

---

# Elément fini de coque à trois nœuds pour le calcul des structures minces en grandes déformations

Philippe Boisse — Jean-Luc Daniel — Jean-Claude Gelin

Laboratoire de mécanique appliquée, Université de Franche-Comté ; C.N.R.S.  
Route de Gray, 25030 Besançon

---

**RÉSUMÉ.** Un élément fini  $C^0$  triangulaire de coque à trois nœuds bien adapté aux calculs prenant en compte les non-linéarités géométriques est proposé. La cinématique de l'élément est de type isoparamétrique 3D dégénérée et le verrouillage en cisaillement transverse est évité par l'utilisation d'une interpolation des distorsions transverses. Un repère matériel lié aux côtés de l'élément permet de fixer naturellement les valeurs nodales des déformations de cisaillement. Les modifications induites par cette technique concernent aussi bien les termes non linéaires de déformations que les termes linéaires et sont prises en compte à tous les niveaux de la mise en oeuvre du schéma de Newton et notamment pour le calcul de la matrice de contrainte initiale. L'élément fonctionne avec un seul ensemble de points de Gauss le long de la normale au centre de gravité et s'avère très économique en temps de calcul. Un ensemble d'exemples montre des performances correctes dans les cas linéaires et une grande efficacité pour les tests non linéaires. Une simulation d'emboutissage est présentée. L'élément est particulièrement bien adapté à ce type d'utilisation.

**ABSTRACT.** A  $C^0$  three node shell finite element well suited to calculations where geometrical non-linearities are taken into account is proposed. The element is based on isoparametric continuum based kinematics and shear locking is avoided by using an interpolation of the transverse shear strain components. A material frame related to the element side is considered to define the nodal values of transverse shear strains. The modifications concern the linear and non-linear parts of the strains. They are taken into account at any level of the Newton scheme and in particular to calculate the initial stress matrix. The element works using a single set of Gauss points along the normal at the center to be very efficient from the computational point of view. A set of examples show a correct efficiency in linear calculations and very good performances in non-linear tests. A numerical simulation of sheet metal forming is described and the element appears to be well adapted for these types of calculations.

**MOTS-CLÉS :** éléments finis, coques, triangles, non-linéarités géométriques, cinématique de Ahmad, repère matériel covariant, interpolation mixte, emboutissage.

**KEY WORDS :** finite element, shells, triangles, geometrical non-linearities, Ahmad kinematics, material covariant frame, mixte interpolation, sheet metal forming.

---

## 1. Introduction

Parmi les structures mécaniques dont les conditions de fonctionnement nécessitent une modélisation numérique, une part importante d'entre elles présentent une dimension petite par rapport aux autres et sont correctement approchées par une théorie de coque. Les éléments finis de coques sont nombreux et de plus en plus efficaces. Lorsque la modélisation décrit un phénomène d'évolution fortement non linéaire, par exemple un procédé de mise en forme tel que l'emboutissage des tôles, la méthode incrémentale mise en oeuvre conduit à résoudre le problème de façon itérative et multiplie le nombre des calculs. Le nombre de ces itérations peut être très important pour des applications industrielles de géométrie et d'évolution complexes. Les éléments finis de coques alors utilisés doivent être le moins coûteux possible en temps de calcul. L'emploi de certains d'entre eux, notamment à haut degré d'interpolation et demandant un nombre de points d'intégration élevé est rendu impossible en pratique pour ce type d'applications. L'objectif de cet article est de proposer un élément fini de coque triangulaire à trois nœuds et cinq degrés de liberté par nœud, à interpolation linéaire, fonctionnant avec un seul ensemble de points d'intégration le long de la normale au centre de gravité, peu coûteux en temps de calcul et donc bien adapté aux calculs d'évolution non linéaires demandant un grand nombre d'itérations.

Les éléments finis de coque de continuité  $C^0$  construits sur une cinématique de Mindlin sont actuellement les plus utilisés même dans les cas où la structure modélisée vérifie bien l'hypothèse de Kirchhoff. Ceci s'explique par la difficulté rencontrée à formuler des éléments conformes basés sur l'hypothèse de Kirchhoff qui impose une continuité  $C^1$  du déplacement et donc la continuité de la normale entre les éléments. L'impossibilité d'une connexion nodale simple a été démontrée [IRO 65] dans ce cas pour un élément triangulaire de plaque ou de coque. Parmi les éléments  $C^0$ , la construction introduite par Ahmad [AHM 71][STA 85] [STA 86] permet de formuler une famille d'éléments de coque dits "3D dégénérés" de façon commode et efficace qui assure la continuité de la description géométrique. Une grande part des éléments actuellement utilisés dans les codes de calcul sont construits sur cette cinématique. Pourtant les éléments de coque  $C^0$  directement basés sur une hypothèse de Mindlin conduisent dans le cadre d'une approche en déplacements à des problèmes dits de *verrouillage en cisaillement* (et en membrane pour les éléments courbes). La solution numérique obtenue est mauvaise lorsque l'épaisseur de l'élément devient très faible par rapport aux autres dimensions. Dans le cas d'éléments à bas degré d'interpolation le résultat est erroné quelle que soit l'épaisseur. Dans le but de pallier cette difficulté plusieurs approches sont utilisées. En conservant la formulation en déplacements, la technique la plus simple est l'intégration réduite ou sélective de l'énergie de cisaillement transverse [ZIE 71][HUG 78]. L'équivalence de ces techniques avec une formulation mixte a été démontrée [MAL 78]. Néanmoins elle s'avère insuffisante dans le cas des éléments à faible degré d'interpolation et notamment pour le triangle linéaire. Une autre approche consiste en la construction d'éléments basés sur des conditions de Kirchhoff discrètes (triangles DKT, quadrangles DKQ)[BAT 80][BAT 80][BER 86]. Des fonctions

d'interpolation de haut degré sont utilisées dans une cinématique de Mindlin et les conditions de Kirchhoff en certains points particuliers adaptent ces fonctions au nombre de ddl de l'élément. Des extensions de cette technique ont été élaborées pour tenir compte des cisaillements transverses (triangles DST, quadrangles DSQ) [BAT 89][ZIE 90]. Les éléments ainsi construits sont très efficaces, surtout les triangles DKT (ou DST). Ils nécessitent néanmoins l'emploi de plusieurs ensembles de points d'intégration numérique et leur extension aux études non linéaires géométriques n'est pas sans problème. D'autres éléments sont basés sur une formulation mixte telle que le principe de Hellinger-Reissner ou de Wu-Washizu [PRA 69][SUM 83][SIM 89]. Les éléments obtenus sont performants et présentent certains avantages tels que la détermination précise des cisaillements transverses [PIN 91]. Pourtant la construction de ces éléments est compliquée, coûteuse en temps de calcul et ils sont donc mal adaptés aux simulations d'évolutions fortement non linéaires.

L'élément triangulaire proposé, du type 3D dégénéré, reste dans le cadre d'une formulation en déplacements et s'appuie sur une technique dite *d'interpolation des distorsions transverses* ou interpolation mixte [HUG 81][DVO 84][HUG 87][STO 89]. Les déformations de cisaillement transverses ne sont pas les dérivées classiques du champ de déplacements mais sont interpolées à partir de valeurs nodales fixées par des hypothèses sur l'évolution du cisaillement. L'équivalence d'une telle méthode avec les principes de Hellinger-Reissner ou de Wu-Washizu a été montrée [SIM 86]. Dans le triangle proposé un repère matériel intermédiaire lié au côté de l'élément est introduit où les distorsions transverses sont supposées constantes le long des côtés. La formulation est simple et naturelle et concerne aussi bien les termes non linéaires de déformation que les termes linéaires. Les modifications induites sont prises en compte dans les matrices d'interpolation des déformations, dans les matrices de rigidité, et dans les matrices de contrainte initiale apparaissant dans la méthode de Newton sur chaque incrément de chargement. Aucun facteur d'ajustement numérique n'est nécessaire et l'élément ne présente pas de mode à énergie nulle (en considérant un assemblage de plusieurs éléments). Les solutions sont obtenues pour toute épaisseur de la coque et le verrouillage est évité. Un seul ensemble de points d'intégration le long de la normale au centre de gravité est suffisant. L'élément est très économique en temps de calcul et donc bien adapté aux simulations non linéaires à grand nombre d'itérations. A titre d'exemple, une simulation numérique d'emboutissage est décrite où le triangle permet un gain de temps de moitié par rapport au quadrangle MITC4 [DVO 84], pour un même nombre d'inconnues nodales.

## **2. Formulation intégrale ; modification des matrices de rigidité et du second membre**

### **2.1. Formulation lagrangienne réactualisée**

Les calculs de structures envisagés sont des problèmes d'évolution quasi statique avec prise en compte des non-linéarités matérielles et géométriques. La résolution en

est effectuée par l'utilisation d'une méthode incrémentale de type lagrangienne réactualisée associée à une méthode de Newton. Le chargement est découpé en incréments et sur chacun d'eux un schéma itératif de Newton est utilisé. La configuration d'équilibre obtenue en fin d'incrément convergent précédent constitue la configuration initiale  $C_0$  pour l'incrément en cours. On note  $a_0$  la valeur de la quantité  $\alpha$  au début de l'incrément en cours. Si une approche en déplacements est utilisée, comme c'est le cas le plus classique dans la méthode des éléments finis, la minimisation de l'énergie potentielle peut être écrite à l'instant  $t$  sur la configuration initiale  $C_0$  en utilisant les deux variables conjuguées  $\mathbf{E}$ , tenseur des déformations de Green-Lagrange et  $\mathbf{S}$  second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\int_{V_0} (D_u(\mathbf{E})\eta)^T \mathbf{S} dV_0 - \int_{V_0} \eta^T \mathbf{f} dV_0 - \int_{\Gamma_{t_0}} \eta^T \bar{\mathbf{t}} dS_0 = G(\mathbf{u}, \eta) = 0$$

$\forall \eta$  champ de déplacements cinématiquement admissible à zéro.  
où

$$D_u(\mathbf{A}) \delta \mathbf{u} = \frac{d}{d\alpha} (\mathbf{A}(\mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}))_{\alpha=0}$$

est la dérivée de Fréchet de  $\mathbf{A}$  par rapport à  $\mathbf{u}$  dans la direction  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\Gamma_t$  est la partie de la frontière à effort imposé  $\bar{\mathbf{t}}$  et  $\mathbf{f}$  l'effort de volume. Ces deux dernières quantités seront supposées indépendantes du déplacement.

Cette équation non linéaire est linéarisée sur chaque incrément par une méthode de Newton. A l'itération  $j+1$  les déplacements  $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta \mathbf{u}_j$  sont cherchés comme solutions du système linéaire suivant :

$$D_u(G(\mathbf{u}, \eta))_j \Delta \mathbf{u}_j = -G(\mathbf{u}, \eta)_j \tag{1}$$

soit :

$$\int_{V_0} [D_u(D_u(\mathbf{E})\eta)]_j \Delta \mathbf{u}_j]^T \mathbf{S}_j dV_0 + \int_{V_0} (D_u(\mathbf{E})\eta)_j^T (D_u(\mathbf{S}))_j \Delta \mathbf{u}_j dV_0 = -G(\mathbf{u}, \eta)_j \tag{2}$$

qui peut être mis sous la forme :

$$[\mathbf{K}_{\sigma j} + \mathbf{K}_j] \Delta \mathbf{u}_{n j} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{A}_{elt} \int_{V_0} \mathbf{B}_j^T \mathbf{S}_j dV_0 \tag{3}$$

où  $\mathbf{A}$  est l'opérateur d'assemblage sur l'ensemble des éléments,  $\mathbf{K}_j$  et  $\mathbf{K}_{\sigma_j}$  sont les matrices de rigidités et de contraintes initiales à l'itération  $j$  et  $\mathbf{B}_j$  la matrice d'interpolation des déformations telle que :

$$\mathbf{D}_u[\mathbf{E}]_j \boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}_j(\mathbf{u}_n^e) \boldsymbol{\eta}_n^e$$

$\mathbf{a}_n$  et  $\mathbf{a}_n^e$  représentent le vecteur des composantes nodales d'un champ  $\mathbf{a}$  respectivement sur l'ensemble de la structure et sur l'élément considéré.

L'incrément de déplacement est calculé jusqu'à ce que le second membre de l'équation [1] devienne inférieur à une tolérance fixée. L'évaluation de la matrice d'interpolation des déformations  $\mathbf{B}$  ainsi que de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}_{\sigma}$  nécessite l'interpolation cinématique reliant le déplacement d'un point quelconque aux degrés de liberté de l'élément et l'interpolation géométrique reliant la position d'un point de la coque à la position des nœuds.

## 2.2. Cinématique de Ahmad

Les éléments finis de coques (ou de plaques) s'appuyant sur une cinématique  $C^0$  de Mindlin s'avèrent plus satisfaisants que ceux basés sur une hypothèse de Kirchhoff même dans les cas où l'épaisseur de la coque est faible. L'élément fini proposé fait partie de la famille des éléments  $C^0$  dits "3D dégénérés" introduits par Ahmad [AHM 71][STA 85] [STA 86][HUG 87]. Une large part des éléments de coques efficaces utilisés dans les logiciels de calculs de structures actuels sont construits sur ce type de cinématique.

Un repère matériel covariant en un point quelconque de position  $\mathbf{x}$ , dans l'épaisseur de la coque, est défini à partir des coordonnées dans l'élément de référence  $\xi$  et  $\eta$  (figure 1) et de la coordonnée dans l'épaisseur  $\zeta \in [-1, 1]$  :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta}$$

La surface moyenne de l'élément est telle que  $\zeta=0$  et contient les nœuds d'interpolation. Des vecteurs pseudo-normaux unitaires  $\mathbf{X}^i$  dont la direction est définie à partir des points supérieurs et inférieurs de la coque au nœud  $i$  assurent la continuité de la description géométrique. Notant  $\mathbf{x}^i$  la position dans le repère cartésien orthonormé de base des nœuds, l'interpolation de la géométrie est définie par :

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) \bar{\mathbf{x}}^i + \zeta \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) \frac{h^i}{2} \mathbf{X}^i \quad [4]$$

où les fonctions d'interpolation linéaires dans le triangle de référence sont utilisées :

$$N^1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad N^2(\xi, \eta) = \xi \quad N^3(\xi, \eta) = \eta \quad [5]$$

et où  $a^i$  représente la valeur de la quantité  $a$  au nœud  $i$  et  $h^i$  l'épaisseur de la coque au nœud  $i$ .

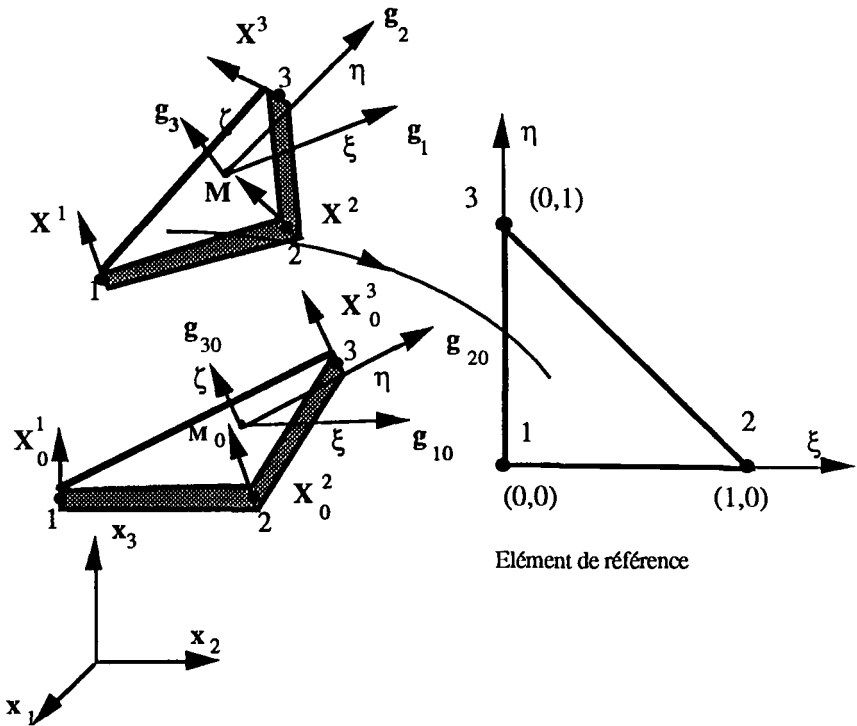


Figure 1. Géométrie de l'élément

Un repère orthonormé  $(V_{10}^i, V_{20}^i, V_{30}^i)$  est associé à chaque nœud  $i$  avec  $V_{30}^i = X_{30}^i$ . On peut ensuite choisir, par exemple,  $V_{10}^i$  dans le plan  $Oxz$ . Notant  $\theta^i = \theta_1^i V_{10}^i + \theta_2^i V_{20}^i$  le vecteur rotation de la pseudo-normale au nœud  $i$  (supposé petit sur un incrément) et  $u^i$  le vecteur déplacement du nœud  $i$ , l'interpolation du déplacement d'un point quelconque de la coque est donnée par :

$$u(M) = \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) \bar{u}^i + \zeta \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) \frac{h^i}{2} (-\theta_1^i V_{20}^i + \theta_2^i V_{10}^i) \quad [6]$$

Dans le cadre de l'approche lagrangienne réactualisée présentée en 2.1, la configuration de référence est celle atteinte en fin d'incrément convergent précédent et  $\mathbf{u}$  le déplacement par rapport à cette configuration. Cinq degrés de liberté sont définis en chaque nœuds, trois composantes de déplacement du nœud dans le repère de base du problème et deux composantes de déformation suivant  $\mathbf{V}_{10}^i$  et  $\mathbf{V}_{20}^i$ . Cette cinématique coïncide avec celle de Mindlin si les vecteurs pseudonormaux sont effectivement perpendiculaires à la coque. Sinon elle en est proche notamment dans le sens où les distorsions transverses peuvent être non nulles contrairement à l'hypothèse de Kirchhoff.

L'interpolation de la géométrie et des déplacements est faite par les mêmes fonctions linéaires. Ceci est intéressant dans l'objectif des calculs non linéaires dans la mesure où cette approche est cohérente avec le schéma de la méthode incrémentale où les déplacements obtenus en fin d'incrément sont ajoutés aux déplacements du début d'incrément [BAT 82].

### 2.3. Séparation des énergies et modification des rigidités et du second membre

Si les interpolations [4] et [6] présentées ci-dessus sont utilisées directement pour calculer les matrices  $\mathbf{B}$  d'interpolation des déformations et les matrices de rigidité  $\mathbf{K}$  et de contrainte initiale  $\mathbf{K}_\sigma$ , l'élément fini obtenu présente un très important verrouillage de cisaillement. Pour remédier à cet inconvénient, on peut construire des éléments à partir des principes mixtes de Hellinger-Reissner ou de Wu-Washizu [PRA 69][SUM 83]. Une alternative à l'utilisation de formulations mixtes consiste, dans le cadre de l'approche en déplacements, à séparer les travaux virtuels des efforts intérieurs de membrane-flexion d'une part et de cisaillement transverse d'autre part et d'opérer une modification de la partie cisaillement de manière à éviter le verrouillage. Le théorème des travaux virtuels peut être écrit :

$$\mathbf{T}_{mb}^* + \mathbf{T}_s^* - \mathbf{T}_{ext}^* = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = 0$$

où :

$$\mathbf{T}_{mb}^* = \int_{V_0} (\mathbf{D}_u[\mathbf{E}_{\alpha\beta}] \boldsymbol{\eta})^T [\mathbf{S}^{\alpha\beta}] dV_0$$

représente le travail virtuel des efforts intérieurs de membrane et flexion,

$$\mathbf{T}_s^* = \int_{V_0} (\mathbf{D}_u[\mathbf{E}_{\alpha 3}] \boldsymbol{\eta})^T [\mathbf{S}^{\alpha 3}] dV_0$$

représente le travail virtuel des efforts intérieurs de cisaillement transverse tandis que

$$T^*_{ext} = \int_{V_0} \eta^T \mathbf{f} dV_0 + \int_{\Gamma_{t0}} \eta^T \mathbf{t} dS_0$$

représente le travail virtuel des efforts extérieurs.

Dans les expressions ci-dessus,

$[E_{\alpha\beta}]$  représente le vecteur à trois composantes  $[E_{11} \ E_{22} \ 2E_{12}]^T$  (déformations de membrane et flexion),

$[E_{\alpha 3}]$  représente le vecteur à deux composantes  $[2E_{13} \ 2E_{23}]^T$  (distorsions transverses),

$[S^{\alpha\beta}]$  représente le vecteur à trois composantes  $[S^{11} \ S^{22} \ S^{12}]^T$  (contraintes de membrane et flexion),

$[S^{\alpha 3}]$  représente le vecteur à deux composantes  $[S^{13} \ S^{23}]^T$  (contraintes de cisaillement transverse).

L'équation itérative donnée par la méthode de Newton [1] devient :

$$D_u(G(\mathbf{u}, \eta))_j \Delta \mathbf{u}_j = D_u(T^*_{mb})_j \Delta \mathbf{u}_j + D_u(T^*_s)_j \Delta \mathbf{u}_j = -G(\mathbf{u}, \eta)_j$$

La dérivée du travail des efforts intérieurs de membrane-flexion permet de faire apparaître des matrices de rigidité et de contraintes initiales  $\mathbf{K}_{mb}$  et  $\mathbf{K}_{\sigma mb}$  telles que :

$$D_u(T^*_{mb})_j \Delta \mathbf{u}_j = \eta_n^T \left[ \mathbf{A}_{elt} \int_{V_0^c} ({}^{NL}\mathbf{B}_{mb}(\Delta \mathbf{u}_n^c))_j^T [S^{\alpha\beta}]_j dV_0 \right] + \eta_n^T \left[ \mathbf{A}_{elt} \int_{V_0^c} (\mathbf{B}_{mb}(\mathbf{u}_n^c))_j^T (\mathbf{C}_{mb})_j (\mathbf{B}_{mb}(\mathbf{u}_n^c))_j dV_0 \right] \Delta \mathbf{u}_n^c \tag{7}$$

soit :

$$D_u(T^*_{mb})_j \Delta \mathbf{u}_j = \eta_n^T [(\mathbf{K}_{\sigma mb})_j + (\mathbf{K}_{mb})_j] (\Delta \mathbf{u}_n)$$

où l'interpolation des déformations de membrane-flexion est définie par :

$$D_u[E_{\alpha\beta}] \eta = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linéaire}}}{\mathbf{1B}_{mb}} \eta_n^c + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non linéaire}}}{{}^{NL}\mathbf{B}_{mb}(\mathbf{u}_n^c)} \eta_n^c = \mathbf{B}_{mb}(\mathbf{u}_n^c) \eta_n^c \tag{8}$$

et où :

$$(\mathbf{C}_{mb})_j = \frac{\partial [S^{\alpha\beta}]_j}{\partial [E_{\alpha\beta}]_j}$$



est l'opérateur tangent de comportement de membrane-flexion consistant à la méthode de Newton pour les termes de membrane-flexion. La connaissance de la densité spécifique d'énergie de déformation  $W(\mathbf{E})$  dans le cas hyperélastique ou la connaissance de la densité spécifique d'énergie de déformation  $W(\mathbf{E}^e)$  et du potentiel plastique  $\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{Q})$  permet le calcul de cet opérateur dans les cas élastoplastiques.

Les matrices de rigidité  $\mathbf{K}_{mb}$  et de contrainte initiale  $\mathbf{K}_{\sigma mb}$  sont de la forme :

$$(\mathbf{K}_{mb})_j = \mathbf{A}_{\text{elt}} \int_{V_0^e} (\mathbf{B}_{mb})_j^T (\mathbf{C}_{mb})_j (\mathbf{B}_{mb})_j dV_0 \quad [9]$$

et

$$(\mathbf{K}_{\sigma mb})_j = \mathbf{A}_{\text{elt}} \int_{V_0^e} \mathbf{G}_{mb}^T \mathbf{H}_{mb} [\mathbf{S}^{\alpha\beta}]_j \mathbf{G}_{mb} dV_0 \quad [10]$$

La forme explicite des matrices  $\mathbf{G}_{mb}$  et  $\mathbf{H}_{mb}$  pour l'élément proposé est donnée en 4.1.

Une mise en équation similaire peut être faite en ce qui concerne les termes de cisaillement transverse mais en utilisant une interpolation modifiée des distorsions :

$$D_u [E_{\alpha 3}] \eta = \underbrace{L \bar{\mathbf{B}}_s}_{\text{linéaire}} \eta_n^e + \underbrace{N L \bar{\mathbf{B}}_s(\mathbf{u}_n^e)}_{\text{non linéaire}} \eta_n^e = \bar{\mathbf{B}}_s(\mathbf{u}_n^e) \eta_n^e \quad [11]$$

La notation  $\bar{\mathbf{B}}_s$  signifie que l'interpolation des distorsions transverses a été modifiée pour éviter le verrouillage. Les matrices de rigidité et de contrainte initiale de distorsion transverse sont alors définies à partir de la dérivée du travail des efforts intérieurs de cisaillement :

$$D_u (T_s^*)_j \Delta \mathbf{u}_j = \eta_n^T \left[ \mathbf{A}_{\text{elt}} \int_{V_0^e} (N L \bar{\mathbf{B}}_s(\Delta \mathbf{u}_n^e))_j^T [\mathbf{S}^{\alpha 3}]_j dV_0 \right] + \eta_n^T \left[ \mathbf{A}_{\text{elt}} \int_{V_0^e} (\bar{\mathbf{B}}_s(\mathbf{u}_n^e))_j^T (\mathbf{C}_s)_j (\bar{\mathbf{B}}_s(\mathbf{u}_n^e))_j dV_0 \right] \Delta \mathbf{u}_n^e \quad [12]$$

$$D_u (T_s^*)_j \Delta \mathbf{u}_j = \eta_n^T [(\bar{\mathbf{K}}_{\sigma s})_j + (\bar{\mathbf{K}}_s)_j] (\Delta \mathbf{u}_n)_j$$

soit :

$$(\bar{\mathbf{K}}_s)_j = \mathbf{A}_{\text{elt}} \int_{V_0^e} (\bar{\mathbf{B}}_s)_j^T (\mathbf{C}_s)_j (\bar{\mathbf{B}}_s)_j dV_0 \quad [13]$$

$$(\bar{\mathbf{K}}_{\sigma s})_j = \mathbf{A}_{\text{elt}} \int_{V_0^e} \mathbf{G}_s^T \mathbf{H}_s [\mathbf{S}^{\alpha 3}]_j \mathbf{G}_s dV_0 \quad [14]$$

avec :

$$(C_s)_j = \frac{\partial [S^{\alpha 3}]_j}{\partial [E_{\alpha 3}]_j}$$

opérateur de comportement de cisaillement tangent consistant à la méthode de Newton pour les termes de cisaillement transverse. La forme explicite des opérateurs  $G_s$  et  $H_s$  est donnée pour l'élément proposé en 4.2. Ils prennent en compte la modification d'interpolation [11]. Les efforts intérieurs apparaissant dans le second membre de la méthode de Newton [3] prennent eux aussi en compte la modification d'interpolation [11] et l'incrément de déplacements calculé à l'itération  $j$  est solution du système linéaire suivant :

$$(\mathbf{K}_{mb} + \mathbf{K}_{\sigma mb} + \overline{\mathbf{K}}_s + \overline{\mathbf{K}}_{\sigma s})_j (\Delta \mathbf{u}_n)_j = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{A}_{elt} \int_{V_0} [(\mathbf{B}_{mb}^T)_j [S^{\alpha\beta}]_j + (\overline{\mathbf{B}}_s^T)_j [S^{\alpha 3}]_j] dV_0 \tag{15}$$

Le chapitre suivant décrit, pour l'élément proposé l'obtention des matrices d'interpolation en membrane-flexion  ${}^L\mathbf{B}_{mb}$  et  ${}^{NL}\mathbf{B}_{mb}$  et les modifications de l'interpolation des déformations de cisaillement transverse  ${}^L\overline{\mathbf{B}}_s$  et  ${}^{NL}\overline{\mathbf{B}}_s$  qui reposent sur une interpolation des distorsions transverses.

### 3. Construction des matrices d'interpolation des déformations

Puisqu'il est nécessaire, dans le but d'éviter le verrouillage, de modifier l'expression des déformations de cisaillements transverses, le tenseur des déformations de Green-Lagrange doit être exprimé dans un repère lié aux directions tangentes et normales à l'élément. Il s'avère commode d'utiliser le repère matériel  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  défini en 2.2 avec :

$$\mathbf{E} = E_{kl} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l$$

où les vecteurs  $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$  définissent la base contravariante associée à  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  et tels que :

$$\mathbf{g}_k \mathbf{g}^l = \delta_k^l$$

Parmi les cinq composantes de  $\mathbf{E}$  apparaissant dans les calculs des rigidités et des seconds membres, les composantes  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ , et  $E_{12}$  sont dérivées classiquement de l'interpolation des déplacements [6]. Par contre la construction de la matrice d'interpolation des distorsions transverses repose sur une interpolation directe de ces composantes à partir de leurs valeurs aux nœuds, elles-mêmes fixées par des

hypothèses concernant l'évolution des distorsions sur l'élément (*assumed strain method* [HUG 81][MAC 82][DVO 84][STO 89]). Cela dans le but d'éviter le verrouillage.

### 3.1. Interpolation des déformations de membrane et flexion

Les vecteurs matériels covariant actuels ( $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ ) et initiaux ( $\mathbf{g}_{10}, \mathbf{g}_{20}, \mathbf{g}_{30}$ ) fixent les déformations :

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta - \mathbf{g}_{\alpha 0} \cdot \mathbf{g}_{\beta 0})$$

soit :

$$E_{\alpha\beta} = {}^L E_{\alpha\beta} + {}^{NL} E_{\alpha\beta}$$

où  ${}^L E_{\alpha\beta}$  est la partie linéaire :

$${}^L E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta 0} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_\beta} \cdot \mathbf{g}_{\alpha 0} \right)$$

( $\xi_\alpha = \xi$  si  $\alpha = 1$ ,  $\xi_\alpha = \eta$  si  $\alpha = 2$ )

et  ${}^{NL} E_{\alpha\beta}$  la partie non linéaire :

$${}^{NL} E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_\beta} \right) \tag{16}$$

L'interpolation des déplacements [6] donne explicitement la valeur des matrices d'interpolation linéaires  ${}^L \mathbf{B}_{mb}$  et non linéaires  ${}^{NL} \mathbf{B}_{mb}$  :

$${}^L E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \mathbf{g}_{\alpha 0} \frac{\partial N^i}{\partial \xi_\beta} + \mathbf{g}_{\beta 0} \frac{\partial N^i}{\partial \xi_\alpha} \right) \bar{\mathbf{u}}^i + \zeta \sum_{i=1}^3 \frac{h^i}{2} \left( \mathbf{g}_{\alpha 0} \frac{\partial N^i}{\partial \xi_\beta} + \mathbf{g}_{\beta 0} \frac{\partial N^i}{\partial \xi_\alpha} \right) \left( -\theta_1^i \mathbf{V}_{20}^i + \theta_2^i \mathbf{V}_{10}^i \right)$$

$$[{}^L E_{\alpha\beta}] = {}^L \mathbf{B}_{mb} \mathbf{u}_n^c \quad \text{et donc} \quad D_u [{}^L E_{\alpha\beta}] \eta = {}^L \mathbf{B}_{mb} \eta_n^c$$

Dans le cadre de la prise en compte des non-linéarités géométriques, la méthode de Newton fait intervenir (équation [2]) la dérivée linéarisée du tenseur des déformations qui doit être interpolée en fonction des déplacements nodaux.

$$D_u ({}^{NL}E_{\alpha\beta}) \delta u = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\delta u)}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial(\delta u)}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \right]$$

soit en tenant compte de l'interpolation des déplacements [6] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta u)}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} = & \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N^i}{\partial \xi_\alpha} \bar{u}^i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N^i}{\partial \xi_\alpha} \zeta \frac{h^i}{2} (-\theta_1^i v_{20}^i + \theta_2^i v_{10}^i) \right] \\ & \times \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N^i}{\partial \xi_\beta} \delta \bar{u}^i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N^i}{\partial \xi_\beta} \zeta \frac{h^i}{2} (-\delta \theta_1^i v_{20}^i + \delta \theta_2^i v_{10}^i) \right] \end{aligned}$$

qui fixe la valeur des matrices d'interpolation des déformations de membrane-flexion dans [8].

$$D_u [E_{\alpha\beta}] \eta = {}^L B_{mb} \eta_n^e + {}^{NL} B_{mb}(u_n^e) \eta_n^e = B_{mb}(u_n^e) \eta_n^e$$

### 3.2. Interpolation des déformations de cisaillement transverse

Si l'interpolation des distorsions transverses repose directement comme pour les déformations dans le plan sur la dérivation de l'interpolation en déplacements [6], l'élément obtenu présente un très important verrouillage. Pour expliquer ce phénomène on peut constater que lorsque l'épaisseur devient très faible devant les autres dimensions, la solution correspond à l'hypothèse de Kirchhoff ( $E_{\alpha 3} = 0$  en tout point). Les distorsions transverses ayant une évolution linéaire dans l'élément, leur nullité impose six conditions par élément, ce qui est supérieur au nombre de degrés de libertés moyen par élément [HUG 87]. Parmi les techniques utilisées pour corriger ce verrouillage l'intégration réduite ou sélective est la méthode la plus simple [ZIE 71][HUG 78]. Elle s'avère très inefficace dans le cas de l'élément triangulaire linéaire [BOI 92a]. Une interpolation directe des distorsions transverses est faite à partir des valeurs nodales de ces déformations selon :

$$E_{\alpha 3} = \sum_{i=1}^3 N^i(\xi, \eta) E_{\alpha 3}^i \tag{17}$$

où  $N^i$  sont les fonctions de bases linéaires définies en [5]. Les composantes nodales  $E_{\alpha 3}^i$  sont fixées en supposant constantes le long des côtés de l'élément les distorsions transverses dans la direction de ces côtés. En conséquence la nullité en tout point des déformations de cisaillements transverses, attendue lorsque l'épaisseur est très faible, ne demande plus que la nullité des distorsions sur chaque côté (dans la direction du côté); soit trois conditions par élément ce qui est compatible avec le nombre de ddl moyen pour un élément.

Dans le but de relier les distorsions dans la direction des côtés de l'élément aux déplacements nodaux, un repère matériel covariant est défini en chaque nœud.

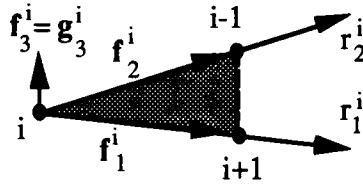


Figure 2. Repère matériel nodal lié aux côtés de l'élément

Des coordonnées matérielles sont introduites le long des côtés :

$r_1^i$  coordonnée matérielle le long du côté (i, i+1) ;  $r_1^i \in [0,1]$ .

$r_2^i$  coordonnée matérielle le long du côté (i, i-1) ;  $r_2^i \in [0,1]$ .

Ces coordonnées définissent, à partir de la position  $x$  d'un point, les vecteurs matériels covariants suivants :

$$f_1^i = \frac{\partial x}{\partial r_1^i} \quad f_2^i = \frac{\partial x}{\partial r_2^i} \quad f_3^i = g_3^i \quad [18]$$

auxquels sont associés les vecteurs contravariants ( $f^{1i}, f^{2i}, f^{3i}$ ) tels que :

$$f^{ki} f_1^i = \delta^k_1$$

Noeud 1	Noeud 2	Noeud 3
$r_1^1 = \xi \quad r_2^1 = \eta$	$r_1^2 = \eta \quad r_2^2 = 1 - \xi - \eta$	$r_1^3 = 1 - \xi - \eta \quad r_2^3 = \xi$
$f_1^1 = g_1$ $f_2^1 = g_2$	$f_1^2 = -g_1 + g_2$ $f_2^2 = -g_1$	$f_1^3 = -g_2$ $f_2^3 = -g_2 + g_1$

Tableau 1. Vecteurs et coordonnées matérielles en chaque nœud

En chaque nœud, les coordonnées matérielles  $r_1^i$  et  $r_2^i$  peuvent être reliées aux coordonnées matérielles naturelles  $\xi$  et  $\eta$  et les vecteurs  $(f_{10}^i, f_{20}^i, f_{30}^i)$  peuvent être exprimés en fonction des  $(g_{10}^i, g_{20}^i, g_{30}^i)$  (voir tableau 1). On peut remarquer que dans le cas du triangle linéaire étudié, les vecteurs  $g_{10}$  et  $g_{20}$  sont constants sur la surface moyenne de l'élément mais que  $g_{30}$  ne l'est pas. Nous noterons  $g_{10}$  et  $g_{20}$  mais  $g_{30}^i$ .

Les composantes du tenseur de Green-Lagrange dans le repère  $(f_{10}^i, f_{20}^i, f_{30}^i)$  sont notées  $E_{kl}^{*i}$ :

$$E = E_{kl}^{*i} f_{10}^{ki} \otimes f_{10}^{li}$$

Elles sont définies à partir des  $f_k^i$  actuels et initiaux, et les distorsions transverses sont données par :

$$E_{\alpha 3}^{*i} = \frac{1}{2} (f_{\alpha}^i g_{30}^i - f_{\alpha 0}^i g_{30}^i)$$

Ces composantes sont supposées constantes sur chaque côté et égales à la valeur au point milieu du côté :

$$(E_{\alpha 3}^{*i})_m = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_m f_{\alpha 0}^i + \left( \frac{\partial u}{\partial r_{\alpha}^i} \right)_m (g_{30})_m + \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_m \left( \frac{\partial u}{\partial r_{\alpha}^i} \right)_m \right] \tag{19}$$

$(a)_m$  signifiant que la quantité  $a$  est évaluée au milieu du côté. La distorsion transverse étant supposée constante le long du côté c'est aussi la distorsion au nœud  $i$  notée  $E_{\alpha 3}^{*i}$ .

Chaque terme de l'équation [19] va maintenant être relié aux déplacements nodaux afin de définir la matrice  $C^i$  telle que :

$$D_u [E_{\alpha 3}^{*i}] \delta u = C^i \delta u_n \tag{20}$$

Compte tenu des relations définies dans le tableau 1, les  $f_{\alpha 0}^i$  sont liés aux  $g_{\alpha 0}$  qui sont connus. Les vecteurs  $(g_{30})_m$  sont les vecteurs  $g_{30}$  aux milieux 4,5,6 des côtés tels que précisé sur la figure 3.

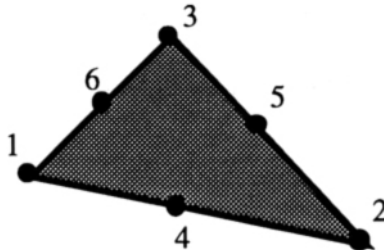


Figure 3. Numérotation des points milieux

La définition des  $\mathbf{g}_{30}$  et l'interpolation géométrique [4] conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{30}^4 &= \frac{1}{4}(\mathbf{h}^1 \mathbf{X}_0^1 - \mathbf{h}^2 \mathbf{X}_0^2) \\ \mathbf{g}_{30}^5 &= \frac{1}{4}(\mathbf{h}^2 \mathbf{X}_0^2 - \mathbf{h}^3 \mathbf{X}_0^3) \\ \mathbf{g}_{30}^6 &= \frac{1}{4}(\mathbf{h}^3 \mathbf{X}_0^3 - \mathbf{h}^1 \mathbf{X}_0^1) \end{aligned} \quad [21]$$

Les dérivées  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi}$  aux points 4,5,6 sont reliées par l'interpolation cinématique [6] aux déplacements nodaux :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right)^i = \frac{1}{4} \left[ \mathbf{h}^i (-\theta_1^i \mathbf{v}_{20}^i + \theta_2^i \mathbf{v}_{10}^i) + \mathbf{h}^{i+1} (-\theta_1^{i+1} \mathbf{v}_{20}^{i+1} + \theta_2^{i+1} \mathbf{v}_{10}^{i+1}) \right] \quad [22]$$

enfin :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}_1^i} \right)_m = \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N^i}{\partial \xi} \bar{\mathbf{u}}^i \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}_1^i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N^i}{\partial \eta} \bar{\mathbf{u}}^i \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}_1^i} \right]_m = \bar{\mathbf{u}}^{i+1} - \bar{\mathbf{u}}^i \quad [23]$$

et :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}_2^i} \right)_m = \bar{\mathbf{u}}^{i-1} - \bar{\mathbf{u}}^i \quad [24]$$

Les équations [21] à [24] permettent de lier les déformations de cisaillement transverse dans le repère lié aux côtés de l'élément aux déplacements nodaux. Si l'on sépare les parties linéaires et non linéaires :

$$[\mathbf{E}_{\alpha 3}^*]^i = [\mathbf{L}\mathbf{E}_{\alpha 3}^*]^i + [\mathbf{N}\mathbf{L}\mathbf{E}_{\alpha 3}^*]^i$$

Les relations précédentes permettent de définir la matrice linéaire  $\mathbf{L}\mathbf{C}^i$  telle que :

$$[\mathbf{L}\mathbf{E}_{\alpha 3}^*]^i = \mathbf{L}\mathbf{C}^i \mathbf{u}_n^e$$

En notant  $(\mathbf{g}_{30}^i)_x$ ,  $(\mathbf{g}_{30}^i)_y$ ,  $(\mathbf{g}_{30}^i)_z$  les composantes dans le repère cartésien global de  $\mathbf{g}_{30}$  aux points 4,5,6 définis par les équations [21] et

$$\mathbf{L}\mathbf{C}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{C}_{11}^i & \mathbf{L}\mathbf{C}_{12}^i & \mathbf{L}\mathbf{C}_{13}^i \\ \mathbf{L}\mathbf{C}_{21}^i & \mathbf{L}\mathbf{C}_{22}^i & \mathbf{L}\mathbf{C}_{23}^i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{g}_{10} \quad \mathbf{m}_2 = \mathbf{g}_{20} - \mathbf{g}_{10} \quad \mathbf{m}_3 = -\mathbf{g}_{20}$$

on obtient :

$$LC_{1i}^i = \left[ - (g_{30}^{i+3})_x \quad - (g_{30}^{i+3})_y \quad - (g_{30}^{i+3})_z \quad - \frac{1}{4} h^i V_{20}^i . m_i \quad \frac{1}{4} h^i V_{10}^i . m_i \right]$$

$$LC_{1(i+1)}^i = \left[ (g_{30}^{i+3})_x \quad (g_{30}^{i+3})_y \quad (g_{30}^{i+3})_z \quad - \frac{1}{4} h^{i+1} V_{20}^{i+1} . m_i \quad \frac{1}{4} h^{i+1} V_{10}^{i+1} . m_i \right]$$

$$LC_{13}^1 = LC_{11}^2 = LC_{12}^3 = \left[ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right]$$

La définition [18] des vecteurs matériels  $f_{\alpha}^i$  impose  $E_{23}^{*i} = - E_{13}^{*(i-1)}$  et donc :

$$LC_{2j}^i = - LC_{1j}^{i-1}$$

Compte tenu de l'expression de la dérivée linéarisée de la partie non linéaire des distorsions le long des côtés :

$$D_u [NLE_{13}^{*i}] \delta u = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)_m \left( \frac{\partial (\delta u)}{\partial \eta} \right)_m + \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_m \left( \frac{\partial (\delta u)}{\partial \zeta} \right)_m \right]$$

La matrice d'interpolation  $NLC^i$  telle que :

$$D_u [NLE_{\alpha 3}^{*i}] \delta u = NLC^i(u_n^e) \delta u_n^e$$

est fixée par les équations [22][23] et [24] :

En notant :

$$NLC^i = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} NLC_{11}^i & NLC_{12}^i & NLC_{13}^i \\ NLC_{21}^i & NLC_{22}^i & NLC_{23}^i \end{bmatrix}$$

$$a_i = \bar{u}^{i+1} - \bar{u}^i$$

$$b_i = \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^i = h^i (-\theta_1^i V_{20}^i + \theta_2^i V_{10}^i) + h^{i+1} (-\theta_1^{i+1} V_{20}^{i+1} + \theta_2^{i+1} V_{10}^{i+1})$$

on obtient :

$$NLC_{1i}^i = \left[ - b_{ix} \quad - b_{iy} \quad - b_{iz} \quad - h^i V_{20}^i . a_i \quad h^i V_{10}^i . a_i \right]$$

$$NLC_{1(i+1)}^i = \left[ b_{ix} \quad b_{iy} \quad b_{iz} \quad - h^{i+1} V_{20}^{i+1} . a_i \quad h^{i+1} V_{10}^{i+1} . a_i \right]$$

$$NLC_{13}^1 = NLC_{11}^2 = NLC_{12}^3 = \left[ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right]$$



et

$$NLC_{2j}^i = -NLC_{1j}^i$$

On connaît donc l'expression de la matrice d'interpolation  $LC^i$  introduite en [20] avec  $C^i = LC^i + NLC^i$ .

Ayant relié les composantes de distorsion dans le repère lié aux côtés de l'élément aux déplacements nodaux, il est nécessaire d'effectuer un changement de base de manière à exprimer, en fonction des déplacements nodaux, les distorsions transverses  $E_{\alpha 3}^i$  dans le repère naturel qui définissent l'interpolation [17]. Le tenseur de Green-Lagrange en chaque nœud  $i$  peut être exprimé dans les deux repères :

$$E^i = E_{kl}^* f_0^{ki} \otimes f_0^{li} = E_{mn}^i g_0^{mi} \otimes g_0^{ni}$$

Compte tenu de :

$$f_0^k = (f_0^k \cdot g_{10}) g_0^1$$

et de la position de  $f_1$  et  $f_2$  dans le plan  $g_1, g_2$  qui implique  $f^3 = g^3$ , les composantes  $E_{\alpha 3}^i$  peuvent être exprimées en fonction des composantes  $E_{\alpha 3}^{*i}$  :

$$[E_{\alpha 3}^i] = D^i [E_{\beta 3}^{*i}]$$

Les relations entre les vecteurs  $f_{k0}^i$  et  $g_{k0}^i$  définies dans le tableau 1 donnent les matrices  $D^i$  en chaque nœud :

$$D^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D^3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices d'interpolation modifiées introduites en [11] sont maintenant totalement déterminées :

$$D_u [E_{\alpha 3}] \delta u = {}^L \bar{B}_s \delta u_n^e + {}^{NL} \bar{B}_s(u_n^e) \delta u_n^e = \bar{B}_s(u_n^e) \delta u_n^e$$

$$D_u [E_{\alpha 3}] \delta u = \sum_{i=1}^3 N^i D^i [LC^i + NLC^i(u_n^e)] \delta u_n^e$$

On peut remarquer que la technique d'interpolation des distorsions (ou interpolation mixte) utilisée pour pallier au verrouillage concerne aussi bien la partie non linéaire des distorsions transverses que la partie linéaire. Ceci n'est pas toujours le cas dans les méthodes alternatives. Par exemple les conditions de Kirchhoff discrètes imposées dans la construction des éléments DKT ne concernent que la partie linéaire des déformations.

Les matrices d'interpolation  $\mathbf{B}_{mb}$  et  $\overline{\mathbf{B}}_s$  permettent le calcul des seconds membres définis en [15] et des matrices de rigidité définies en [9] et [13]. Dans le paragraphe suivant les matrices  $\mathbf{G}_{mb}$   $\mathbf{H}_{mb}$   $\mathbf{G}_s$  et  $\mathbf{H}_s$  nécessaires à l'obtention des matrices de rigidité initiales par [10] et [14] sont explicitées en tenant compte pour les deux dernières de l'interpolation mixte.

**4. Calcul des matrices de contraintes initiales**

**4.1. Membrane-flexion**

On cherche à mettre le terme de contrainte initiale de membrane-flexion apparaissant dans le méthode de Newton [7] sous la forme :

$$\int_{V_0} (D_u (D_u [E_{\alpha\beta}] \eta) \Delta u)^T [S^{\alpha\beta}] dV_0 = \eta_n^T \mathbf{K}_{\sigma mb} \Delta u_n \tag{25}$$

avec :

$$\mathbf{K}_{\sigma mb} = \underset{elt}{\mathbf{A}} \int_{V_0^e} \mathbf{G}_{mb}^T \mathbf{H}_{mb} [S^{\alpha\beta}] \mathbf{G}_{mb} dV_0$$

Compte tenu de l'expression de la partie non linéaire des déformations de membrane-flexion définie en [16], [25] peut être écrite :

$$\int_{V_0} (D_u (D_u [E_{\alpha\beta}] \eta) \Delta u)^T [S^{\alpha\beta}] dV_0 = \int_{V_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} & \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} \end{bmatrix} dV_0$$

soit :

$$\mathbf{H}_{mb} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{\alpha \beta} = \begin{bmatrix} S_{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 & S_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

et  $\mathbf{G}_{mb}$  telle que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{mb} u_n^e$$

dont l'expression est donnée par l'interpolation [6] :

$$\mathbf{G}_{mb} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\xi}^1 & \mathbf{G}_{\xi}^2 & \mathbf{G}_{\xi}^3 \\ \mathbf{G}_{\eta}^1 & \mathbf{G}_{\eta}^2 & \mathbf{G}_{\eta}^3 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\mathbf{G}_{\xi\alpha}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} & 0 & 0 & -\frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{h^i}{2} \mathbf{V}_{20x}^i & \frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{h^i}{2} \mathbf{V}_{10x}^i \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} & 0 & -\frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{h^i}{2} \mathbf{V}_{20y}^i & \frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{h^i}{2} \mathbf{V}_{10y}^i \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} & -\frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{h^i}{2} \mathbf{V}_{20z}^i & \frac{\partial \mathbf{N}^i}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{h^i}{2} \mathbf{V}_{10z}^i \end{bmatrix}$$

#### 4.2. Distorsions transverses

En ce qui concerne les termes de contraintes initiales de distorsions transverses apparaissant dans [12], l'interpolation des valeurs nodales [17] doit être prise en compte. On cherche à définir  $\mathbf{K}_{\sigma S}$  telle que :

$$\int_{V_0} (\mathbf{D}_u (\mathbf{D}_u [\mathbf{E}_{\alpha 3}] \boldsymbol{\eta}) \Delta \mathbf{u})^T [\mathbf{S}^{\alpha 3}] dV_0 = \boldsymbol{\eta}_n^T \bar{\mathbf{K}}_{\sigma S} \Delta \mathbf{u}_n$$

Compte tenu de l'interpolation des distorsions transverses [17] le terme de contraintes initiales peut être mis sous la forme :

$$\int_{V_0} (\mathbf{D}_u (\mathbf{D}_u [\mathbf{E}_{\alpha 3}] \boldsymbol{\eta}) \Delta \mathbf{u})^T [\mathbf{S}^{\alpha 3}] dV_0 = \int_{V_0} \left( \mathbf{D}_u \left( \mathbf{D}_u \left[ \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}^i \mathbf{D}^i \mathbf{E}_{\alpha 3}^* \right] \boldsymbol{\eta} \right) \Delta \mathbf{u} \right)^T [\mathbf{S}^{\alpha 3}] dV_0$$

soit :

$$\bar{\mathbf{K}}_{\sigma S} = \mathbf{A}_{elt} \int_{V_0^e} \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}^i [\mathbf{G}_s^{iT} \mathbf{H}_s^i \mathbf{G}_s^i] dV_0$$

avec :

$$\mathbf{H}_s^i = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{N} & \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{N} & \mathbf{N} & \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{13} & \mathbf{s}_{23} & \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{13} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{S}}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{S}}_{13} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{23} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{S}}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{S}}_{23} \end{bmatrix}$$

en notant :

$$\bar{\mathbf{S}}^{13} = \mathbf{D}_{11}^i \mathbf{S}^{13} + \mathbf{D}_{21}^i \mathbf{S}^{23} \quad \bar{\mathbf{S}}^{23} = \mathbf{D}_{12}^i \mathbf{S}^{13} + \mathbf{D}_{22}^i \mathbf{S}^{23}$$

$\mathbf{G}_s^i$  est fixé par les équations [22][23] et [24], on obtient :

$$\mathbf{G}_s^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^i & \mathbf{M}_{12}^i & \mathbf{M}_{13}^i \\ \mathbf{M}_{21}^i & \mathbf{M}_{22}^i & \mathbf{M}_{23}^i \\ \mathbf{M}_{31}^i & \mathbf{M}_{32}^i & \mathbf{M}_{33}^i \end{bmatrix}$$

$$-\mathbf{M}_{1i}^i = -\mathbf{M}_{2i}^i = \mathbf{M}_{1(i+1)}^i = \mathbf{M}_{2(i-1)}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{1(i-1)}^i = \mathbf{M}_{2(i+1)}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{3i}^i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -h^i \mathbf{V}_{20x}^i & h^i \mathbf{V}_{10x}^i \\ 0 & 0 & 0 & -h^i \mathbf{V}_{20y}^i & h^i \mathbf{V}_{10y}^i \\ 0 & 0 & 0 & -h^i \mathbf{V}_{20z}^i & h^i \mathbf{V}_{10z}^i \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi une matrice de contrainte initiale cohérente avec la formulation reposant sur l'interpolation [17] des distorsions transverses.

### 5. Exemples numériques

La réponse fournie au patch test par l'élément proposé est analysée en 5.1. Trois exemples linéaires classiques (5.2) montrent les performances de l'élément sur des calculs linéaires. Les tests non linéaires 5.3 mettent en évidence l'efficacité de l'élément triangulaire proposé dans des cas non linéaires. Enfin le dernier exemple (5.4) est une application au cas de la modélisation numérique de l'emboutissage pour laquelle l'élément est particulièrement bien adapté. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec d'autres éléments classiques notamment le quadrangle à quatre nœuds MITC4 développé par Dvorkin et Bathe [DVO 84]. Les résultats à d'autres tests peuvent être trouvés dans [BOI 91a][BOI 92a][BOI 92b]

#### 5.1. Patch test

Les conditions du patch-test pour les éléments triangulaires sont définies dans [ROB 78]. Le maillage est non-symétrique.

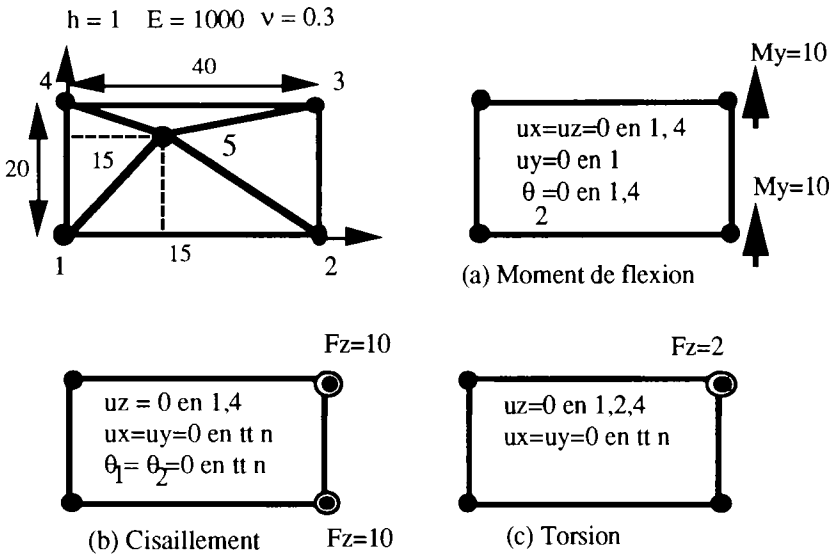


Figure 4. Patch test

Dans le cas (a), la plaque est chargée par un moment de flexion et le moment  $M_y$  est constant. Une courbure constante est obtenue le long des côtés. Les déplacements calculés sont ceux fournis par la théorie de Kirchhoff et les contraintes sont exactes.

Dans le cas (b), les rotations sont fixées à une valeur nulle et la plaque est soumise à un effort de cisaillement. La répartition linéaire du déplacement transverse est atteinte, avec une valeur exacte aux nœuds. La contrainte de cisaillement transverse est constante et égale à 1. Les résultats sont atteints (cas (a) et (b)) aussi bien avec trois points de Gauss dans la surface moyenne qu'avec un seul point.

Dans le cas (c), où la solution attendue est telle que  $M_{xy}$  est constant est égal à 1, on obtient un moment  $M_{xy}$  variant très faiblement ( $M_{xy} \in [0.991, 1.004]$ ). Cette variation disparaît quand l'épaisseur devient très faible ou quand le maillage est symétrique.

## 5.2 Tests linéaires

Les trois tests suivants (tableau 2) montrent le comportement de l'élément pour des problèmes classiques dans une hypothèse de petites perturbations. Ces trois exemples sont sévères et considérés comme significatifs de la performance d'un élément de coque [BEL 85][MAC 86]. Seule la partie utile de la structure a été maillée pour des raisons de symétrie. Les maillages utilisés sont de deux types décrits figure 8. Dans le premier cas d'une coque hémisphérique (figure 5) la convergence est bonne bien que moins rapide que celle obtenue avec le quadrangle MITC4. Le deuxième test (cylindre poinçonné figure 6) demande un nombre d'éléments assez élevé pour atteindre une précision correcte. Cela est dû à la concentration des déformations dans la zone voisine du point d'application de l'effort P due à la présence des diaphragmes. La précision obtenue avec le triangle proposé est très proche de celle atteinte avec le quadrangle MITC4 lorsque le maillage est de type cross diagonal. Pour le test de Scordelis-Lo, le résultat en déplacement vertical au point A a été comparé pour un maillage 16x16 type A avec les résultats obtenus avec un élément DKT (rapport avec la solution  $w/w_0 = 0.958$  [DVO 84]) et l'élément de coque STIFF63 du logiciel ANSYS [DES 89] (rapport avec la solution  $w/w_0 = 0.959$ ). La solution atteinte par le triangle proposé est très légèrement meilleure (rapport avec la solution  $w/w_0 = 0.965$ ). Dans tous les cas les calculs sont effectués avec un seul ensemble de deux points de Gauss le long de la normale au centre de gravité. La rapidité de convergence de l'élément sur ces tests est assez bonne bien que moins élevée que celle du quadrangle MITC4. On peut néanmoins noter que la géométrie des trois exemples est telle que l'utilisation de quadrangles carrés (ou sensiblement) est possible ce qui est très favorable et loin d'être toujours possible dans les calculs de structures réelles.

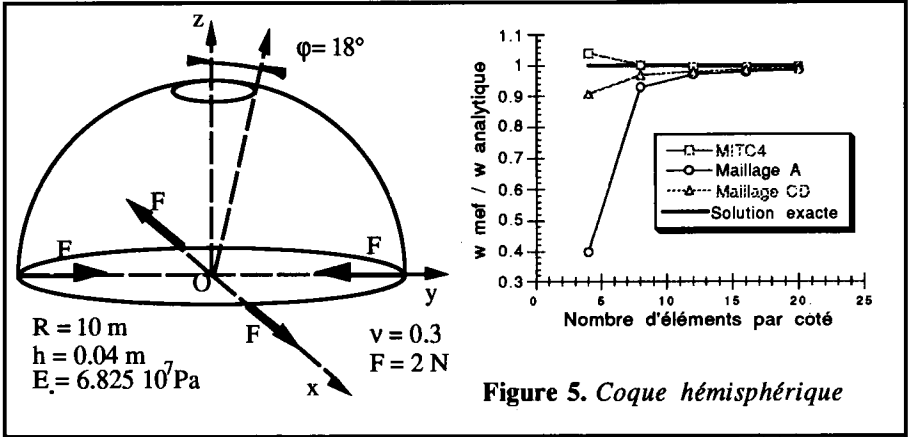


Figure 5. Coque hémisphérique

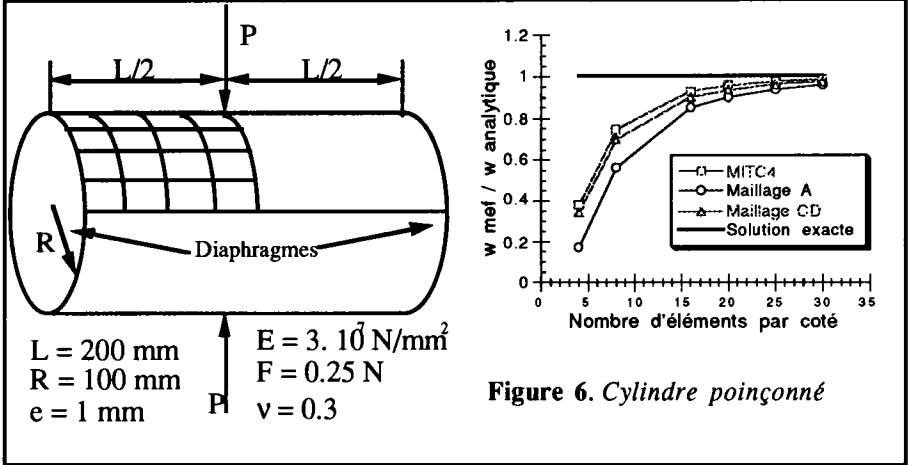


Figure 6. Cylindre poinçonné

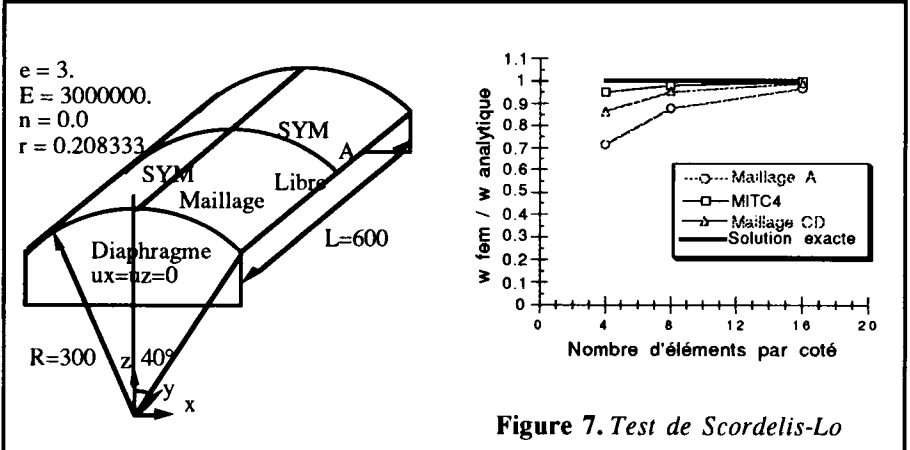


Figure 7. Test de Scordelis-Lo

Tableau 2. Tests linéaires

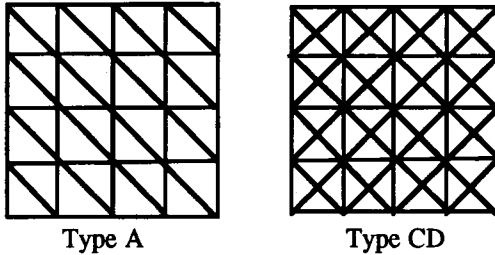


Figure 8. Types de maillages utilisés pour les tests linéaires

### 5.3 Tests non linéaires

Dans les trois exemples suivants, les non-linéarités géométriques sont prises en compte. Le premier de ces tests est constitué (figure 9) par l'étude d'une plaque simplement appuyée à ses deux extrémités, supposée de dimension transversale infinie et soumise à une pression normale uniforme et dans un état de déformations planes. Le maillage de la moitié de la plaque est composé de 2x5 éléments. La condition de déformation plane est obtenue en fixant tous les ddl non contenus dans le plan à une valeur nulle. Une solution analytique prenant en compte les non-linéarités géométriques est donnée par Timoshenko [TIM 59]. Cette solution est très différente de la solution linéaire. Dans le deuxième exemple (figure 10), une plaque carrée encastrée est soumise à une pression uniforme. Une solution classique de Rayleigh-Ritz a été proposée par Way [WAY 38]. Les résultats obtenus par éléments finis par Hughes [HUG 80] sont également comparés. Enfin une coque cylindrique articulée sur ses côtés droits (figure 11) est sollicitée par un effort ponctuel. La force maximum avant le flambage est de 2.2 kN. Un maillage 4x4 cross-diagonal est utilisé. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de Hughes [HUG 80] et Horrigmoe [HOR 77].

Dans ces trois exemples les solutions obtenues en utilisant le triangle proposé sont très voisines des solutions exactes. Elles sont données pour plusieurs intensités de force mais un seul incrément de charge est nécessaire pour converger vers la force maximum imposée dans chaque étude. Ceci est notamment le cas pour la force maxi (2.2 kN) avant flambage du troisième test. Ces exemples ont été également traités en utilisant le quadrangle MITC4. Les résultats obtenus sont identiques mais il est très intéressant de constater que le temps CPU nécessaire au triangle est environ deux fois moins élevé. Ceci est simplement dû au nombre de points de Gauss utilisés plus faible pour le triangle (2x1 ensembles pour un motif quadrangulaire) que pour le quadrangle (4 ensembles). Pour les simulations à nombre de ddl peu élevé le temps de calcul est sensiblement proportionnel à ce nombre de points d'intégration.



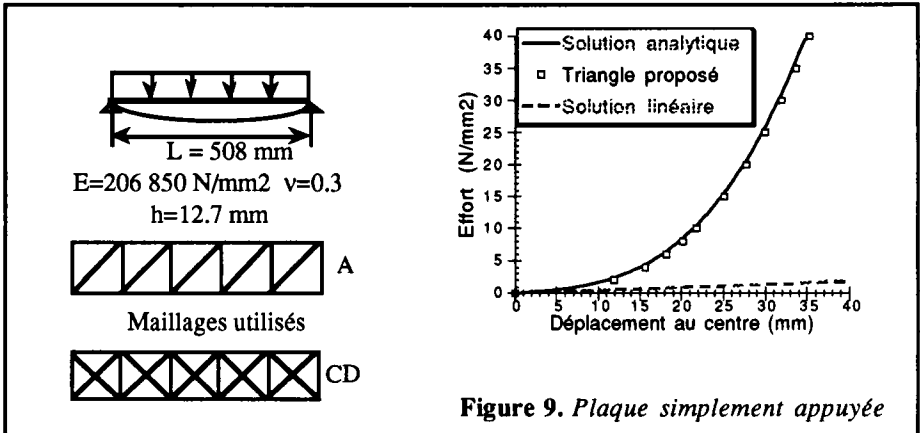


Figure 9. *Plaque simplement appuyée*

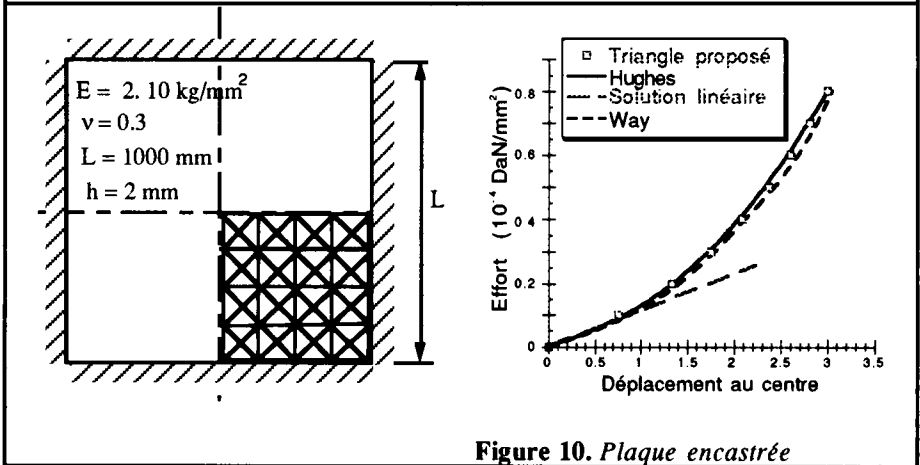


Figure 10. *Plaque encastrée*

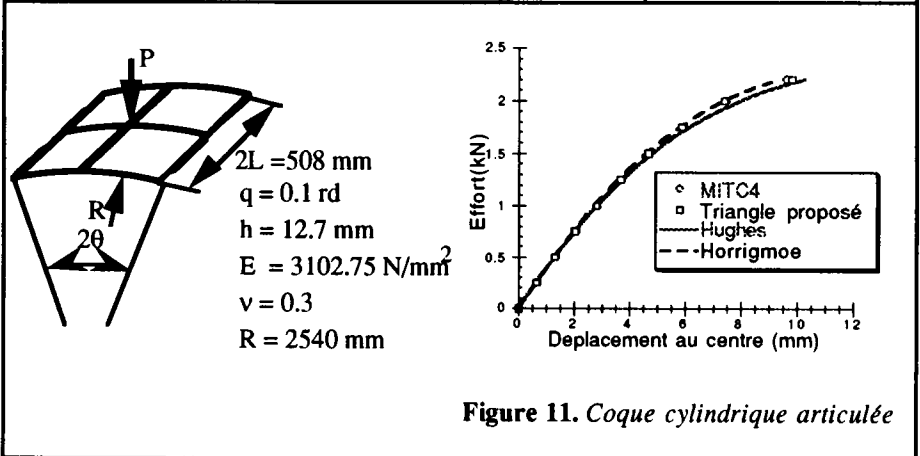


Figure 11. *Coque cylindrique articulée*

Tableau 3. Tests non linéaires

On peut enfin noter que ces calculs non linéaires sont effectués en utilisant strictement la formulation décrite en 2. On pourrait envisager de simplifier cette approche en modifiant la matrice de rigidité ce qui change le taux de convergence de la méthode de Newton mais n'affecte pas la valeur de la solution obtenue à convergence. Par exemple on pourrait omettre le calcul de la matrice de contrainte initiale  $\mathbf{K}_\sigma$ . Dans ce cas les calculs ne convergent pas pour les exemples précédents et il apparaît essentiel de calculer strictement  $\mathbf{K}_\sigma$  comme défini en 2.

#### 5.4 Simulation numérique d'un emboutissage de tôle

Dans cet exemple le triangle est utilisé pour la simulation de la mise en forme d'une tôle mince par emboutissage. L'exemple étudié provient d'un benchmark proposé par Lee, Wagonner et Nakamachi [LEE 1990] (figure 12). Le poinçon est hémisphérique, le maillage est imposé (figure 13) et la tôle est bloquée sur sa circonférence extérieure. Le coefficient de frottement de la tôle sur les outils est 0.3. Le comportement est supposé élastoplastique à écrouissage isotrope. Un algorithme basé sur une fonction seuil

$$f(\sigma, \sigma_0) = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{P} : \sigma - \frac{1}{2} \sigma_0$$

et un schéma de prédiction correction est utilisé [BOI 93].

Les résultats obtenus (figures 14 et 15) sont en corrélation avec les conclusions du rapport sur le benchmark. La simulation a également été effectuée en utilisant le quadrangle MITC4 et les solutions obtenues sont très voisines. On constate que le temps de calcul est presque deux fois moins important dans le cas d'utilisation du triangle. Cet élément est donc particulièrement bien adapté à ce type de simulation. Ceci est d'autant plus vrai quand la géométrie est complexe car le maillage en triangles est beaucoup plus aisé à réaliser voir même dans certains cas le seul possible. D'autres exemples d'applications à géométrie plus complexe et avec avalement sont réalisés dans [DAN 92][BOI 91b] et seront résumés dans un prochain article. L'élément de coque triangulaire proposé s'avère efficace pour l'ensemble de ces simulations.

La formulation proposée ici (chapitre 2) est basée sur une méthode dite implicite où la vérification de l'équilibre statique en fin d'incrément est assurée par une méthode de Newton globale. Les simulations de mise en forme telles que l'emboutissage peuvent également être faites par des méthodes dynamiques explicites [SCH 1991]. On cherche, dans ce type de méthode, à utiliser des éléments à faible nombre de points d'intégration car les calculs effectués sont principalement locaux. L'élément triangulaire décrit ici est bien adapté à ces méthodes car sa formulation inclut la prise en compte complète des non-linéarités et il fonctionne avec un seul point de Gauss dans la surface moyenne. Des exemples d'utilisation en méthodes explicites seront décrits dans un prochain article.

$$E = 69000 \text{ Mpa}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\bar{\sigma} = 589 (10^{-4} + \bar{\epsilon})^{0.216} \text{ Mpa}$$

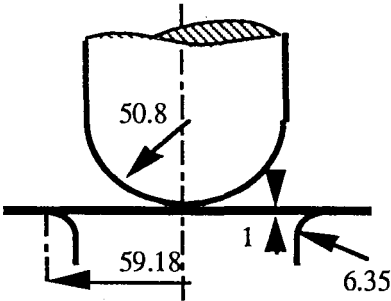


Figure 12. Géométrie initiale

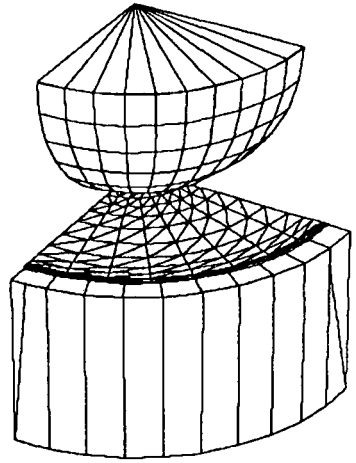


Figure 13. Outils et maillage initial

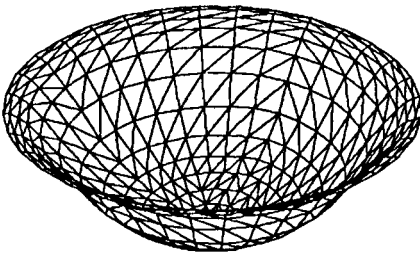


Figure 14. Maillage déformé

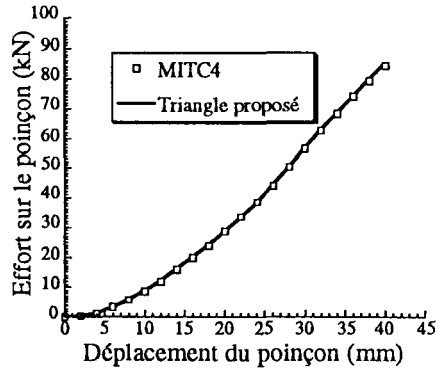


Figure 15. Effort sur le poinçon

## 6. Conclusions

L'élément de coque triangulaire à trois nœuds proposé est un élément simple et bien adapté aux calculs en grandes perturbations. Son fonctionnement avec un seul ensemble de point de Gauss le long de la normale au centre de gravité le rend efficace d'un point de vue numérique, ce qui est essentiel dans les problèmes non linéaires à grand nombre d'incrément tels que la simulation de l'emboutissage.

La formulation basée sur une cinématique de Ahmad et une interpolation des distorsions transverses est simple et efficace. Un repère matériel lié aux côtés de

l'élément permet de fixer les valeurs nodales de ces distorsions. Les modifications apportées par cette interpolation mixte concernent aussi bien la partie non linéaire des déformations de cisaillement que la partie linéaire. Elles sont prises en compte dans le calcul des matrices de rigidité et résidus mais aussi dans l'expression de la matrice de contrainte initiale. L'utilisation qui est faite des mêmes fonctions pour l'interpolation des déplacements et de la géométrie est cohérente avec la méthode incrémentale de résolution des problèmes non linéaires dans laquelle les incréments de déplacements sont ajoutés à la position en début d'incrément de charge. Le triangle satisfait le patch test et les solutions aux tests linéaires sont obtenues quelle que soit l'épaisseur de la coque, le verrouillage en cisaillement étant évité. L'élément ne présente pas de modes à énergie nulle (un mode dans le cas de l'intégration réduite mais non propageable).

Les résultats aux tests linéaires sont satisfaisants même si la convergence est moins rapide que pour le quadrangle MITC4 (ceci dans des cas de maillages carrés très favorables à l'utilisation de quadrangles). Dans les exemples non linéaires les solutions sont très bonnes et le temps de calcul sensiblement inférieur à celui demandé par le quadrangle MITC4.

## Bibliographie

[AHM 71] AHMAD S., IRONS B.M., ZIENKIEWICZ O.C., 'Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements', *Int J. Numer. Methods Eng.*, **2**, 419-451 (1971).

[BAT 80] BATOZ J.L., BATHE K.J., HO L.O., 'A study of three node triangular plate bending elements', *Int J. Numer. Methods Eng.*, **15**, 1771-1812 (1980).

[BAT 80] BATOZ J.L., 'A explicit formulation for an efficient triangular plate bending element', *Int J. Numer. Methods Eng.*, **18**, 1077-1089 (1980).

[BAT 82] BATHE K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall (1982).

[BAT 89] BATOZ J.L., LARDEUR P., 'A discret shear triangular nine d.o.f element for the analysis of thick to very thin plates', *Int J. Numer. Methods eng.*, **28**, 533-560 (1989).

[BEL 85] BELYTSCHO T., STOLARSKI H., LIU W.K., 'Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **51**, 221-258 (1985).

[BER 86] BERNADOU M., 'Some finite element approximations of thin shell problems', *In Hughes T.J.R. and Hinton E. (Ed) : Finite Element Methods for Plates and Shell Structures*. **1**, 62-85 Pineridge Press (1986).

[BOI 91 a] BOISSE P., DANIEL J.L., GELIN J.C. : A combined membrane and bending model for the analysis of large elastic-plastic deformations of thin shells  
Proc of the Int. Seminar Mecamat'91. Ed by C. Teodosiu, A.A Balkema (1991).

[BOI 91b] BOISSE P., DANIEL J.L., GELIN J.C., 'Sheet metal forming using three and four node shell elements', *Proceedings of Int Conf "FE-Simulation of 3D sheet metal forming process in automotive industries"* , VDI Report 894, 109-122 (1991).

[BOI 92a] BOISSE P., DANIEL J.L., GELIN J.C., 'A simple isoparametric three node shell finite element', *Computers and Structures*, **44**, n°6, 1263-1273 (1992).

[BOI 92b] BOISSE P., DANIEL J.L., GELIN J.C., 'A new class of three nodes and four nodes shell elements for the finite inelastic strain analysis. Application in sheet metal forming', *In New Advances in Computational Structural Mechanics*. Edited by P. Ladeveze and O.C. Zienkiewicz. Elsevier, 303-317 (1992).

[BOI 93] BOISSE P., BOUBAKAR M.L., GELIN J.C., 'Modélisation numérique du comportement élasto-plastique anisotrope dans des structures coques en grandes perturbations. Application à l'emboutissage.', *Actes du Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (1993).

[DAN 92] DANIEL J.C., 'Contribution à la simulation numérique de l'emboutissage des tôles minces par de éléments finis de coque minces' Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté. (1992).

[DES 89] DESALVO G.J., GORMAN R.W., 'ANSYS engineering analysis system User's manual', Swanson Analysis System (1989).

[DVO 84] DVORKIN E.N. AND BATHE K.J. , 'A Continuum Mechanics based Four node Shell Element for General Non-linear Analysis', *Engineering Computations*, **1**, 77-78 (1984).

[HUG 78] HUGHES T.J.R., COHEN M. AND HAROUN M., 'Reduced and selective integration technics in finite element analysis of plates', *J. Nucl. Eng. Des.*, **46**, 203-222 (1978).

[HUG 80] HUGHES T.J.R., LIU W.K., 'Non linear finite element analysis of shells. Part 1. Three dimensional shells', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **26**, 331-362 (1980).

[HUG 81] HUGHES T.J.R. AND TEZDUYAR T.E. , 'Finite Element Based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the four node bilinear Isoparametric Element ', *J. Applied Mechanics* , **48**, 587.596 (1981).

[HUG 87] HUGHES T.R., The finite element method. Linear Static and Dynamic finite element Analysis, Prentice Hall. (1987).

[HOR 77] HORRIGMOE G. , 'Finite element instability analysis of free form shells', Report 77-2 Division of structural Mechanics, Norwegian Institute of Technology. University of Trondheim. Norway (1977).

[IRO 65] IRONS B. AND DRAPER K.J., 'Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution of plate bending', *AIAA Journal* , 3, 961-977 (1965).

[LEE 1990] LEE J.K., WAGONER R.H., NAKAMACHI E. , ' A benchmark test for sheet forming analysis', Report n° ERC/NSM-5-90-22, National Science Foundation, Engineering Research Center for Net Shape Manufacturing, The Ohio State University (1990).

[MAC 82] MACNEAL R.H.: Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions. *J. Nucl. Eng. Des.* **70**, pp 3-12 (1982).

[MAC 86] MACNEAL R.H., 'The evolution of low order plate and shell elements in MCS Nastran', In *Hughes T.J.R. and Hinton E. (Ed) : Finite Element Methods for Plates and Shell Structures*, **1**, 85-127 Pineridge Press (1986).

[Mal 78] MALKUS D.S., HUGHES T.J.R., 'Mixed finite element methods. Reduced and selective integration techniques. A unification of concepts', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **15**, 63-81 (1978).

[PIN 91] PINSKY P.M., JASTI R.V., 'On use of Lagrange multiplier compatible modes for controlling accuracy and stability of mixed shell finite elements.', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **85**, 151-182 (1991).

[PRA 69] PRATO C., 'Shell finite element via Reissner's principle', *Int. J. Solids Struct.*, **5**, 1119-1133 (1969).

[SCH 1991] SCHWEIZERHOF K., HALLQUIST J.O. ' Explicit integration schemes and contact formulations for sheet metal forming' *Proceedings of Int Conf "FE-Simulation of 3D sheet metal forming process in automotive industries"* , VDI report 894, 405-440 (1991).

[SIM 86] SIMO J.C., HUGHES T.J.R., 'On variational Foundations of Assumed Strain Methods', *J. of Applied Mechanics*, **53-1**, 51-54 (1986).

[SIM 89] SIMO J.C., FOX D.D., RIFAI M.S., 'On a stress resultant geometrically exact shell model. Part 2: The linear theory; Computational aspects' *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **73**, 52-92 (1989).

[STA 85] STANLEY G., 'Continuum based shell elements', Stanford University Ph D Thesis (1985).

[STA 87] STANLEY G., PARK K.C., HUGHES T.R.J: Continuum based resultant shell elements. In Hughes T.J.R. and Hinton E. (Ed) : Finite Element Methods for Plates and Shell Structures. Vol 1, pp 1-45 Pineridge Press (1986).

[STO 89] STOLARSKI H.K. AND CHIANG M.Y.M., 'On a definition of the assumed shear strains in formulation of the  $C^0$  plate elements', *Eur. J. Mech., A/Solids*, 8, n° 1, 53-72 (1989).

[SUM 83] SUMIHARA K., 'Thin shell and new invariant elements by hybrid stress method' Doctorat Thesis, MIT Cambridge (1983).

[TIM 59] TIMOSHENKO S., *Theory of plates and shells*, McGraw Hill (1959).

[WAY 38] WAY S., 'Uniformly loaded, clamped, rectangular plates with large deformation', *Proc 5th International Congress of Applied Mechanics*, Cambridge, MA (1938).

[ZIE 90] ZIENKIEWICZ O.C. , TAYLOR R.L. , Papadopoulos P., Onate E., 'Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements', *Computers and Structures*, 35 n°4, 505-522 (1990).

[ZIE 71] ZIENKIEWICZ O.C. , Taylor R.L. and Too J.M., 'Reduced integration technics in general analysis of plates and shells', *Int J. Numer. Methods Eng.*, 3, 275-290 (1971).