
Un élément fini de poutre amortie par film viscoélastique mince contraint

Michel Macé

DCN Cherbourg
ET/ES, BE/CN
BP 10
50115 Cherbourg Naval

RÉSUMÉ. L'objet de cet article est de présenter un élément fini de poutre composite comportant un film viscoélastique mince. La première partie résume une nouvelle formulation variationnelle de poutre. Cette théorie repose sur des hypothèses concernant les champs de déplacements et de contraintes aux interfaces. Ensuite on décrit la méthode d'établissement de l'élément fini qui en résulte. Dans le but de valider cette méthode, des essais en dynamique ont été effectués. La confrontation entre les résultats de calculs et les résultats expérimentaux, montre que la méthode proposée permet de prédire le comportement dynamique de telles structures avec une bonne précision.

ABSTRACT. In this paper, a new finite element of composite beam damped by means of a thin viscoelastic film is presented. The first part summarizes the new variational formulation of damped beam. The present theory is based upon a piece-wise linear displacement field and a stress field that fulfills continuity conditions at the interfaces between the thin film and the thick skins. Next, it is shown how the finite element was derived. In order to demonstrate the accuracy of the present method, experiments were carried out. The comparison between the experimental results and the computational results shows that the proposed approach is efficient in predicting the dynamic response of beams that are damped with a thin viscoelastic layer.

MOTS-CLÉS : calculs dynamiques de structures, poutres, amortissement, film viscoélastique mince, cisaillement transversal.

KEY WORDS : structural dynamics, beam, damping, thin viscoelastic film, transverse shearing.

1. Introduction

La technique du "film contraint" est souvent utilisée pour réduire le niveau vibratoire des structures [MAR 71-TOR 80]. Le contraste important entre les rigidités du film d'une part, et les structures de base et de contrainte (les "peaux") d'autre part, peut entraîner un phénomène de cisaillement transversal important dans l'épaisseur de la structure lorsque celle-ci est soumise à des sollicitations de flexion. Il est connu que les théories classiques de poutre de type Euler-Bernouilli (indéformabilité des normales) ou de Timoshenko (cisaillement transverse constant dans toute l'épaisseur), ne sont pas adaptées pour modéliser ce type de cisaillement lié au glissement relatif des deux peaux. Dans cet article est résumé un travail de recherche [MAC 91] qui a permis d'élaborer une nouvelle méthode pour calculer les structures amorties par insertion d'un film viscoélastique mince. Cette étude prend en compte les particularités géométriques et matérielles de ce film, à savoir sa minceur, sa faible rigidité par rapport aux peaux, ainsi que son caractère amortissant.

2. Considérations géométriques

On considère une poutre composite amortie par un film viscoélastique mince représentée en Figure 1. On suppose que les peaux supérieure (notée Ω^+) et inférieure (notée Ω^-) sont des stratifiés composés de couches de matériaux macroscopiquement homogènes et de plus parfaitement liées entre elles. Les épaisseurs notées h^+ et h^- sont supposées constantes, ainsi que la largeur b commune à toutes les couches. Le film Σ est supposé très mince et adhérent parfaitement aux peaux épaisses Ω^+ et Ω^- ; les interfaces sont notées Σ^+ et Σ^- .

La poutre est supposée soumise à des sollicitations intérieures (forces volumiques notées \mathbf{f}) sauf dans le film, et à des efforts, extérieurs notés \mathbf{F} sur les faces supérieure et inférieure.

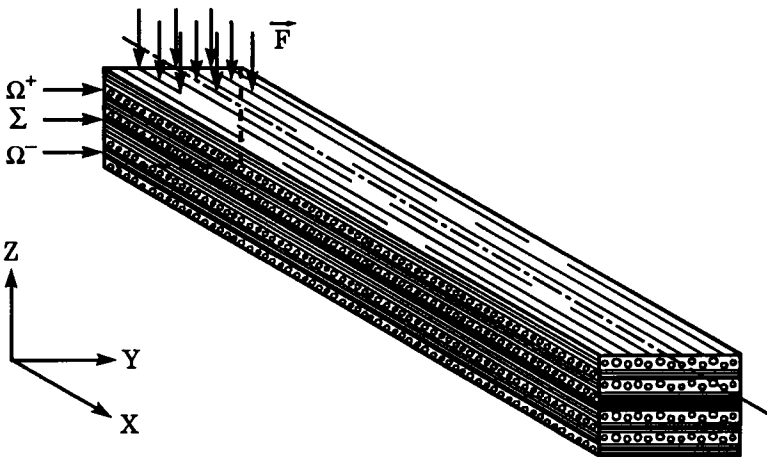


Figure 1. Schématisation d'une poutre composite amortie

3. Champs de déplacements et de contraintes

On considère les mouvements de la poutre dans le plan vertical. Dans un premier temps, on suppose que les déplacements longitudinaux sont linéaires par couche. Ainsi dans Ω^+ , nous écrivons :

$$U^+(x, z, t) = u^+(x, t) + z^+ \beta^+(x, t) \cdot x \quad [1]$$

et dans Ω^- :

$$U^-(x, z, t) = u^-(x, t) + z^- \beta^-(x, t) \cdot x \quad [2]$$

où $u^+(x, t)$ et $u^-(x, t)$ sont les déplacements longitudinaux au niveau des fibres neutres des peaux, $\beta^+(x, t)$ et $\beta^-(x, t)$ les rotations des normales, et z^+ , z^- sont les coordonnées verticales mesurées par rapport aux fibres neutres respectives.

D'autre part, le déplacement vertical est supposé constant dans toute l'épaisseur de la poutre amortie :

$$W = w(x, t) \quad [3]$$

En ce qui concerne les contraintes de cisaillement transverse aux interfaces Σ^+ et Σ^- , on considère qu'elles sont continues au passage du film car son épaisseur est supposée nulle :

$$\tau(\Sigma^+) = \tau(\Sigma^-) = \tau(\Sigma) \quad [4]$$

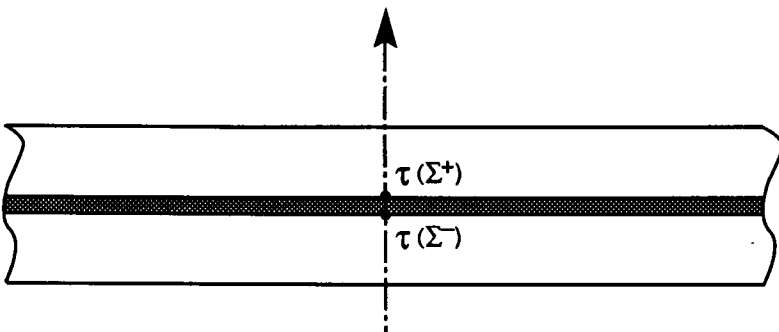


Figure 2 . Représentation schématique des interfaces

4. La nouvelle formulation variationnelle

L'originalité de la méthode proposée tient au fait que l'on considère finalement deux poutres (de Timoshenko) qui, glissant l'une sur l'autre, interagissent par l'intermédiaire du film mince ; celui-ci exerce une action tangentielle notée $\tau (\Sigma)$. La méthode de calcul de la nouvelle formulation variationnelle consiste à modifier la contribution du film mince dans l'énergie de déformation (voir par exemple la formule 4 de la référence [DUV 90]) de la poutre amortie en utilisant la formule de Green, ainsi que les relations de continuité du déplacement normal [3] et de la contrainte de cisaillement [4]. Finalement, on trouve que le champ de déplacements est l'unique solution du problème suivant :

“ Trouver U cinématiquement admissible tel que l'on ait, quelque soit V :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} [\sigma (U) \varepsilon (V) + \tau (U) \gamma (V)] d\Omega + \dots \\ & \dots \int_{\Sigma} \tau (\Sigma) [V] b dx \\ = & \int_{\Omega^+ \cup \Omega^-} f \cdot V d\Omega + \int_{\Sigma} F \cdot V d\Sigma \quad \text{”} \end{aligned} \quad [5]$$

où $[V]$ désigne le saut de déplacements (tangentiels) d'interfaces :

$$[V] = V (\Sigma^+) - V (\Sigma^-) \quad [6]$$

f sont les forces volumiques dans le domaine Ω , supposées négligeables dans le film viscoélastique mince ;

F sont les forces de pression exercées sur les faces supérieure et inférieure de la poutre composite.

En régime harmonique établi, les calculs sont effectués avec des contraintes, des déplacements et des déformations complexes (au sens mathématique du terme).

5. Relations de comportement

5.1. Peaux

Lorsque l'on calcule la contribution de l'énergie de déformation dans les deux peaux épaisses, on est amené à considérer les efforts généralisés suivants dans Ω^+ :

Membrane :

$$N^+(x, t) = \int_{-\frac{h^+}{2}}^{+\frac{h^+}{2}} \sigma(x, z, t) dz \quad [7]$$

Flexion-torsion :

$$M^+(x, t) = \int_{-\frac{h^+}{2}}^{+\frac{h^+}{2}} z^+ \sigma(x, z, t) dz \quad [8]$$

Cisaillement transverse :

$$Q^+(x, t) = \int_{-\frac{h^+}{2}}^{+\frac{h^+}{2}} \tau(x, z, t) dz \quad [9]$$

De même dans Ω^- .

De plus, nous avons :

$$\sigma(x, z, t) = E^\pm(x, z) \frac{\partial U^\pm}{\partial x}(x, z, t) \quad [10a]$$

$$\tau(x, z, t) = G^\pm(x, z) \left(\frac{\partial w^\pm}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial U^\pm}{\partial z}(x, z, t) \right) \quad [10b]$$

où $E^\pm(x, z)$ et $G^\pm(x, z)$ sont les modules d'Young longitudinaux et de cisaillement des matériaux constituant les peaux épaisses.

Les modules techniques $E^\pm(x, z)$ et $G^\pm(x, z)$ étant constants par plage, on trouve finalement les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix}^{\pm} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}^{\pm} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \chi \\ \gamma \end{Bmatrix}^{\pm} \quad [10c]$$

ou :

$$\begin{aligned} A^{\pm} &= \sum_i E^{\pm}(i) [z(i) - z(i-1)]^{\pm} \\ B^{\pm} &= \sum_i \frac{E^{\pm}(i)}{2} [z^2(i) - z^2(i-1)]^{\pm} \\ D^{\pm} &= \sum_i \frac{E^{\pm}(i)}{3} [z^3(i) - z^3(i-1)]^{\pm} \\ S^{\pm} &= \sum_i G^{\pm}(i) [z(i) - z(i-1)]^{\pm} \end{aligned} \quad [11]$$

sont les raideurs de membrane, couplage, flexion-torsion et de cisaillement transverse définies séparément pour chaque peau ; $\epsilon^{\pm} \left(= \frac{\partial u^{\pm}}{\partial x} (x, t) \right)$, $\chi^{\pm} \left(= \frac{\partial \beta^{\pm}}{\partial x} (x, t) \right)$ et $\gamma^{\pm} \left(= \frac{\partial u^{\pm}}{\partial z} (x, t) + \frac{\partial w}{\partial x} (x, t) \right)$ sont les déformations, changements de courbure et angles de cisaillement transverse ; $z^{\pm}(i)$ sont les ordonnées des interfaces entre couches à l'intérieur de Ω^{\pm} .

En dynamique, les inerties de translation, de rotation et de couplage sont prises en compte ; elles sont définies par :

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2, I_3 \rangle^{\pm} &= \int_{\frac{-h^{\pm}}{2}}^{\frac{+h^{\pm}}{2}} \rho^{\pm} (x, z) \langle 1, z, z^2 \rangle^{\pm} dz \\ &= \sum_i \rho^{\pm}(i) \left\langle z(i) - z(i-1), \frac{z^2(i)}{2} - \frac{z^2(i-1)}{2}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \frac{z^3(i)}{3} - \frac{z^3(i-1)}{3} \right\rangle^{\pm} \end{aligned} \quad [12]$$

5.2. Film viscoélastique

Quant à la loi de cisaillement (contrainte $\tau(\Sigma)$) dans le film viscoélastique considéré, supposé isotrope, elle peut être donnée dans le domaine temporel par une loi de type fractionnaire [TOR 87] de la forme suivante :

$$\tau(\Sigma) + b_1 \frac{\partial^{\beta'} \tau(\Sigma)}{\partial t^{\beta'}} = k' [U] + \mu \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial t^{\alpha'}} [U] \quad [13a]$$

où α' et β' sont des puissances non entières, b_1 , k' et μ des paramètres du matériau donnés par les essais, $[U]$ est le saut de déplacements tangentiels d'interfaces

$$\Sigma \pm : [U] = U(\Sigma^+) - U(\Sigma^-) = u^+ - u^- - \left(\frac{h^+ \beta^+ + h^- \beta^-}{2} \right) \quad [13b]$$

Dans cette loi, nous avons privilégié les effets de glissement des peaux l'une sur l'autre, en négligeant les déformations de flexion $\frac{\partial w}{\partial x}$ devant les déformations liées au glissement et proportionnelles au saut de déplacements $[U]$. On montre que l'angle de déformation en cisaillement dans le film mince peut s'écrire :

$$\gamma(\Sigma) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \approx \frac{[U]}{e} \quad [14]$$

où e est l'épaisseur du film mince.

En régime harmonique établi, si l'on suppose que tous les points de la structure vibrent en phase, on peut représenter cette loi de cisaillement de type complexe dans le domaine fréquentiel [FER 80] :

$$\tau(\Sigma) = k^* [U] \quad [15]$$

$$\text{avec } k^* = \frac{k' + \mu(j\omega)^{\alpha'}}{1 + b_1(j\omega)^{\beta'}} = \frac{G^*}{e} \quad (j^2 = -1) \quad [16]$$

6. Discrétisation par éléments finis

Les intégrations dans les épaisseurs des peaux et par parties nous conduisent alors à la nouvelle formulation variationnelle suivante :

“ Trouver les cinq fonctions admissibles u^+ , u^- , w , β^+ , β^- , telles que quelque soient v^+ , v^- , v_3 , δ^+ , δ^- , l'on ait :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma} \left\{ \left[\mathbf{A}u_{,x} + \mathbf{B}\beta_{,x} \right] v_{,x} + \left[\mathbf{B}u_{,x} + \mathbf{D}\beta_{,x} \right] \delta_{,x} + \left[\mathbf{S}(\beta + w_{,x})(\delta + v_3) \right] \right\}^{\pm} d\Sigma && \text{peaux} \\
 & \dots + \int_{\Sigma} \tau(\Sigma) [\mathbf{V}] d\Sigma = \dots && \text{film} \\
 & \dots - \int_{\Sigma} \left\{ \left[\mathbf{I}_1 u_{,tt} + \mathbf{I}_2 \beta_{,tt} \right] v + \left[\mathbf{I}_2 u_{,tt} + \mathbf{I}_3 \beta_{,tt} \right] \delta + \left[\mathbf{I}_1 w_{,tt} + v_3 \right] \right\}^{\pm} d\Sigma && \text{inertie} \\
 & \dots + v_3(x_3) F(t) && \text{excitation}
 \end{aligned}$$

” [17]

où $\{ . \}^{\pm}$ signifie : $\{ . \}^+ + \{ . \}^-$;

$[\mathbf{V}]$ est le saut des déplacements longitudinaux au niveau des interfaces (sur une même normale) ; $[\mathbf{V}] = V(\Sigma^+) - V(\Sigma^-) = v^+ - v^- - \left(\frac{h^+ \delta^+ + h^- \delta^-}{2} \right)$;

F est la force de pression appliquée à l'abscisse x_3 .

On observe que dans cette formulation, les effets de membrane et de flexion sont couplés à cause de l'action du film viscoélastique.

Les calculs dynamiques par éléments finis sont effectués dans l'espace des nombres complexes pour tenir compte des phénomènes de viscoélasticité. Dans un premier temps, nous calculons les contributions élastiques des différents matériaux (peaux et film), c'est-à-dire les matrices de rigidités réelles et de masse. La prise en compte de la viscoélasticité est décrite dans le paragraphe 7.

6.1. Rigidités

La poutre amortie est discrétisée par des éléments à deux noeuds et cinq degrés de liberté par noeud : u^+ , u^- , w , β^+ , β^- . Le déplacement vertical, et les rotations des normales sont interpolés par des fonctions de forme de type Hermite :

$$\begin{aligned}
 N_1^H(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\
 N_2^H(\xi) &= (-\mathfrak{L})\xi(\xi-1)^2 \\
 N_3^H(\xi) &= 3\xi^2 + 2\xi^3 \\
 N_4^H(\xi) &= (-\mathfrak{L})\xi^2(\xi-1)
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

où \mathfrak{L} est la longueur élémentaire, tandis que les déplacements longitudinaux des fibres neutres, ainsi qu'au niveau des interfaces Σ^+ et Σ^- , sont interpolés linéairement :

$$\begin{aligned}
 N_1^L(\xi) &= 1 - \xi \\
 N_2^L(\xi) &= \xi
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

où ξ la coordonnée réduite comprise entre 0 et 1.

Les effets de cisaillement transversal dans les deux peaux épaisses sont pris en compte de manière classique en modifiant les raideurs de flexion (Voir par exemple la référence [IMB 79] ou [BAT 90]).

Dans les applications numériques, nous avons étudié des poutres symétriques avec des peaux homogènes. Ceci nous permet de faire l'hypothèse, réaliste en basses fréquences, de l'égalité des rotations des normales ($\beta^+ = \beta^- = \beta$) dans les deux peaux. Tous calculs faits, nous trouvons que la partie réelle de la matrice de rigidité élémentaire est, pour les deux peaux assemblées, relativement aux inconnues u^+ , u^- , w , β des deux noeuds :

b

$\frac{Eh}{r}$	0	0	0	$-\frac{Eh}{r}$	0	0	0
$\frac{Eh}{r}$	0	0	0	0	$\frac{Eh}{r}$	0	0
	$\frac{2Eh^3}{(1+\phi)r^3}$	$\frac{-Eh^3}{(1+\phi)r^2}$	0	0	$\frac{-2Eh^3}{(1+\phi)r^3}$	$\frac{-Eh^3}{(1+\phi)r^2}$	
		$\left(\frac{4+\phi}{1+\phi}\right)\frac{Eh^3}{6r}$	0	0	$\frac{Eh^3}{(1+\phi)r^2}$	$\left(\frac{2-\phi}{1+\phi}\right)\frac{Eh^3}{6r}$	
			$\frac{Eh}{r}$	0	0	0	
				$\frac{Eh}{r}$	0	0	
	Symétrique				$\frac{2Eh^3}{(1+\phi)r^3}$	$\frac{Eh^3}{(1+\phi)r^2}$	
							$\left(\frac{4+\phi}{1+\phi}\right)\frac{Eh^3}{6r}$ [20]

avec $\phi = \frac{6Eh^2}{5Gr^2}$

On trouve que la contribution élastique du film centré est :

$$b \frac{k r}{6} \begin{bmatrix} 2C & C \\ C & 2C \end{bmatrix} \quad [21]$$

$$\text{où } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -d \\ -1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & d & 0 & d^2 \end{bmatrix} \quad [22]$$

$d =$ distance des deux fibres neutres dans la théorie proposée (épaisseur de la peau supérieure ou inférieure $= h^+ = h^-$)

et $k = \frac{\text{module de Coulomb réel}}{\text{épaisseur du film}} \quad [23]$

On note que la matrice de rigidité correspondant au film est proportionnelle à sa raideur en cisaillement et inversement proportionnelle à son épaisseur (c'est une conséquence de [14]). Ceci est intéressant à noter car, en cas de modification de ces paramètres (à cause par exemple, de la dépendance en fréquence du module de Coulomb), on peut éviter de recalculer tous les termes de la matrice en effectuant une simple règle de trois sur la matrice assemblée au niveau global.

6.2. Masse

De même, on trouve que la matrice de masse élémentaire est pour les deux peaux :

$\frac{m}{3}$	0	0	0	$\frac{m}{6}$	0	0	0
$\frac{m}{3}$	0	0	0	0	$\frac{m}{6}$	0	0
		$\frac{156 m}{210}$	$-\frac{22 \text{ } \mathcal{I} m}{210}$	0	0	$\frac{54 m}{210}$	$\frac{13 \text{ } \mathcal{I} m}{210}$
		$\frac{4 \text{ } \mathcal{I}^2 m}{210}$		0	0	$-\frac{13 \text{ } \mathcal{I} m}{210}$	$-\frac{3 \text{ } \mathcal{I}^2 m}{210}$
				$\frac{m}{3}$	0	0	0
					$\frac{m}{3}$	0	0
Symétrique						$\frac{156 m}{210}$	$\frac{22 \text{ } \mathcal{I} m}{210}$
							$\frac{4 \text{ } \mathcal{I}^2 m}{210}$

[24]

où m est la masse élémentaire de la peau supérieure ou inférieure.

La masse du film n'est pas prise en compte ici car son épaisseur est supposée nulle, et de plus, sa densité est relativement faible. Il serait possible de le faire en effectuant par exemple une correction sur la matrice de masse pour obtenir un bilan correct de masse .

D'autre part, dans cet exposé, nous avons présenté le cas simple de poutres symétriques avec des peaux macroscopiquement homogènes de même épaisseur. Les calculs des matrices de rigidité et de masse dans le cas le plus général ne posent pas de problème particulier dans l'application de cette nouvelle théorie de poutre.

7. Calculs dynamiques

Les matrices de rigidité [20 et 21] et de masse [24] élémentaires sont ensuite assemblées séparément au niveau global, à l'aide de matrice de localisation. On note K_p et K_f les matrices (réelles) de rigidités relatives aux peaux et au film mince respectivement. Si l'on néglige les amortissements intrinsèques des peaux (à vérifier), on obtient la matrice de rigidité complexe globale de la structure amortie :

$$K^* = K_p + (1+j\eta_f) K_f \quad [25]$$

permettant ainsi de prendre en compte la viscoélasticité du film mince.

On suppose la force excitatrice harmonique.

$$F = F_0 e^{j\omega t} \quad [26]$$

En dynamique et en régime harmonique établi, nous sommes amenés à résoudre le système suivant (en posant $X = X_0 e^{j\omega t}$ avec $X_0 \in \mathbb{C}$) :

$$[K^* - \omega^2 M] X_0 = F_0 \quad [27]$$

à chaque pas de fréquence excitatrice $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

8. Validation

Afin de valider la méthode proposée, des tests numériques ainsi que des essais en dynamique ont été effectués [MAC 91]. Dans cet article, nous présentons des résultats d'essais et de calculs dynamiques sur une poutre composite amortie symétrique. Celle-ci fait 60 cm de long pour 3 cm de large et comporte un film viscoélastique centré de 1 mm pour une épaisseur totale de poutre de 2 cm. Les peaux supérieure et inférieure ont été fabriquées en matériau composite verre-résine Brochier (tissu équilibré en verre E, résine époxyde). Le module d'Young et la masse volumique ont été mesurés au préalable et valent respectivement :

$$E^+ = E^- = E = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad \text{et} \quad \rho^+ = \rho^- = \rho = 1890 \text{ kg/m}^3 \quad [28]$$

En ce qui concerne le matériau viscoélastique, son module complexe $G^*(\omega, T) = G'(\omega, T) [1 + j \eta_f(\omega, T)]$ a été mesuré à l'aide d'un viscoélasticimètre Métravib. Les courbes donnant G' ("module de conservation") et η_f ("facteur de perte"), à la température d'essais de 19°C, sont reproduites en fonction de la fréquence, dans la figure 3.

D'autre part, la poutre considérée est suspendue par des appuis élastiques souples reproduisant des conditions aux limites de type "libre-libre". Elle est excitée à l'aide d'un marteau de choc en un certain point (voir figure 4) ; l'accélération, mesurée en bout de poutre, est traitée par un analyseur de Fourier donnant l'inertance (module de l'accélération sur la force excitatrice) en dB dans le domaine fréquentiel, en fonction de la fréquence d'excitation. La gamme d'analyse choisie pour cet essai est de [0, 2000 Hz].

Les résultats de l'essai au marteau de choc et de calculs par éléments finis [MAC 91] (avec 10 éléments de poutre) sont donnés en figure 5. La confrontation de ces résultats montre que la théorie proposée permet de prédire correctement (au moins en basses fréquences) le comportement dynamique d'une telle poutre amortie par un film viscoélastique mince. De plus, la figure 6 compare l'amortissement calculé par éléments finis (méthode [MAC 91] avec la méthode des énergies modales [UNG 62] en utilisant la base des modes propres réels), avec la méthode analytique de Ross-Ungar-Kerwin [RKU 59]. Sur cet exemple, le résultat par la méthode proposée est le plus proche du résultat expérimental (valeur obtenue par lissage de la courbe de réponse expérimentale).

9. Conclusions

Un nouvel élément fini simple de poutre amortie a été présenté. Il tient compte de la présence d'un film viscoélastique mince inséré dans la poutre. Le phénomène de cisaillement transversal est pris en compte dans les peaux ainsi que dans le film viscoélastique mince. En dynamique, les inerties de translation et de rotation sont également prises en compte dans la formulation.

La comparaison avec les résultats expérimentaux montre que la méthode proposée permet de prédire avec une bonne précision, la réponse dynamique d'une poutre amortie dans des conditions aux limites de type "libre-libre" et en basses fréquences.

De plus, cet élément fini est très simple à développer et à mettre en oeuvre puisque les inconnues du problème (au nombre de cinq par noeud) sont couramment utilisées dans l'industrie : ce sont les déplacements au niveau des fibres neutres et les rotations des normales dans chacune des peaux épaisses. Son utilisation facilite la modélisation de telles structures ; en cas de modification de l'épaisseur du film, il n'est pas nécessaire de remailler toute la structure comme dans la méthode exposée dans la référence [JOH 82], où les auteurs modélisent le film mince par des éléments solides à huit noeuds, et les peaux par des éléments de plaque excentrée, ce qui peut entraîner un travail de modélisation important.

Il est intéressant de noter également que cette formulation a été généralisée aux cas des structures plaques et coques à double courbure [MAC 91].

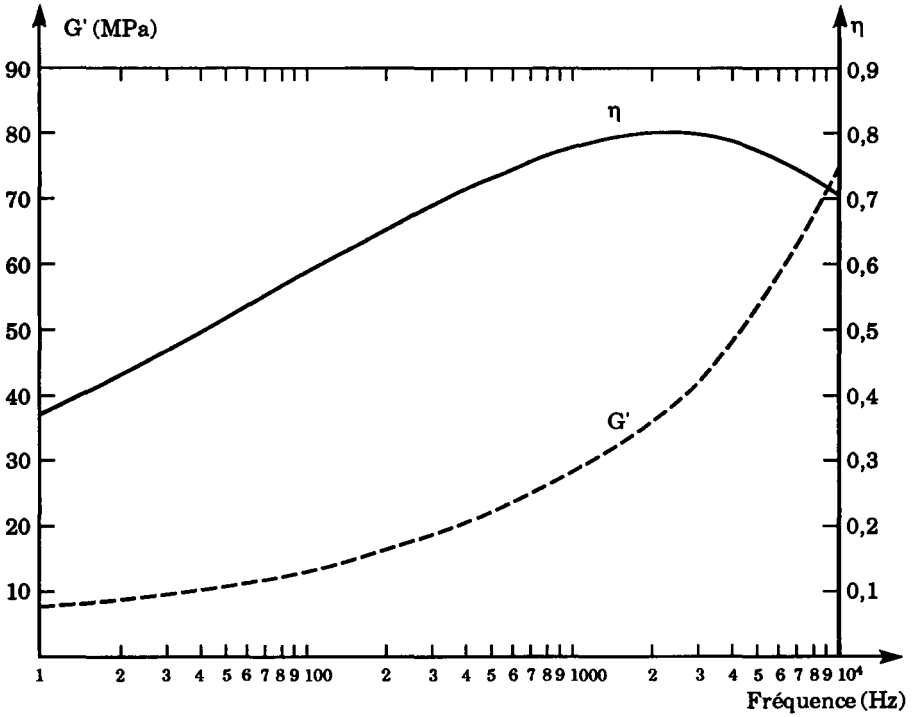


Figure 3. Courbes maîtresses du matériau viscoélastique Vibrachoc VIB 12 à la température ambiante de 19°C. Module de Coulomb réel et facteur de perte

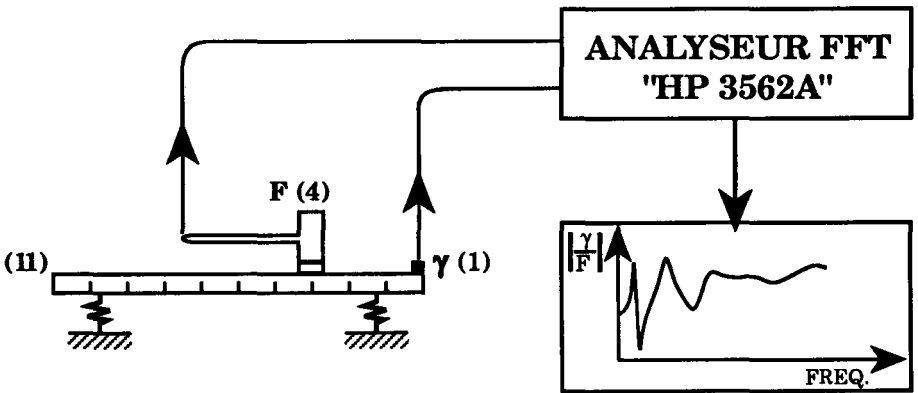


Figure 4. Schématisation du montage expérimental

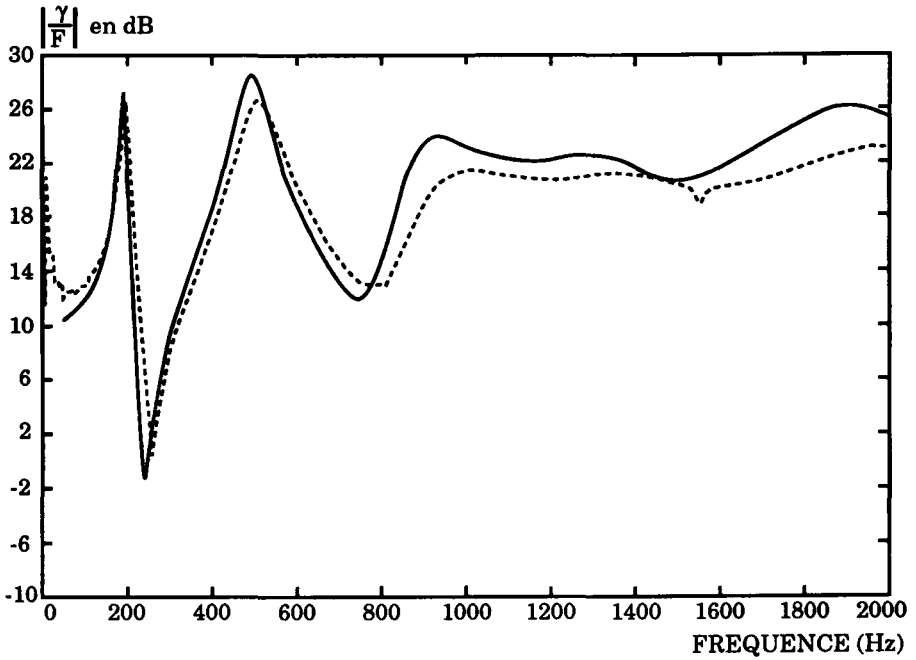


Figure 5. Réponse en fréquence d'une poutre amortie par un film mince : _____, Calculs E.F. [MAC 91] ; - - - - -, Expérience [MAC 91] .

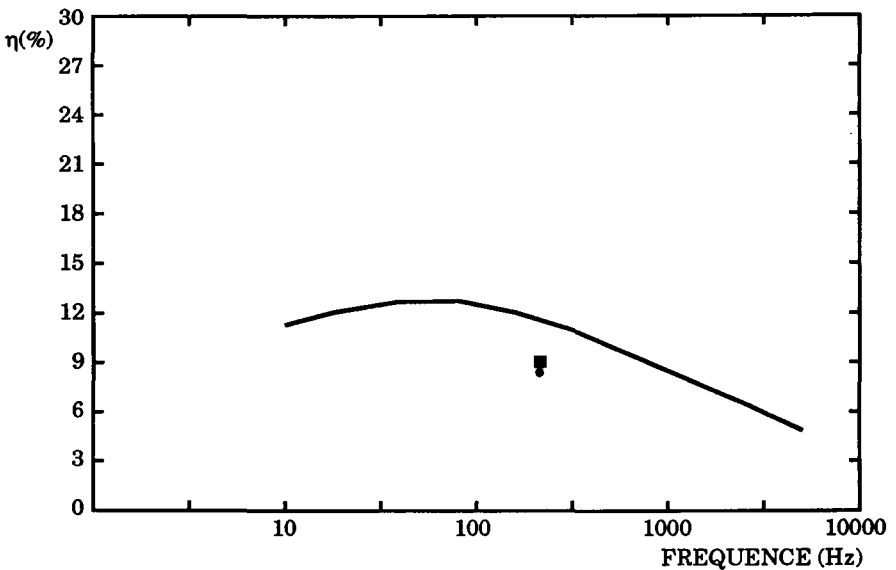


Figure 6. Evaluation de l'amortissement du premier mode de flexion. Comparaison de différentes méthodes : _____, [RKU 59] ; ●, E.F. [MAC 91] ; ■, expérience [MAC 91] .

10. Bibliographie

[BAT 90] BATOZ, J.L. et DHATT, G., 1990, "Modélisation de Structures par Eléments Finis - Volume 2 - Poutres et Plaques". Chapitre 3. Editions Hermès.

[DUV 90] DUVAUT, G., 1990, "Mécanique des Milieux Continus", Editions Masson .

[FER 80] FERRY ,J.D., 1980 "Viscoelastic Properties of Polymers", Wiley, New-York, Third edition.

[IMB 79] IMBERT, J.F. ,1979, "Analyse de Structures par Eléments Finis", Chapitre III. ENSAE / Cepadues Editions.

[JOH 82] JOHNSON ,C.D. et KIENHOLZ ,D.A., 1982, "Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers" AIAA Journal, Vol.20 (9).

[MAC 91] MACE, M., 1991, "Modélisation de Structures Amorties par Film Viscoélastique", Thèse de Doctorat, présentée à l'Université Paris 6, U.R.A. 868 du C.N.R.S., 4 place Jussieu Paris, le 17 décembre 1991.

[MAR 71] MARTINAT, J., 1971 , "Amortissement des structures par revêtement viscoélastique avec plaque de contrainte" GAMI/ISMCM. Journées d'études du 31 mars 1971.

[RKU 59] ROSS ,D. ; UNGAR ,E.E. et KERWIN ,E.M., 1959 , "Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of a Viscoelastic Laminae" Section III de Structural Damping par J.E. Ruzicka ASME, New-York.

[TOR 80] P.J. TORVIK ,1980 "The analysis and design of constrained layer damping treatments" dans Damping Applications for Vibrational Control, édité par P.J. TORVIK (The American Society of Mechanical Engineers, New-York, 1980) pp.85-112.

[TOR 87] TORVIK, P.J. et BAGLEY, D.L., 1987, "Fractional Derivatives in the Description of the Damping Materials and Phenomena". 11th ASME Bienal Conference on Mechanical Vibration and Noise, Boston, pp 125-135.

[UNG 62] UNGAR, E.E. and KERWIN, 1962 E.M. "Loss factors of viscoélastic systems in terms of energy concepts" Journal of the acoustical society of america, vol 34, July 1962, pp. 954 - 957.

Annexes. Notations**Lettres latines :**

$A^\pm, D^\pm,$	Raideurs de membrane, flexion-torsion,
B^\pm, S^\pm	couplage, et cisaillement transverse des peaux
b	Largeur de la poutre amortie
E^\pm	Modules d'Young longitudinaux des peaux
f	Vecteur des forces de volume
F^\pm	Force exercée sur la poutre
F_0	Module de force harmonique
G^\pm	Modules de Coulomb des peaux
$G^*(\omega, T)$	Module de Coulomb complexe du film viscoélastique
$G'(\omega, T)$	Partie réelle de $G^*(\omega, T)$
h^\pm	Epaisseurs des peaux
$I_1^\pm, I_3^\pm, I_2^\pm$	Inerties de translation, rotation et couplage des peaux
k, k^*	Paramètres de raideur en CT du film mince
K_p, K_f	Matrices de rigidité assemblées : peaux et film
l	Longueur d'un élément de poutre amortie
$N^\pm, M^\pm,$	Efforts résultants de membrane, flexion-torsion, cisaillement transverse
Q^\pm	
T	Température
$u^+(x, t), u^-(x, t)$	Déplacements longitudinaux aux fibres neutres
$w(x, t)$	Déplacement vertical

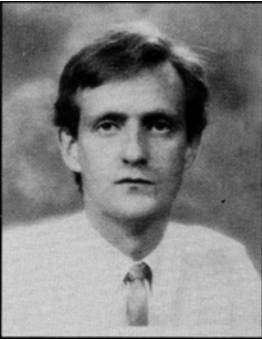
x	Coordonnée cartésienne suivant l'axe de la poutre
\mathbf{x}	Vecteur unitaire axial
z^\pm	Coordonnée normale mesurée à partir du plan moyen respectif des peaux
$z^\pm(i)$	Coordonnées d'interface entre couches à l'intérieur des peaux, mesurées à partir des plans moyens

Lettres grecques :

$\beta^\pm(x, t)$	Rotations des normales dans les peaux épaisses
γ	Angle de cisaillement transverse ($2 \varepsilon_{xz} = U_{,z} + w_{,x}$)
Γ^\pm	Surfaces supérieure et inférieure de la poutre
ε	Déformation longitudinale
μ	Paramètre de la loi de cisaillement du film viscoélastique
$\eta_f(\omega, T)$	Amortissement du film
η_r^\pm	Amortissement des peaux
ρ^\pm	Masses volumiques des peaux
σ	Contrainte normale longitudinale
Σ	Surface de référence du film viscoélastique mince
Σ^\pm	Interfaces entre Σ et Ω^\pm
τ	Contrainte de cisaillement transverse
$\tau(\Sigma)$	Contrainte de cisaillement transverse dans le film viscoélastique
ω	Pulsation ($= 2 \pi f$)
Ω	Domaine occupé par la poutre composite amortie
Ω^\pm	Domaines occupés par les deux peaux

Remerciements

Cette étude a été effectuée à la Direction des Constructions Navales de Cherbourg sous la direction de Monsieur Georges Duvaut (ONERA Châtillon et Paris 6). Les essais ont été effectués par monsieur Jean-Claude Poulain (DCN/CETEC/TAM).



Michel Macé est ingénieur ENSMA et docteur de l'université Paris 6 en mécanique des solides et des structures. Il a déjà publié dans le domaine de la dynamique des structures, des matériaux composites et des éléments finis.