
Synthèse de quelques méthodes de génération de maillages Eléments finis

Paul Louis George

INRIA

Domaine de Voluceau

Rocquencourt

BP 105

78153 Le Chesnay cedex

RÉSUMÉ. Toute simulation par la méthode des Eléments Finis de problèmes physiques modélisés en termes d'équations aux dérivées partielles nécessite dans une première phase la construction d'un maillage du domaine de calcul. Cet article se propose de présenter rapidement les principales méthodes permettant la génération de tels maillages en introduisant les récents développements liés aux algorithmes associés.

ABSTRACT. this paper describes some practical approaches to be used for the purpose of generation of meshes related to Finite Element computation of physical problems discretised in terms of P.D.E. .

MOTS -CLÉS : génération de maillages, éléments finis.

KEY WORDS : meshes generation, Finite Element.

1. Introduction

La simulation numérique par la Méthode des Eléments Finis [5] de nombreux problèmes physiques formulés en termes d'équations aux dérivées partielles nécessite, dans une première étape, la construction d'un maillage du domaine de calcul. Cette étape est généralement longue et coûteuse.

Nous allons présenter la façon de procéder pour obtenir un tel maillage. Après avoir donné une définition de cette notion de maillage, nous allons introduire une méthodologie adaptée permettant la conception de tels maillages. Les principaux algorithmes de génération de maillages en dimensions 2 et 3 sont alors présentés. Cette description comprend la

description classique des méthodes et les derniers développements correspondants. On donne ensuite quelques méthodes de manipulation de maillages puis quelques remarques sur les méthodes d'adaptation.

Pour une étude plus détaillée, on pourra se reporter à [9] qui inclut une importante bibliographie ainsi qu'aux références indiquées dans ce papier.

2. Notion de maillages

2.1. Définition formelle

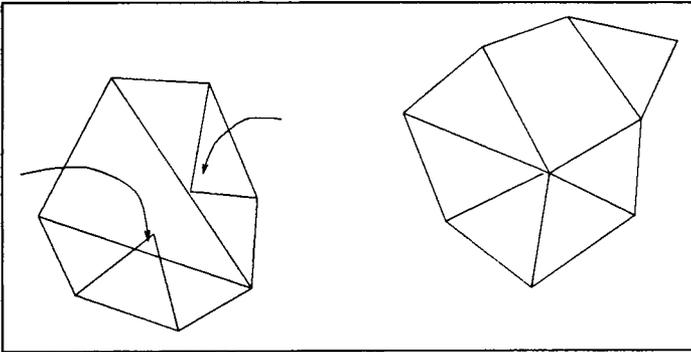


Figure 1: *Maillages conforme (à droite) et non conforme (à gauche).*

Un maillage d'un domaine Ω est un ensemble M d'éléments E_i tel que : $\bar{\Omega} = M = \cup_i E_i$. Nous considérons délibérément le cas des maillage non structurés. Par suite les E_i peuvent être des segments, des triangles, des quadrangles en dimension 2 ou ces mêmes éléments et des tétraèdres, des pentaèdres et des hexaèdres en dimension 3. M doit être *conforme* (voir figure 1), c'est-à-dire que:

- l'intersection de deux éléments E_i et E_j de M doit être soit vide, soit réduite à un point, une arête ou une face.

Cette définition revient à indiquer que M recouvre Ω de manière *conforme*, elle correspond à une approche essentiellement géométrique.

2.2. Définition pratique

Afin de pouvoir utiliser un maillage pour effectuer des calculs par la Méthode des Eléments Finis, il convient, à coté de l'aspect géométrique vu ci-dessus, de rajouter des attributs de nature physique. Grâce à ceux-ci la localisation des conditions limites et des matériaux pourra être effectuée et par suite les valeurs numériques des cas de charges, des blocages, des caractéristiques de ces matériaux, ... pourront être affectées.

3. Structurations associées

Un maillage comporte donc des informations de type géométrique qui concernent la description du recouvrement du domaine considéré auxquelles s'ajoutent des informations de type physique liées à la nature des équations modélisant le problème traité. Il est commode de définir une *Structure de Données* contenant sous forme *condensée* et *accessible* l'ensemble de ces valeurs.

- Point de vue géométrique: Il concerne la description des éléments du maillage, ceux-ci peuvent être connus de différentes façons :
 1. via la liste de leurs sommets et des définitions implicites de leurs arêtes et faces à partir de ces sommets.
 2. de manière descendante: les éléments sont décrits comme des volumes, ceux-ci sont connus via leurs faces, ces dernières le sont par leurs arêtes, elles mêmes étant référencées par leurs deux extrémités.
 3. d'autres formes de description sont envisageables, en particulier liées à une éventuelle spécificité des calculs que l'on désire réaliser.
- Point de vue physique: Pour connaître la nature d'un élément (le matériau dont il est constitué), il est commode de lui associer un *numéro de matériau*; pour pouvoir définir les conditions limites du problème, il est naturel d'affecter un *numéro de référence* à chaque constituant des éléments (faces, arêtes et nœuds).

De la sorte une description par lots des valeurs physiques est obtenue; tous les éléments de numéro de matériau donné sont de tel ou tel type, toutes les faces de numéro de référence donné sont soumises à telle ou telle sollicitation.

La *Structure de Données* permettant de stocker l'ensemble de ces valeurs doit être conçue de façon à permettre un accès rapide à telle ou telle information. La solution à retenir, dépendant du type de problème traité, n'est pas unique; par suite il n'est pas surprenant de constater qu'il n'existe pas une structuration unique [20] pour le stockage des maillages.

4. Méthodologie

Pour créer un maillage, l'approche la plus naturelle se base sur la *conception descendante* et sur la *réalisation ascendante*, voir par exemple [8]. Cette façon de procéder présente de nombreux avantages: un domaine complexe est décomposé en sous-parties plus simples et bien adaptées aux algorithmes de maillages, chacune de ces parties est décrite de nouveau de façon descendante (volumes, faces, lignes puis points). Ensuite, la réalisation part des définitions les plus basses pour remonter aux items de rang plus élevé (sans perte d'informations): le maillage des parties simples est d'abord construit puis, pas à pas, l'objet final est défini.

Cette méthode assure de manière évidente une garantie sur le résultat final au sens où si les maillages "simples" sont corrects, le maillage final l'est aussi.

5. Algorithmes de génération pure

Dans cette section nous allons présenter brièvement les principales méthodes actuellement utilisées ou faisant l'objet de recherches dans le domaine de la génération des maillages.

5.1. Générateurs de maillages en dimension 2

Cinq classes de générateurs sont couramment utilisées pour la création de maillages en dimension 2. Ces maillages pourront être par la suite manipulés et recombinaés de façon à créer de nouveaux maillages de complexité plus grande.

5.1.1. Définition manuelle

A partir de la donnée de toutes les informations constitutives d'un maillage, on construit la Structure de Données associée à celui-ci. Cette approche convient dans le cas où peu d'éléments sont à créer (il faudra en effet les décrire un à un) ou dans celui où il est possible de définir (par exemple à l'aide d'un programme) tant les coordonnées des sommets du

maillage que les liaisons entre ces sommets. Le maillage résultat pourra par la suite être, par exemple, redécoupé afin d'obtenir un recouvrement plus fin et plus fidèle du domaine.

5.1.2. Méthode algébrique

Par cette approche on pourra créer le maillage de tout domaine de topologie simple (un segment, un triangle ou un quadrangle déformé). La partition du domaine sera liée à la position et aux nombres de points présents sur son contour. La donnée de ce maillage est donc une discrétisation du contour du domaine traité, c'est-à-dire un maillage de ce contour sous la forme de segments. Le nombre de points sur deux cotés logiquement connectés est supposé identique. Cette technique se décompose en plusieurs phases:

1. Transport sur les côtés de l'élément unité de même nature que le domaine des points du contour de ce dernier en conservant les distances relatives entre ces points.
2. Maillage canonique de l'élément unité. Ce maillage revient à connecter les points se correspondant d'un côté à l'autre du domaine unité.
3. Transport de ce maillage de référence sur le domaine réel. Soient \hat{M} un point du maillage canonique, \hat{x} et \hat{y} ses coordonnées, f_i une paramétrisation du côté i du domaine et a_i les sommets de ce dernier, on calcule l'image M , de coordonnées x et y , du point \hat{M} comme:

$$M = \frac{1 - \hat{x} - \hat{y}}{1 - \hat{x}} f_1(\hat{x}) + \frac{\hat{x}}{1 - \hat{y}} f_2(\hat{y}) + \frac{\hat{y}}{\hat{x} + \hat{y}} f_3(1 - \hat{x} - \hat{y}) - \left(\frac{\hat{y}}{\hat{x} + \hat{y}} (1 - \hat{x} - \hat{y}) a_1 + \frac{1 - \hat{x} - \hat{y}}{1 - \hat{x}} \hat{x} a_2 + \frac{\hat{x}}{1 - \hat{y}} \hat{y} a_3 \right)$$

pour un domaine topologiquement analogue à un triangle et, avec les mêmes notations, comme:

$$M = (1 - \hat{y}) f_1(\hat{x}) + \hat{x} f_2(\hat{y}) + \hat{y} f_3(\hat{x}) + (1 - \hat{x}) f_4(\hat{y}) - ((1 - \hat{x})(1 - \hat{y}) a_1 + \hat{x}(1 - \hat{y}) a_2 + \hat{x} \hat{y} a_3 + (1 - \hat{x}) \hat{y} a_4)$$

pour un domaine topologiquement analogue à un quadrangle.

Ces transformations respectent les sommets et les côtés du domaine (d'autres transformations assurant la même propriété sont envisageables,

toutes supposant implicitement que le domaine est convexe ou pas trop éloigné d'une forme convexe).

Le maillage résultat sera composé d'éléments de même nature que le domaine traité considéré du point de vue topologique. Cette méthode est rapide mais conduit à des résultats faux quand le domaine traité s'éloigne vraiment d'une forme convexe.

Dans ce dernier cas, on peut envisager des corrections locales permettant, à faible coût, d'obtenir néanmoins un maillage correct. On détecte d'abord, en calculant simplement des surfaces, les zones comportant des éléments faux. Par exemple, dans le cas d'un maillage en quadrangles, pour décider si un quadrangle, $ABCD$, est incorrect, on calcule les surfaces des triangles ABC , ACD , ABD et BDC et on compte le nombre de surfaces négatives ou nulles. Ce nombre indique exactement si le quadrangle examiné est correct (i.e. de surface positive et convexe), non convexe (bien que de surface positive), croisé ou retourné. Les corrections locales des éléments consistent à bouger les points libres en augmentant un critère permettant de corriger les défauts (par exemple, pour un élément négatif, le critère est la surface).

Notons enfin qu'il est possible de construire une méthode de blocs (décrite rapidement dans le cas de la dimension 3) utilisant localement ces méthodes algébriques. Le problème, dans ce cas, est de définir des blocs tels que la méthode algébrique employée produise un maillage correct.

5.1.3. Méthode frontale ou méthode d'avancée de front

Adaptée aux géométries quelconques, ce type de mailleur va construire le recouvrement du domaine en triangles, à partir essentiellement des points de son contour. Il utilise comme donnée ce contour et plus précisément une approximation polygonale de ce dernier (c'est-à-dire une liste de segments) enrichie, le cas échéant, de points et arêtes (internes) spécifiés au départ qu'il conviendra de respecter.

Le processus est itératif: à partir d'un front donné (initialisé par l'ensemble des items du contour du domaine), une analyse des propriétés géométriques des items présents (points et arêtes) permet de sélectionner une zone de départ. Selon la nature de cette zone, on va former un ou plusieurs triangles. Cette construction de fait en:

- considérant les propriétés géométriques des items (points, arêtes et éléments) proches de la zone traitée;

- créant un point (jugé optimal) ou en prenant un point existant qui est connecté aux arêtes voulues de la zone de départ et forme ainsi de nouveaux éléments.

Un nouveau front est alors formé en éliminant du front actuel les arêtes du ou des éléments construits qui sont communes avec le front précédant et en insérant à leur place la ou les arêtes construites non communes à deux triangles. Ce nouveau front est alors traité par la même méthode. Quand le front est réduit à l'ensemble vide, le maillage final est obtenu; il peut être régularisé pour obtenir des triangles de meilleure qualité. Les difficultés liées à cette méthode sont clairement identifiées:

- lors de la création d'un point, il faut s'assurer que le point est intérieur au domaine;
- en cas de données disparates, la méthode induit la rencontre de fronts composés d'éléments de tailles très différentes qu'il convient de raccorder.

Le premier problème conduit à résoudre des problèmes d'intersection tandis que le second nécessite la création d'une structure de contrôle permettant, à chaque stade, de savoir où on est (nature des éléments, arêtes et points voisins de la zone considérée) et de savoir où on va (nature de ces mêmes items en "face" de la zone traitée). On présente dans [21] quelques solutions à ces problèmes, l'idée de base étant de coupler la présente méthode avec les premiers pas d'une méthode de type Voronoï (jusqu'à obtention du maillage *frontalier* décrit en 5.1.4) afin de construire aisément la structure de contrôle mentionnée ci-dessus. On notera que, à ce jour, cette approche couplant méthode de Voronoï et méthode frontale semble originale (le couplage inverse, lui, a été étudié par différents auteurs, voir par exemple [27]).

5.1.4. Méthode de type Voronoï

Pour des géométries quelconques, cette méthode [35], [24], [6] permet de construire un recouvrement en triangles, à partir, encore une fois, d'une partition polygonale du contour du domaine et des éventuels points et arêtes spécifiés au départ. La méthode comprend plusieurs phases:

1. Création du nuage de points associé aux données, c'est-à-dire les points du contour du domaine et les éventuels points spécifiés.
2. Définition de 4 points supplémentaires tels que le quadrilatère formé par ceux-ci englobe tous les points du nuage.
3. Maillage de ce quadrilatère à l'aide de 2 triangles (on note T_4 ce maillage).
4. Insertion, un à un, des points du nuage pour construire un maillage comprenant comme sommets d'éléments ces points.

Pour réaliser cette étape on utilise un *processus de remaillage local* permettant de créer un nouveau maillage à partir d'un maillage donné et d'un point interne à ce dernier de telle sorte que ce point soit sommet d'éléments.

Soient donc:

- T_{n+4} une triangulation comprenant comme sommets les n premiers points du nuage (T_4 est le recouvrement initial du quadrilatère englobant),
- P_{n+1} le point suivant de ce nuage.

D'après la phase 3 du schéma ci-dessus, le point P_{n+1} est intérieur à T_{n+4} , plus précisément P_{n+1} est interne à un élément E_i de T_{n+4} ou, P_{n+1} est sur l'arête commune à deux éléments E_j et E_k de T_{n+4} . Le troisième cas envisageable serait celui où P_{n+1} est confondu avec l'un des points déjà présents dans le maillage, cas impossible car les points du nuage donné sont supposés distincts.

A partir de E_i (ou des éléments E_j et E_k), on construit par voisinage l'ensemble D des éléments de T_{n+4} tels que:

- P_{n+1} soit interne au cercle circonscrit aux éléments de D .

Nous renvoyons, par exemple, à [24] qui démontre que cet ensemble est étoilé par rapport au point P_{n+1} . Par suite la construction de la triangulation T_{n+5} consiste à (voir la figure 2 où P désigne le point P_{n+1} et F_i sont les arêtes externes de l'ensemble D construit ci-dessous):

- (a) mettre dans T_{n+5} les éléments de T_{n+4} non inclus dans D ,

- (b) détruire les éléments de D et remailler cet ensemble en joignant le point P_{n+1} aux arêtes externes de D .

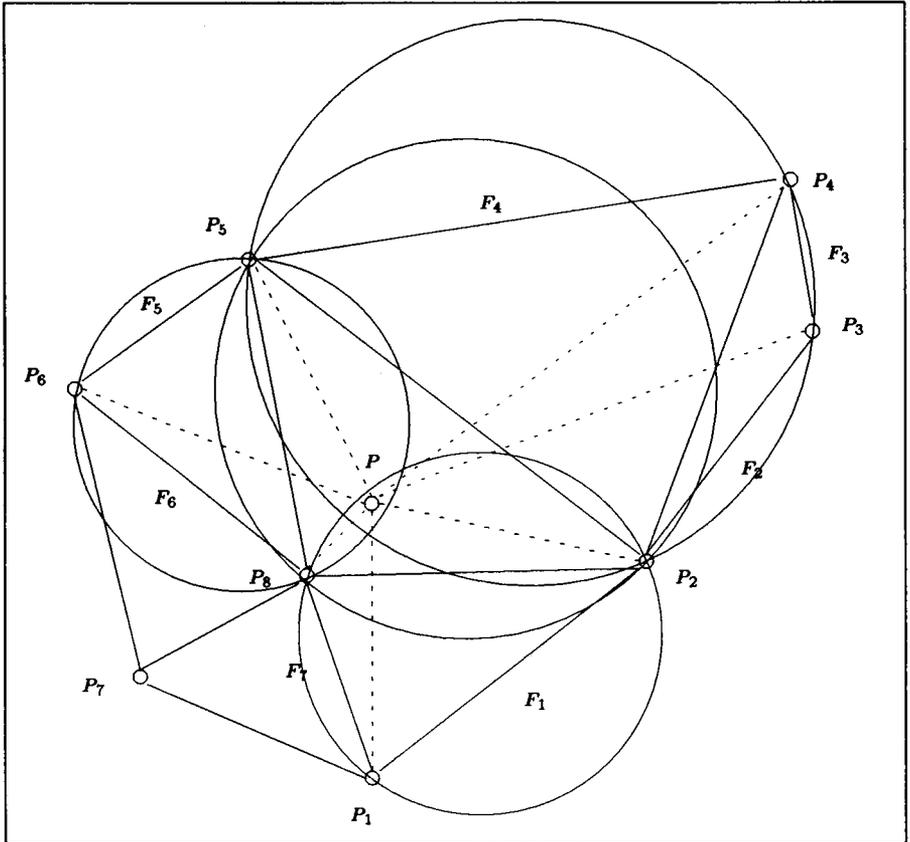


Figure 2: Insertion du point P .

Quand tous les points du nuage de départ ont été ainsi introduit, le recouvrement en triangles du quadrilatère initial est obtenu. Ce maillage "M1" comprend comme points tous les points donnés, les 4 points supplémentaires créés lors de la phase 2 et les éventuels points spécifiés au départ.

5. Reconnaissance des arêtes données dans ce maillage. Bien que sous certaines hypothèses raisonnables [19] le maillage "M1" contienne dans la liste de ses arêtes toutes les arêtes du contour servant de

donnée, en toute généralité, certaines arêtes initiales peuvent manquer. Si tel est le cas, on les force en utilisant des transformations locales. Il est alors possible de marquer les triangles par rapport à leur position vis-à-vis des arêtes du contour.

6. Elimination des éléments extérieurs à l'objet traité. Les triangles étant marqués, il suffit de conserver seulement ceux qui sont internes au domaine pour obtenir un maillage de celui-ci, soit "M2" ce maillage, dit maillage *frontalier*.
7. Création de points internes dans le maillage *frontalier*. Le maillage "M2" comprend comme sommets d'éléments uniquement les points du départ (essentiellement les points de la frontière du domaine, d'où son nom), par suite il est généralement impropre aux calculs. En utilisant le processus d'insertion de points dans un maillage existant, mentionné ci-dessus, on va créer des points internes de façon à obtenir un maillage "M3" constitué de triangles de bonne qualité. La génération des points internes peut se faire de plusieurs manières. Historiquement, on ajoutait, par barycentrage pondéré, un point interne dans chaque élément jugé trop grand jusqu'à obtention du résultat. On s'oriente maintenant vers une approche plus globale: tous les points internes nécessaires sont générés en une seule fois (via une méthode algébrique appliquée à chaque arête interne du maillage) puis insérés.
8. Régularisation du résultat. Le maillage peut être maintenant régularisé par déplacement des points internes au barycentre de leur voisins. On note que dans la plupart des cas, une génération judicieuse des points internes implique qu'il n'est pas utile d'effectuer une telle régularisation.

Plus que toute autre méthode, ce schéma est sensible aux erreurs de calcul dans la mesure où on attend, par exemple dans la phase d'insertion de points, une réponse booléenne (oui-non) pour décider si un point est dans un cercle ou non. On trouvera dans [10] une réponse à ce délicat problème.

5.1.5. Méthode basée sur l'utilisation d'un "quadtree"

Ce type de mailleur [4], [37] va construire le recouvrement du domaine considéré à partir des points de son contour.

1. Un premier rectangle est formé qui contient tous les points du contour. La méthode consiste à découper, à partir de ce rectangle initial, chaque rectangle (ou père) en 4 rectangles (ou fils), de façon récursive, jusqu'à obtention d'une partition du rectangle initial en éléments quadrangulaires tels que chacun contienne au plus un seul point du contour. Cette dernière propriété permet de contrôler la taille de chaque maille (voir figure 3, partie gauche, la partie droite de cette figure montre le résultat obtenu après élimination des mailles extérieures).

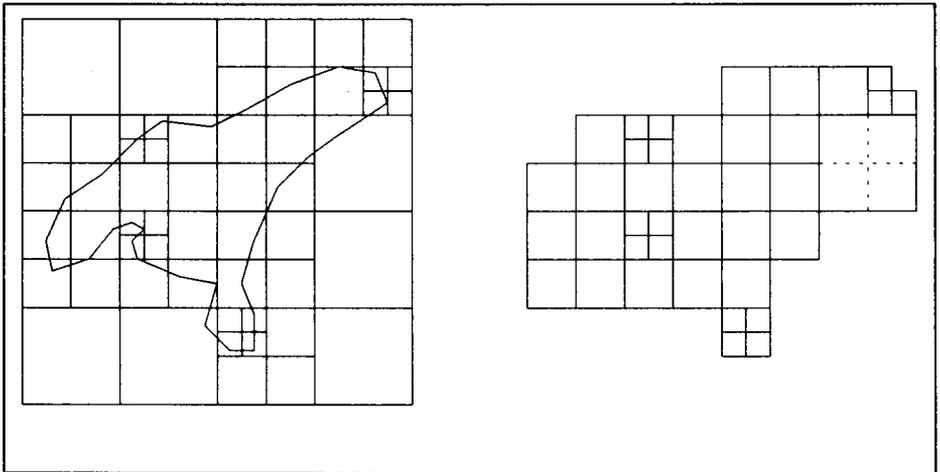


Figure 3: *Quadtree initial.*

2. La partition issue de l'étape ci-dessus est équilibrée par définition de fils de telle sorte qu'au plus un point intermédiaire existe sur une arête d'une maille.
3. Une analyse des mailles ainsi générées est menée:
 - Maille extérieure ne contenant aucun point: une telle maille est détruite,
 - Maille intérieure ne contenant aucun point: une telle maille produit un quadrangle (qui peut être découpé en triangles) si ses arêtes ne possèdent pas de points intermédiaires ou est découpée en triangles dans le cas inverse,

- Maille contenant un "morceau" du contour: les points intersections du contour et des arêtes de la maille sont créés, on définit de la sorte une partition de la maille dont on ne garde que la partie interne au domaine (le contour discret final du maillage est donc formé à ce stade).
4. Une régularisation des points internes est alors effectuée (les points internes sont les sommets hors contour des mailles de la partition issue de l'étape 2 de ce processus).

Remarque : Il existe de nombreuses variantes de cette méthode dont l'une consiste à plaquer une grille régulière sur le domaine puis à la corriger (version n'utilisant pas la structure de quadtree).

En règle générale, ce type d'algorithme conduit à des maillages de bonne qualité sauf éventuellement au voisinage des frontières.

5.2. Générateurs de maillages en dimension 3

Sept classes de générateurs sont actuellement envisageables pour la création de maillages en dimension 3. Comme en dimension 2, les maillages ainsi produits pourront être par la suite manipulés et recombinaés afin de former de nouveaux maillages plus complexes.

5.2.1. Définition manuelle

A partir de la donnée de toutes les informations constitutives d'un maillage, la Structure de Données associée à celui-ci est construite. Les cas d'application de cette approche restent ceux mentionnés dans le cadre de la dimension 2.

5.2.2. Méthode de type produit

Adaptée aux géométries de type cubique ou cylindrique, cette méthode va construire le recouvrement du domaine en hexaèdres (qui pourront être redécoupés par la suite), pentaèdres ou tétraèdres.

La donnée d'un maillage bidimensionnel et d'une ligne maillée dans une "troisième" direction permet de construire l'empilement des éléments tridimensionnels obtenus comme "produit" des éléments initiaux avec les points de la troisième direction.

A chaque segment du maillage initial est associée une série de quadrangles dans l'espace, au triangle sont associés des pentaèdres, au quadrangle des hexaèdres.

Afin de permettre de traiter des domaines comprenant l'axe du "cylindre" associé, il est nécessaire de considérer les cas de dégénérescence

possible (voir figure 4), un quadrangle donnant lieu à la création de pentaèdres et non plus d'hexaèdres.

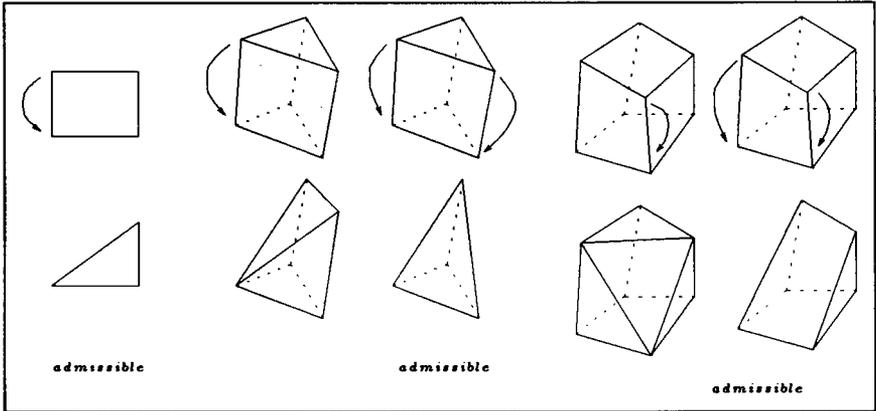


Figure 4: *Correspondances avec dégénérescences.*

5.2.3. Méthode de blocs avec un procédé local algébrique

Pour des géométries quelconques, cette approche [7] permet de construire le recouvrement en Eléments Finis à partir du découpage structuré d'un maillage grossier du domaine. Ce dernier recouvrement est composé de blocs de géométrie simple (lignes, triangles, quadrangles, tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres). Le découpage est guidé par la présence de points sur les arêtes du maillage grossier et sera lié à leurs positions relatives. On peut résumer cette approche de la façon suivante:

1. Maillage des faces des éléments grossiers. Les points des arêtes sont utilisés et par application du procédé vu dans le cadre 2D (méthode algébrique ou tout autre procédé équivalent), on génère la partition en sous éléments de chaque face.
2. Maillage des blocs. Considérant chaque élément du maillage grossier et le maillage de leurs faces, on va créer le maillage du bloc par découpage de celui-ci. Pour ce faire on:
 - transporte sur les faces de l'élément unité de même nature que le bloc les points des faces de ce dernier en conservant les distances relatives entre ces points.

- maille de manière canonique l'élément unité, ce qui revient à connecter les points se correspondant d'une face à l'autre du domaine unité.
- transporte ce maillage de référence sur le domaine réel. Cette opération se fait en utilisant la méthode algébrique (vue en dimension 2 dans le cas du triangle et du quadrangle) associée au type du bloc considéré (une variante consiste, par exemple, à utiliser localement une méthode elliptique [33]).

Dans le cas d'un domaine analogue, topologiquement, à un hexaèdre, une transformation (inédite à ce jour, il s'agit d'une variante d'une transformation introduite par [29]) possible est donnée par:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^6 \beta_i f_i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{\sum_{i=1}^6 \alpha_i},$$

avec f_i la paramétrisation de la face i du domaine et α_i et β_i les fonctions :

$$\alpha_i = (1 - x_{i-1}) \frac{x_i}{(x_i + x_{i-1})} \frac{1 - x_i}{(1 - x_i + x_{i-1})} \frac{x_{i+1}}{(x_{i+1} + x_{i-1})} \frac{1 - x_{i+1}}{(1 - x_{i+1} + x_{i-1})},$$

pour $i = 1, 3$ et $x_{j+1} = \hat{x}, \hat{y}$ ou \hat{z} , $j = 0, 2$ (j modulo 3).

$$\alpha_{i+3} = x_{i-1} \frac{x_i}{(x_i + 1 - x_{i-1})} \frac{1 - x_i}{(2 - x_{i-1} - x_i)} \frac{x_{i+1}}{(x_{i+1} + 1 - x_{i-1})} \frac{1 - x_{i+1}}{(2 - x_{i+1} - x_{i-1})},$$

pour $i = 1, 3$ et

$$\beta_i = (1 - x_{i-1})(\alpha_i + \alpha_{i+3}) \quad i = 1, 3$$

$$\beta_{i+3} = x_{i-1}(\alpha_i + \alpha_{i+3}) \quad i = 1, 3$$

Comme dans le cas de la dimension 2, le maillage résultat sera composé d'éléments de même nature que le bloc considéré du point de vue topologique. Cette méthode est rapide mais présente les mêmes défauts qu'en dimension 2 dans le cas où le bloc traité

s'éloigne d'une forme convexe. S'affranchir de ce problème revient à définir un nombre suffisant de blocs de telle sorte que chacun soit acceptable de ce point de vue. Il s'agit la du prix à payer pour pouvoir appliquer la méthode et obtenir un maillage structuré.

3. Enumération des éléments issus du découpage. Pour obtenir les éléments composant le maillage du bloc, il suffit d'énumérer leurs sommets.
4. Recollement des maillages des différents blocs. Cette opération est triviale dès lors que les points des faces communes à deux blocs sont numérotés de façon globale.

5.2.4. Méthode frontale ou méthode d'avancée de front

Adaptée aux géométries quelconques, ce type de mailleur [26], [28], [22] va construire le recouvrement du domaine en tétraèdres, à partir des faces de son contour. Il utilise donc comme donnée ce contour et plus précisément une approximation polyédrique de ce dernier (une liste de triangles) complétée, le cas échéant, de points, arêtes et faces spécifiés au départ.

Le processus est itératif: à partir d'un front donné (initialisé par le contour du domaine), une analyse des propriétés (en terme de taille et d'angles) des faces de ce front et de leur voisinage permet de sélectionner une zone de départ.

Selon les cas un élément est créé avec les faces retenues ou un point interne est généré qui sert de sommet aux éléments le joignant aux faces sélectionnées.

Un nouveau front est formé en éliminant du front actuel les faces du ou des éléments construits situées sur le front précédant et en insérant à leur place la ou les faces construites non communes à deux tétraèdres. Ce nouveau front est alors traité par la même méthode.

Quand le front est vide le maillage final est obtenu, il peut être régularisé pour obtenir des tétraèdres de meilleure qualité.

Les difficultés liées à cette méthode sont ici, plus encore qu'en dimension 2, critiques. La méthode consistant à créer une structure de contrôle en utilisant les premiers pas d'une méthode de Voronoï s'applique dans le principe et doit permettre d'éviter ces difficultés. Nous envisageons d'étudier ce couplage et de montrer qu'effectivement, il est satisfaisant.

5.2.5. Méthode de type Voronoï

Pour des géométries quelconques, cette méthode [35], [30], [16], [19], [1], [2], [3] permet de construire un recouvrement en tétraèdres, à partir des faces décrivant le contour du domaine et, éventuellement, de la liste des points, arêtes et faces spécifiés au départ. La méthode (comme en dimension 2) comprend plusieurs phases:

1. Création du nuage de points associé aux données, c'est-à-dire les points des faces du contour du domaine et les points spécifiés.
2. Calcul de la position de 8 points supplémentaires tels que l'hexaèdre formé par ceux-ci englobe tous les points du nuage.
3. Maillage de cette boîte à l'aide de 5 tétraèdres (soit T_8 ce maillage).
4. Insertion, un à un, des points du nuage pour construire un maillage comprenant comme sommets d'éléments ces points.

Pour réaliser cette étape nous allons utiliser le processus de remaillage local décrit dans le cas de la dimension 2 dans sa version adaptée à la dimension 3. Soient donc:

- T_{n+8} une triangulation comprenant comme sommets les n premiers points du nuage (T_8 est le recouvrement initial de la boîte englobante),
- P_{n+1} le point suivant de ce nuage.

D'après la phase 3 du schéma ci-dessus, le point P_{n+1} est intérieur à T_{n+8} , plus précisément P_{n+1} est interne à un élément E_i de T_{n+8} ou P_{n+1} est sur la face commune à deux éléments E_j et E_k de T_{n+8} ou encore P_{n+1} est sur l'arête commune à plusieurs éléments E_k de T_{n+8} . Le quatrième cas envisageable serait celui où P_{n+1} est confondu avec l'un des points déjà présents dans le maillage, cas impossible (voir la dimension 2).

A partir de E_i (ou de l'ensemble des éléments sélectionnés) et par voisinage un ensemble D d'éléments de T_{n+8} est construit, il est tel que:

- P_{n+1} est interne au boule circonscrite aux éléments de D .

On démontre que cet ensemble est étoilé par rapport au point P_{n+1} . Par suite on peut construire la triangulation T_{n+9} de la façon suivante:

- (a) mettre dans T_{n+9} les éléments de T_{n+8} non inclus dans D ,
- (b) détruire les éléments de D et remailler cet ensemble en joignant le point P_{n+1} aux faces externes de D .

Quand tous les points du nuage de départ ont été ainsi introduit, le recouvrement en tétraèdres de la boîte initiale est obtenu. Ce maillage "M1" comprend comme points tous les points donnés, les 8 points supplémentaires créés lors de la phase 2 et les éventuels points spécifiés au départ.

5. Reconnaissance des faces données dans ce maillage. On cherche si le maillage "M1" contient dans la liste de ses faces toutes les faces du contour servant de donné; en dimension 3 **ce résultat n'est pas acquis** (on peut construire très simplement des exemples allant en ce sens [17]), par suite il est nécessaire d'utiliser une méthode de modification locale (voir figure 5) des éléments permettant de recréer toutes les faces données. Dans le cas où il y a des arêtes spécifiées, on réalise la même opération. Une fois cette phase effectuée il est possible de marquer les tétraèdres par rapport à leur position vis à vis des faces du contour.

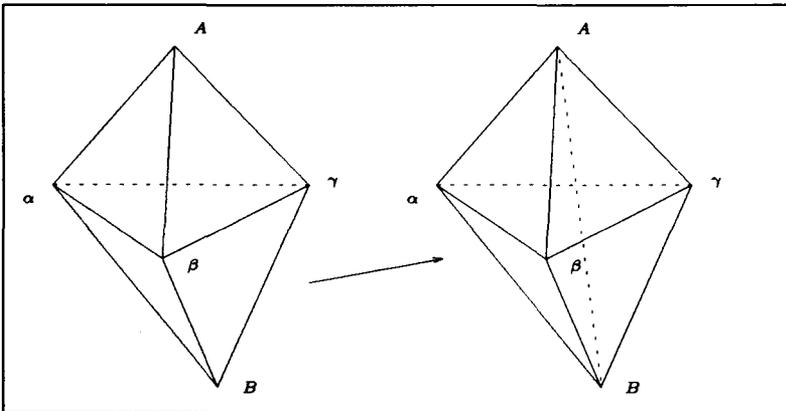


Figure 5: *Un exemple de transformation locale.*

6. Elimination des éléments extérieurs à l'objet traité. Les tétraèdres étant marqués, il suffit de conserver seulement ceux qui sont internes au domaine pour obtenir un maillage de celui-ci, soit "M2" ce maillage.
7. Création de points internes dans ce dernier maillage. Le maillage "M2" comprend comme sommets d'éléments uniquement les points du contour, par suite il est généralement impropre aux calculs. En modifiant localement "M2" et en utilisant le processus d'insertion de points vu ci-dessus, certains éléments vont être réécrits et des points internes vont être créés pour obtenir un maillage "M3" constitué de tétraèdres de bonne qualité. Les méthodes de création des points internes sont analogues au cas de la dimension 2.
8. Régularisation du résultat. Le maillage peut être maintenant régularisé par déplacement des points internes au barycentre de leur voisins. Ici, contrairement au cas de la dimension 2, la régularisation s'avère effectivement très utile pratiquement dans tous les cas.

5.2.6. Méthode basée sur l'utilisation d'un "octree"

La méthode présentée dans le cadre de la dimension 2 peut se généraliser à la dimension 3 [37], [31] la notion de quadtree est alors remplacée par celle d'octree: un père est un hexaèdre qui permet de définir 0 ou 8 fils. Le découpage de la partition composée d'hexaèdres est alors une opération plus complexe qu'en dimension 2, en particulier pour obtenir un maillage conforme, les éléments sont découpés en tétraèdres.

5.2.7. Mailleur de surfaces dans l'espace

- A partir d'un maillage 2D et d'une fonction de projection dans l'espace, on génère le maillage surfacique correspondant.
- D'une définition paramétrée ou sous forme de carreaux de la surface, on déduit le maillage de celle ci. Les principales méthodes utilisées sont les techniques algébriques (dans l'espace des paramètres) avec reprojection pour des surfaces décrites par blocs de topologie simple, superposition de grille pour un traitement plus global ou de type automatique pour des contours quelconques; notons que bien que les codes de CAO possèdent des mailleurs de surface, la littérature ne fourmille pas d'articles sur ce type de méthodes.

5.2.8. Cas particuliers

- A coté de ces générateurs généraux, il convient de mentionner d'autres outils de création de maillages adaptés à certains cas particuliers (Treillis, poutres, raccords, charnières ...)
- Dans le cadre des maillages structurés l'emploi de techniques algébriques ou elliptiques permet de ramener le problème sur un domaine de calcul de type rectangle (en dimension 2) par un changement de variables. Nous renvoyons à [33] pour ce type de méthodes.
- Pour des simulations autres que par les Eléments Finis (Volumes Finis, Différences Finis, méthodes particulières, ...) la notion même de maillage est à redéfinir.

6. Manipulation de maillages

Plusieurs types de manipulations sont possibles: les transformations géométriques usuelles, des transformations topologiques, le recollement de maillages, les modifications propres aux Eléments Finis et enfin la visualisation sous différentes formes.

6.1. Modifications géométriques

Elles permettent d'obtenir le maillage déduit par translation, symétrie, rotation ou dilatation anisotrope d'un maillage donné. Modifier un maillage revient alors à appliquer la transformation voulue sur les coordonnées des points et, dans le cas d'une isométrie négative, à retourner l'énumération des éléments (par exemple, le triangle ABC devient le triangle ACB).

6.2. Découpage local ou global

1. Découpage local. Plusieurs algorithmes sont envisageables pour affiner localement un maillage au voisinage de certains de ses sommets. Un tel processus peut être basé sur:
 - Un remaillage local autour de points sélectionnés. Dans le cas de maillages composés de *simplexes* (triangles en dimension 2 ou tétraèdres en dimension 3) une méthode du type de celle présentée dans le cas des générateurs "Voronoi" est possible ou des modifications locales peuvent être effectuées [32].

- Une découpe des éléments sélectionnés par bisection, trisection, ... peut être appliquée qui engendre par voisinage et pour des raisons de conformité une découpe des éléments voisins. Facile à mettre en oeuvre en dimension 2, ce type de modifications locales est plus délicat à concevoir en dimension 3.
2. Découpage global. Un maillage et N un paramètre de découpe sont donnés. Sur chaque arête du maillage sont définis N points intermédiaires, le procédé de partition canonique, déjà décrit, permet alors de découper tous les éléments en $(N + 1)$ éléments (cas du segment), $(N + 1)^2$ éléments (cas du triangle ou du quadrangle) ou en $(N + 1)^3$ éléments (pour les tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres) du même type que l'élément de départ.
 3. Changement de type. Cette opération appliquée aux quadrangles permet de créer deux ou quatre triangles, appliquée aux pentaèdres elle donne 3 tétraèdres tandis que pour les hexaèdres elle fournit 5 ou 6 tétraèdres. En sens inverse, partant de triangles ou de tétraèdres, il est possible de générer des quadrangles ou des hexaèdres, le découpage donne un maillage qui, quoique correct, contient des éléments généralement de très mauvaise qualité.

6.3. Recollement de 2 maillages

Le recollement consiste à construire le maillage résultant de la juxtaposition de deux maillages initiaux par identification des zones de contact communes (points, arêtes et faces). Afin d'effectuer cette opération très rapidement une technique de h-coding peut être envisagée; elle permet de retrouver rapidement les items communs aux deux maillages.

6.4. Régularisation

A coté des techniques de barycentrage pondéré permettant de régulariser un maillage figurent des méthodes itératives qui sont basées sur un déplacement des points internes à un maillage couplées avec un contrôle de l'effet ainsi obtenu (en terme de qualité, notion à définir avec soin).

6.5. Manipulations diverses

1. Définition des nœuds. Pour utiliser dans le calcul des Eléments Finis différents des éléments $P1$ (dont les seuls nœuds sont les sommets) il convient de rajouter les nœuds qui ne sont pas des sommets (sur les arêtes, les faces ou à l'intérieur des éléments) et d'indiquer que les sommets sont ou ne sont pas des nœuds.
2. Renumerotation . Afin de minimiser la place requise pour stocker les matrices calculées lors du traitement numérique, il est souvent utile de renuméroter les noeuds et éventuellement les éléments du maillage.
3. Etc...

6.6. Visualisations et appréciations des maillages

Pour apprécier les maillages construits, l'utilisation de moyens graphiques évolués (surtout dans le cadre de la dimension 3) est nécessaire; de plus un certain nombre de contrôles peut être effectué par le calcul.

1. Visualisations. Par mouvements de l'observateur, définitions de zooms, possibilités de "shrink" (rétrécissement des faces), utilisation de la couleur, prise en compte de la notion de faces cachées, ... les postprocesseurs graphiques (voir par exemple [15]) permettent de juger les maillages.

De plus pour apprécier et communiquer les résultats des calculs (champs de vitesses, de pressions, de températures, ...) ces outils doivent en particulier permettre de représenter de manière efficace les grandeurs associées (scalaires, vecteurs, tenseurs ...).

2. Appréciation. Quand la simple observation se révèle fastidieuse ou impossible, on doit utiliser une approche automatique: trouver un critère mesurant la qualité du maillage ou de la solution calculée, calculer la valeur de ce critère puis représenter sous une forme adaptée cette mesure (courbes, histogrammes, coloriations, etc...). La qualité, au sens interpolation éléments finis, d'un triangle ou d'un tétraèdre, peut s'écrire comme $Q = \alpha \frac{h}{\rho}$ où α est un coefficient de normalisation ($Q = 1$. pour un triangle équilatéral), h est le diamètre de l'élément (i.e. le plus grand côté) et ρ est le rayon du cercle (de la sphère) inscrit (inscrite).

Pour les autres types d'éléments, il est moins clair de trouver une formule mesurant la qualité valable dans tous les cas.

Le choix de Q étant fait, la qualité d'un maillage peut être déterminée comme celle de son plus mauvais élément.

7. Adaptation

Un couplage des techniques de régularisation et de découpe locale des mailles permet d'envisager la construction de maillages adaptés à la physique des problèmes traités. Dans une première phase un maillage du domaine est construit par l'emploi des approches décrites dans ce papier puis un premier calcul de la solution du problème est effectué. Après choix d'un critère pertinent (gradient de la solution ou d'un champ dérivé de celle-ci), on détecte dans le maillage initial les zones à adapter (par raffinement ou par déraffinement) et on génère un nouveau maillage mieux adapté au problème; ce processus est généralement itératif.

A coté de cette approche basée sur des modifications locales prend place une méthode plus globale. Elle consiste à utiliser un mailleur automatique en le gouvernant par un critère. Le maillage est alors entièrement recréé à chaque itération en fonction des résultats obtenus à l'itération précédente [34] et [12].

8. Les données à fournir

Les données sont, du point de vue formel et en accord avec la méthodologie proposée ci-dessus, définies de manière arborescente. Plus précisément elles sont organisées selon une hiérarchie croissante: les items simples servant à définir les items plus complexes.

8.1. Nature des données

Selon la méthode utilisée, les données consistent en tout ou partie de:

1. Une liste de *Points caractéristiques*. Ils sont connus via leur 2 (ou 3) coordonnées et leur numéro de référence.
2. Une liste de *Lignes caractéristiques*. Elles sont construites à partir des points précédemment définis. Cette description concerne leur géométrie, précise leur numéro de référence et indique leur partition en sous-segments.

3. Une liste de *Faces*. Elles sont décrites via les items ci-dessus, un numéro de référence leur est associé.
4. Des *Contours*. Un contour (dimension 2) est l'union de lignes caractéristiques, il sert à définir un domaine à mailler, à celui-ci sera affecté un numéro de sous-domaine.
5. Des *Volumes*. Ils seront définis au travers des items de rang inférieur.
6. Des *Maillages préexistants*. Ceux-ci serviront de données pour l'opération envisagée (constructions de maillages, transformations géométriques ou topologiques).
7. Le *Maillage précédent* et le *champ des contraintes* à respecter traduisant le critère que l'on veut satisfaire dans le cas d'un processus d'adaptation.

8.2. Construction des données

Les données utiles pour créer un maillage peuvent rapidement atteindre une quantité très volumineuse. Pour faciliter les saisies correspondantes, plusieurs approches existent:

- Création de fichier de commandes selon un formalisme défini. Dans ce fichier sont présentes les requêtes (sous forme de mots-clé ou de code) et les valeurs numériques associées (coordonnées, numéro de traitement, valeurs des coefficients physiques ...).
- Ces fichiers sont à remplir à la main ou sont générés via des préprocesseurs "intelligents".
- Définition des valeurs liées à la géométrie via des systèmes de D.A.O. (Dessin assisté par ordinateur) ou de C.A.O. (Conception assistée par ordinateur).
 - Ecriture de programmes contenant les données en langage de bas niveau (Fortran par exemple) ou en langage évolué (utilisation de grammaire, ...).
 - Etc.

8.3. Quelques logiciels de maillage

La plupart des codes d'Eléments Finis contiennent un ensemble de processeurs permettant la génération des maillages; si tel n'est pas le cas soit ils ont prédéfini une structure de données correspondante que l'utilisateur doit créer selon ces spécifications, soit ils sont couplés à des logiciels de C.A.O. . Parmi les nombreux codes existant, nous pouvons (exercice délicat) mentionner:

- Ansys (Prep7)
- Castem du CEA
- Catia de Dassaut Systèmes
- Ca.st.or du CETIM
- Emc2 de l'INRIA
- Euclid de Matra Datavision
- Mef/Mosaic de CSI/UTC (Compiègne)
- Modulef (l'auteur assure la responsabilité de la partie maillage de cette bibliothèque d'Eléments Finis)
- Nastran
- Patran
- Permas
- Samcef (Bacon) du L.T.A.S. de Liège
- Simail de Simulog
- Strim100 de Cisigraph
- I-DEAS fem de S.D.R.C.
- Systus de Framsoft
-

9. Quelques exemples et quelques remarques générales

9.1. Quelques exemples de maillages en dimension 2 et 3

Les méthodes présentées au long de ce papier sont applicables pour construire les maillages associés à différents types de problèmes physiques. Afin d'illustrer quelques réalisations concrètes de domaines traités, nous allons donner quelques exemples. Les quatre premières figures montrent,

sur un même exemple, les résultats obtenus en utilisant trois méthodes différentes. Les figures 6 et 7 illustrent un exemple limite d'application de la méthode algébrique vue ci-dessus. La méthode brute produit un maillage faux (première figure) que l'on corrige localement pour obtenir le résultat montré sur la deuxième figure. La figure 8 montre le maillage obtenu en utilisant une méthode frontale tandis que la figure 9 montre le maillage produit avec une méthode de Voronoï.

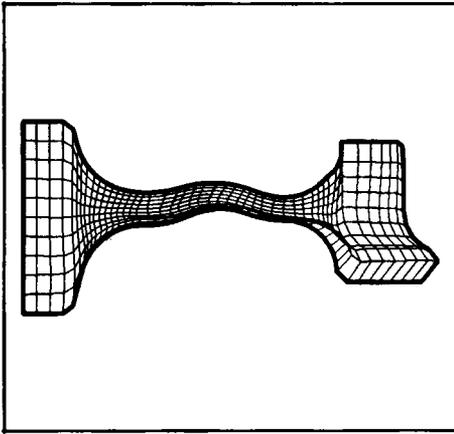


Figure 6: *Méthode algébrique (résultat brut).*

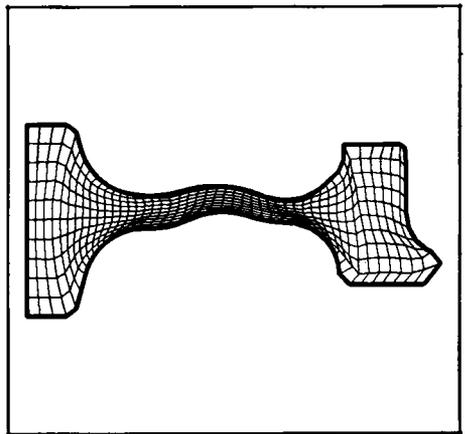


Figure 7: *Méthode algébrique après corrections locales.*

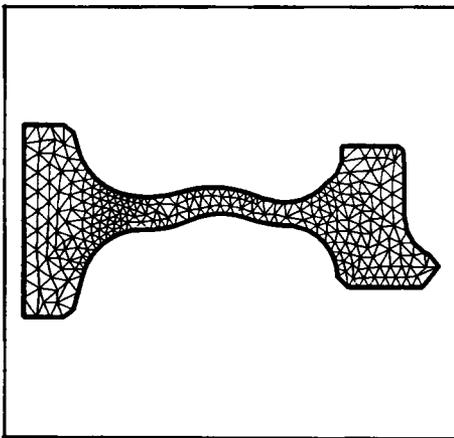


Figure 8: *Méthode frontale.*

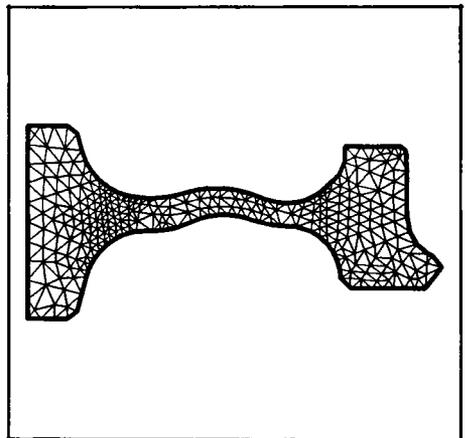


Figure 9: *Méthode de Voronoï.*

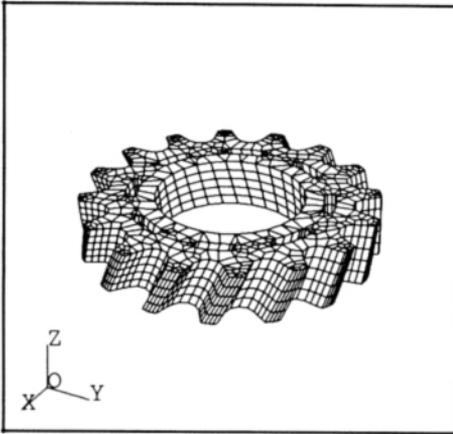


Figure 10: *Méthode produit.*

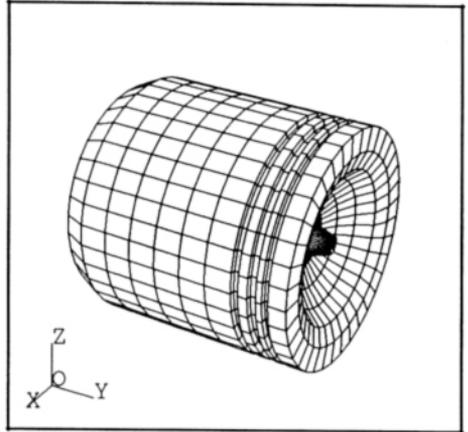


Figure 11: *Méthode produit.*

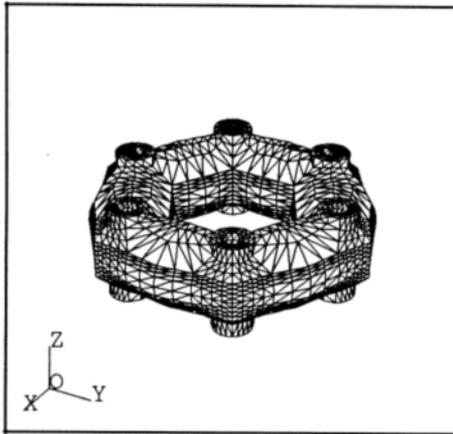


Figure 12: *Méthode de blocs.*

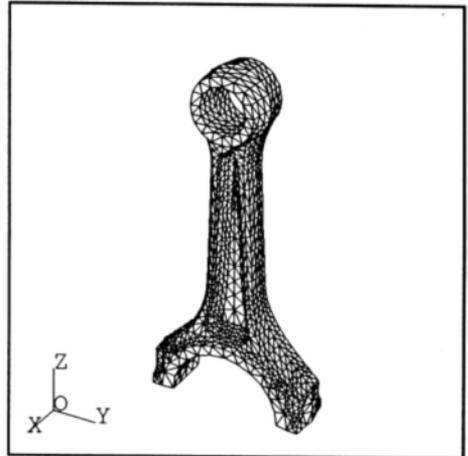


Figure 13: *Méthode de Voronoï.*

Le maillage de la figure 6 comprend 460 quadrangles et 517 sommets. Parmi les éléments on compte un quadrangle croisé, 27 quadrangles de surface négative et 3 quadrangles de surface positive mais non convexes. Le maillage corrigé (figure 7) ne contient que des éléments de surface positive et convexes.

Sur les mêmes données, la méthode frontale produit un maillage de 512 triangles et 313 sommets. Le plus mauvais triangle a une qualité de 2.24 (Q est défini comme en 6.6) et seul cet élément a une qualité plus mauvaise que 2. Toujours avec les mêmes données, la méthode de Voronoï produit 536 triangles pour 325 sommets. Dans ce cas, tous les triangles sont meilleurs que 2, le plus mauvais élément ayant pour qualité (même mesure que ci-dessus) la valeur 1.82. Notons que ces résultats correspondent aux maillages produits par les méthodes de création et n'ont pas été régularisés par posttraitement.

Les quatre dernières figures illustrent quelques exemples en dimension 3. Les figures 10 et 11 montrent l'application d'une méthode de type produit sans dégénérescence (première figure, il s'agit d'une simple translation ou extrusion) et avec ce cas (il s'agit d'une rotation autour d'un axe tangent en un point au domaine initial servant de donnée). Un exemple de domaine maillé par une méthode de blocs est montré sur la figure 12 tandis que les possibilités d'une méthode de Voronoï en dimension 3 sont illustrées par l'exemple de la figure 13.

Le maillage de la figure 10 comprend 3696 sommets et 2240 éléments répartis en 150 pentaèdres et 2090 hexaèdres (le maillage de départ est composé de triangles et de quadrangles et on obtient l'équivalent tridimensionnel naturel de ces éléments). Le maillage de la figure 11 comprend 2056 sommets et 1368 éléments répartis en 144 pentaèdres et 1224 hexaèdres (aux quadrangles du maillage de départ ayant une arête portée par l'axe de rotation ont été associés des pentaèdres). Le maillage de la figure 12 comprend 5661 sommets et 28133 éléments de type tétraèdre. Ce résultat a été obtenu en coupant les hexaèdres produits par une méthode de blocs. Le dernier maillage est composé de 7054 tétraèdres pour 1893 sommets. La qualité du maillage, en terme de la fonction Q vue en 6.6, est la suivante: 2 tétraèdres ont pour qualité 10.55 (ce qui correspond aux éléments construits sur une face de donnée de très mauvaise qualité qui ne permet pas, en théorie, d'obtenir une qualité meilleure que 9.95) et le pourcentage d'éléments de qualité meilleure que 3. est 96.

9.2. Quelques remarques générales

La rapide synthèse présentée au fil de cet article permet de se faire une idée sur les méthodes de génération de maillages les plus utilisées. Certaines questions peuvent alors être abordées menant à des réflexions de nature plus ou moins philosophique. Il ne s'agit pas ici de débattre de tous les problèmes possibles mais de donner quelques indications (reflétant le point de vue de l'auteur) sur certains d'entre eux.

Quatre points seront brièvement discutés: le coût de telle ou telle méthode, la comparaison entre méthode frontale et méthode de Voronoï, le dilemme maillage structuré versus maillage non structuré qui en fait revient à choisir entre l'automatisme ou non du processus de maillage et, enfin, le couplage possible entre les différents algorithmes.

Le coût d'une méthode peut, a priori, se mesurer de plusieurs manières. On peut faire une étude de la complexité de la méthode (en termes de nombre d'opérations nécessaires, de comportement asymptotique (on fait croire le nombre d'éléments)) mais généralement le résultat ne correspond pas au meilleur complet mais uniquement à une partie de celui-ci. Ainsi, la complexité des algorithmes de Voronoï a fait l'objet de nombreuses études théoriques mais ne reflète au mieux que celle du schéma d'insertion de points qui ne constitue qu'une faible partie du meilleur. Par ailleurs, la nécessité d'avoir un meilleur robuste conduit à effectuer de nombreux calculs, passés sous silence lorsque l'on décrit la méthode, qui majorent sensiblement le bilan. Il est également clair que la qualité de l'implémentation réalisée influe de manière considérable sur le temps requis.

A titre d'exemple, la méthode frontale et la méthode de Voronoï, telles que décrites ci-dessus, ont été implémentées par l'auteur et donnent, en dimension 2, les vitesses suivantes (sur un IBM 6000 560):

- méthode frontale, option rapide (on choisit dans le front le premier segment se présentant): 1000 triangles par seconde,
- méthode frontale, option lente (on choisit dans le front le plus petit segment): 300 triangles par seconde,
- méthode de Voronoï: 600 triangles par seconde.

Il apparaît alors que la comparaison des coûts est délicate à faire compte tenu que les maillages produits sont sensiblement équivalents (au sens de la qualité Q introduite ci-dessus).

A titre d'indication, l'implémentation de la méthode de Voronoï en dimension 3 conduit à générer de 2000 à 4000 tétraèdres à la minute en fonction des difficultés géométriques rencontrées.

Comparer les maillages produits à partir d'un jeu de données identiques par une méthode frontale et une méthode de Voronoï est également un exercice difficile. En principe, une méthode frontale donne des éléments plus équilatéraux, en pratique il convient de nuancer car on peut penser qu'une méthode de Voronoï doit produire le même type de résultat si l'on génère convenablement les points internes. L'expérience acquise par l'auteur montre que les deux méthodes, en dimension 2, donnent des maillages différents mais sensiblement identiques en termes de qualité. En dimension 3, le maillage obtenu après création des points internes (voir le schéma de ce cas) par la méthode de Voronoï doit être régularisé pour éliminer les quelques tétraèdres mauvais, une méthode frontale a certainement moins tendance à créer des tétraèdres plats et ainsi doit fonctionner sans régularisation (ceci sera étudié directement prochainement).

Concernant le débat maillage structuré contre maillage libre, il convient de considérer deux aspects: le premier est de savoir si les solveurs utilisés pour résoudre le problème sont optimaux pour tel ou tel type de mailles, le second revient à choisir entre l'automatisme totale présente dans les mailleurs (frontal ou Voronoï) conduisant à des maillages non structurés et la relative non automatisme des mailleurs (blocs essentiellement) permettant d'avoir des maillages structurés. La réponse n'est pas claire et dépend nettement du type des applications (en particulier, une personne manipulant toujours le même type de domaine peut avoir intérêt à investir dans une méthode blocs tandis qu'une personne changeant de géométrie ne peut se le permettre). On note aussi qu'il existe des mailleurs automatiques de type frontal créant des quadrangles dans le cas de domaine de forme quelconque possédant néanmoins un nombre pair de segments sur leur frontière, voir par exemple [38]. En dimension 3, il n'y a pas, à ce jour, de résultat de ce type.

L'évolution actuelle dans le domaine des mailleurs entièrement automatiques semble être de coupler entre elles les différentes méthodes. L'auteur a déjà testé le couplage Voronoï-frontal et se propose de regarder le couplage Voronoï-frontal-Voronoï très prometteur. Le mailleur ainsi écrit doit bénéficier des qualités de chacune des méthodes et éviter leurs points faibles.

A titre de conclusion, la présente revue, sans être exhaustive, avait l'ambition de donner un éclairage global sur les plus usuelles des méthodes de génération de maillages avec l'accent sur les méthodes entièrement automatiques. L'étude s'inscrivait délibérément dans le cas où les seules données disponibles concernaient la discrétisation de la frontière du domaine à mailler sans autres informations quant à la nature du maillage attendu. Ce dernier cas rentre dans le cadre de l'adaptation, rapidement envisagé, qui comprend deux aspects: un aspect relatif au calcul d'un critère permettant de déclencher l'adaptation et un aspect relatif aux algorithmes de maillages proprement dits afin d'examiner leur capacité à respecter des contraintes (taille des éléments, directionnalité, ...) déduites des critères utilisés.

References

- [1] [BAK 88] T.J. BAKER, Generation of tetrahedral meshes around complete aircraft, *Numerical grid generation in computational fluid mechanics'88*, Miami, 1988.
- [2] [CAV 74] J.C. CAVENDISH, Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 8, 1974.
- [3] [CAV 85] J.C. CAVENDISH, D.A. FIELD, W.H. FREY, An approach to automatic 3D finite element mesh generation, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 21, 1985.
- [4] [CHE 88] J.H. CHENG, P.M. FINNIGAN, A.F. HATHAWAY, A. KELA, W.J. SCHOEDER, Quadtree/octree meshing with adaptive analysis, *Numerical grid generation in computational fluid mechanics'88*, Miami, 1988.
- [5] [CIA 78] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problem*, North Holland, 1978.
- [6] [COU 87] J.L. COULOMB, Maillages 2D et 3D. Expérimentation de la triangulation de Delaunay, *Conf. on Automated mesh generation and adaptation*, Grenoble, 1987.
- [7] [GEO 89] P.L. GEORGE, Mailleur 3D par découpage structuré d'éléments grossiers, *RR INRIA n° 990*, 1989.

- [8] [GEO 89a] P.L. GEORGE, La conception descendante appliquée à la réalisation concrète des maillages, *RT INRIA* n° 107, 1989.
- [9] [GEO 91] P.L. GEORGE, *Génération automatique de maillage. Applications aux méthodes d'éléments finis*, Masson, *RMA* n° 16, Paris, 1991. Also as *Automatic mesh generation. Applications to finite element methods*, Wiley, 1991.
- [10] [GEO 91b] P.L. GEORGE, Génération de maillages par une méthode de type Voronoï, *RR INRIA* n° 1398, 1991.
- [11] [GEO 92] P.L. GEORGE, Génération de maillages par une méthode de type Voronoï. Partie 2: Le cas tridimensionnel, *RR INRIA* n° 1664, 1992.
- [12] [GEO 93] P.L. GEORGE, Mailleurs automatiques et adaptation, soumis à Colloque national en calcul des structures, Giens, 1993.
- [13] [GEO 93a] P.L. GEORGE, Automatic mesh generation and finite element computation, in: P.G. Ciarlet and J.L. Lions, ed., *Finite Element Methods, Handbook of Numerical Analysis*, vol IV, North-Holland, à paraître.
- [14] [GEG 88] P.L. GEORGE, A. GOLGOLAB, Mailleur 3D en topologie "cylindrique", *RT INRIA* n° 100, 1988.
- [15] [GES 92] P.L. GEORGE, E. SALTEL, Post-traitements et graphiques, *Guide Modulef* n° 6, INRIA, 1992.
- [16] [GHS 90] P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL, Fully automatic mesh generator for 3d domains of any shape, *Impact of Comp. in Sci. and Eng.*, 2, pp 187-218, 1990.
- [17] [GHS 91] P.L. GEORGE, F. HECHT, E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 92, pp. 269-288, 1991.
- [18] [GHV 91] P.L. GEORGE, F. HECHT, M. G. VALLET, Création of internal points in Voronoï's type method, Control and adaptation, *Adv. in Eng. Soft.*, 13, n° 5/6,, pp. 303-313, 1991.
- [19] [GEH 92] P.L. GEORGE, F. HERMELINE, Delaunay's mesh of a convex polyhedron in dimension d. Application to arbitrary polyhedra, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 33, pp. 975-995, 1992.
- [20] [GEP 92] P.L. GEORGE, P. LAUG, Normes d'utilisation et de programmation, *Guide Modulef* n° 2, INRIA, 1992.

- [21] [GSE 92] P.L. GEORGE, E. SEVENO, Génération de maillages par une méthode de type frontal, *RR INRIA* n° 1725, 1992.
- [22] [GOL 89] A. GOLGOLAB, Mailleur tridimensionnel automatique pour des géométries complexes, *RR INRIA* n° 1004, 1989.
- [23] [HES 90] F. HECHT, E. SALTEL, Emc2 : Editeur de maillages et de contours bidimensionnels, Manuel d'utilisation, *RT INRIA* n° 118, 1990.
- [24] [HER 82] F. HERMELINE, Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension N, *Rairo, Analyse numérique*, vol 16, n° 3, 1982.
- [25] [HOL 88] K. HO LE, Finite element mesh generation methods: a review and classification, *Comp. Aided Design* 20, 27-38, 1988.
- [26] [LOP 88] R. LOHNER, P. PARIKH, Generation of 3D unstructured grids by advancing front method, *AIAA 26 Aerospace Sciences meeting*, Reno Nevada, 1988.
- [27] [MAV 92] D.J. MAVRIPLIS, An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness, *Icase Report* no 92-49, 1992.
- [28] [PEZ 88] J. PERAIRE, J. PEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ, Finite element Euler computations in three dimensions, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 26, pp 2135-2159, 1988.
- [29] [PER 83] A. PERRONNET, Logical and physical representation of an object, modularity for the programming of finite element methods, in *IFIP Working Group on Numerical Software*, Soderkoping (Sweden), 1983.
- [30] [PER 88] A. PERRONNET, A generator of tetrahedral finite elements for multi-material object and fluids, *Numerical grid generation in computational fluid mechanics'88*, Miami, 1988.
- [31] [SHB 88] M.S. SHEPHARD, F. GUERINONI, J.E. FLAHERTY, R.A. LUDWIG, P.L. BAEHMANN, Finite octree mesh generation for automated adaptive 3D flow analysis, *Numerical grid generation in computational fluid mechanics'88*, Miami, 1988.
- [32] [TAL 87] J.Y. TALON, Algorithmes d'amélioration de maillages pour éléments finis en 2 et 3 dimensions, *Conf. on Automated mesh generation and adaptation*, Grenoble, 1987.
- [33] [THO 82] J.F. THOMPSON, *Numerical grids generation*, North Holland, 1982.

- [34] [VAL 92] M.G. VALLET, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs, *Thèse*, Université Paris 6, 1992.
- [35] [WAT 81] D.F. WATSON, Computing the n-dimensionnal Delaunay tessellation with applications to Voronoi polytopes, *Computer Journal* 24 (2), 1981.
- [36] [WEA 90] N.P. WEATHERILL, The integrity of geometrical boundaries in the 2-dimensional Delaunay triangulation, *Comm. in Appl. Num. Meth.*, vol 6, pp 101-109, 1990.
- [37] [YES 84] M.A. YERRI, M.S. SHEPHARD, Automatic 3D mesh generation by the modified-octree technique, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 20, 1984.
- [38] [ZZH 91] J.Z. ZHU, O.C. ZIENKIEWICZ, E. HINTON, J. WU, A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.* 32, pp 849-866, 1991.