. Dans le cas où il n'y a pas de boulons, la rupture survient par déversement élastique lorsque le chargement est excentrique. Dans le cas où il y a 10 boulons post-contraints, le comportement ne diffère pas beaucoup par rapport au chargement concentrique.

## 8. Conclusions

En se basant sur la comparaison des résultats numériques avec des résultats expérimentaux, nous concluons :

- que le modèle aux éléments finis proposé est adéquat pour prédire le comportement à l'ultime de ponts non composites et composites;
- que lorsque nous utilisons des éléments de contact en présence de boulons post-contraints, il est primordial d'utiliser un modèle de frottement avec dégradation pour éviter de surestimer la capacité ultime des ponts;
- que le frottement à l'interface acier-béton pour les ponts non-composites est généralement suffisant pour stabiliser les poutres contre le déversement

transversal. Ceci n'est pas nécessairement valable lorsque les poutres sont très élancées [LIN 93].

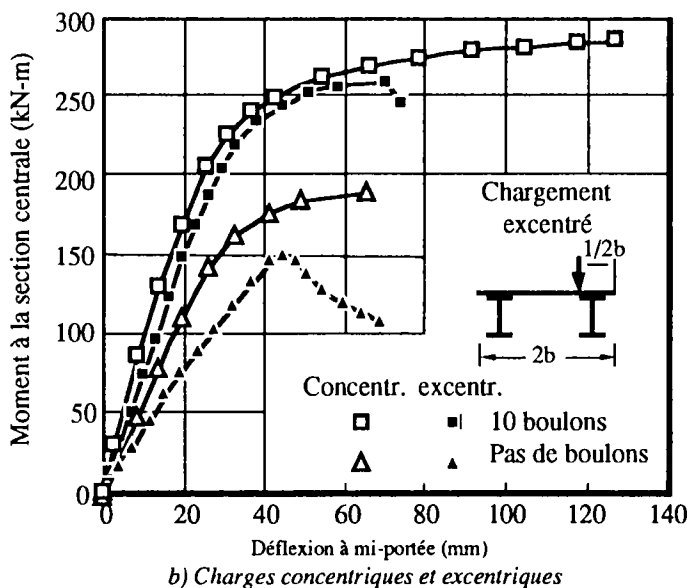
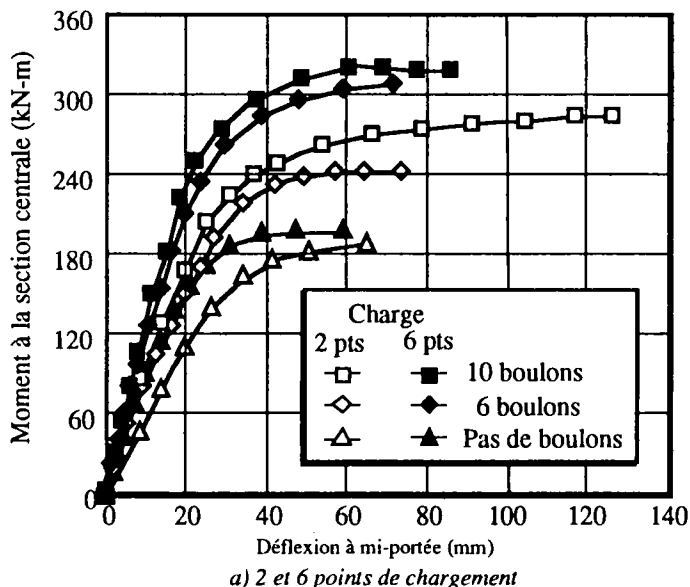


Figure 16. Moment versus déflexion à mi-portée pour différents cas de chargement.

En nous basant sur l'étude paramétrique de l'efficacité du renforcement de ponts non-composites, nous concluons :

- que la présence de boulons post-contraints augmente en tout temps la capacité ultime de ponts initialement non composites;
- que pour un pont non renforcé donné, l'efficacité du renforcement dépend du nombre de boulons utilisés et de l'intensité de la précontrainte. L'étude a démontré qu'il existe un nombre optimal de boulons lorsque l'on considère les coûts d'installation de ceux-ci;
- que l'efficacité du renforcement est influencée par la position des charges et le type de chargement. Une plus grande efficacité est atteinte pour les ponts chargés uniformément dans la direction longitudinale;

Plusieurs paramètres restent à étudier, dont entre autres l'effet des chargements cycliques sur ce type de ponts. Cependant, dans le contexte où un pont est trop faible pour supporter les charges actuelles sur le réseau routier, le mode de renforcement proposé demeure une alternative valable pour augmenter la durée de vie d'un pont existant de dix à quinze ans avant son remplacement.

## 9. Remerciements

Les auteurs remercient les organismes suivants qui ont contribué au financement du projet : le Ministère des Transports du Québec, le Fonds FCAR du Québec, et le CRSNG du Canada.

## 10. Références

- [AKO 87] AKOUSSAH E., DHATT G., BEAULIEU D., *Analyse non linéaire des structures à parois minces par éléments finis et son application aux bâtiments industriels*, Rapport GCT-87-07, dép. de génie civil, Université Laval, Québec, Canada, 1987.
- [BAT 90] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis* :, Vol. 1 et 2, Hermès, France, 1990.
- [CUR 84] CURNIER A., « A theory of friction », *Int. J. of Solids and Structures*, 20 (7), pp. 637-647, 1984.
- [DHA 86] DHATT G., MARCOTTE L., MATTE Y., « A new triangular discrete Kirchhoff plate shell element », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg*, 23, pp. 453-479, 1986.
- [DIO 91] DIONNE G., PICARD A., BEAULIEU D., *Comportement expérimental des ponts acier-béton avec dalle de béton non-participante*, Rapport interne, Dép. de génie civil, Université Laval, Québec, Canada, 1991.

- [FAF 87] FAFARD M., DHATT G., BEAULIEU D. *Calcul automatique des configurations pré et post-flambement en calcul non linéaire des structures*, Rapport GCT-87-06, Dép. de génie civil, Université Laval, Québec, Canada, 1987.
- [FAF 89] FAFARD D., DHATT G., BATOZ J.L., « A new discrete Kirchhoff plate/shell element with updated procedures », *Computers and Structures*, 31 (4), pp. 591-606, 1989.
- [FRE 78] FREY F., *L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique*, Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique, 1978.
- [GUO 87] GUO Y.Q., *Analyse non linéaire statique et dynamique des poutres tridimensionnelles élasto-plastiques*, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1987.
- [KLA 85] KLARBRING A., « The influence of slip hardening and interface compliance on contact stress distributions - A mathematical programming approach », *Studies in Appl. Mech. - Mech. of Mat. Interfaces, Series II*, Ed. A.P.S. Silvadurai et G.Z. Boyiadjis, pp. 43-59, 1985.
- [KUP 73] KUPFER H.B., GERSTLE K.H., « Behaviour of concrete under biaxial stresses », *J. of Eng. Mech. Div., ASCE*, 99 (4), pp. 853-866, 1973.
- [LAB 91] LABONTÉ J., BEAULIEU D., PICARD A., *Étude expérimentale du coefficient de friction entre le béton et l'acier*, Rapport GCT-91-02, Dép. de génie civil, Université Laval, Québec, Canada, 1991.
- [LIN 91] LIN J.J., FAFARD M., BEAULIEU D., MASSICOTTE B., « Nonlinear analysis of composite bridges by the finite element method », *Computers and Structures*, 50 (5), pp. 1151-1167, 1991.
- [LIN 93] LIN J.J., BEAULIEU D., FAFARD M., *Nonlinear analysis of slab-on-steel girder bridges by the finite element method*, Rapport GCT-93-10, dép. de génie civil, Université Laval, Québec, Canada, 1993.
- [MAS 90a] MASSICOTTE B., ELWI A.E., Mac GREGOR J.G., « Tension-stiffening model for planar reinforced concrete members », *J. Struct. Engrg, ASCE*, 116 (9), pp. 3039-3058, 1990.
- [MAS 90b] MASSICOTTE B., Mac GREGOR J.G., ELWI A.E., « Behaviour of concrete panels subjected to axial and lateral loads », *J. of Struct. div., ASCE*, 116 (9), pp. 2324-2343, 1990.
- [MTO 87] MINISTRY OF TRANSPORTATION OF ONTARIO, *Ontario highway bridge design code*, Downsview, Ontario, Canada, 1983.

- [OLL 71] OLLGAARD J.G., SLUTTER R.G., FISHER J.W. « Shear strength of stud connectors in light-weight and normal-weight concrete », *Engrg Journal, AISC*, 8, pp. 55-64, 1971.
- [PAN 85] PANAGIOTOPOULOS P.D.. « Hemivariational inequalities in frictional contact problems and applications », *Studies in Appl. Mech. - Mech. of Mat. Interfaces, Series II*, Ed. A.P.S. Silvadurai et G.Z. Boyiadjis, pp. 25-41, 1985.
- [PLE 85] PLESHA M., BELYTSCHKO T., « On the modeling of contact problems with dilatation », *Studies in Appl. Mech. - Mech. of Mat. Interfaces, Series 11*, Ed. A.P.S. Silvadurai and G.Z. Boyiadjis, pp. 63-77, 1985.
- [RAB 88] RABBAT B.G., RUSSEL H.G., « Friction coefficient of steel on concrete », *J. Struct. Engrg, ASCE*, 111 (3), pp. 505-515, 1988.
- [SAE 64] SAENZ L.P., « Discussion of equation for the stress-strain curve of concrete », *ACI Journal*, 61 (9), pp. 1129-1235, 1964.
- [SIM 86] SIMO J.C., TAYLOR R.L., « A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity », *Int. J. for Num. Meth. in Engrg*, 22, pp. 649-670, 1986.
- [YAM 68] YAM L.C.P., CHAPMAN J.C., « The inelastic behaviour of simply supported composite beams of steel and concrete », *Proc. of Inst. of Civil Engrg*, 41, pp. 651-683.
- [YAM 72] YAM L.C.P., CHAPMAN J.C., « The inelastic behaviour of continuous composite beams of steel and concrete », *Proc. of Inst. of Civil Engrg*, 153, pp. 407-501.
- [YAM 90] YAMAGUCHI E., CHEN W.F., « Cracking model for finite element analysis of concrete », *J. of Mech. Engrg., ASCE*, 116 (6), pp. 1242-1260, 1990.