
Calcul simplifié de portiques endommageables

Julio Flórez-López

*Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes
Mérida 5101, Venezuela*

RÉSUMÉ. On propose un élément fini pour l'analyse des portiques élastoplastiques endommageables. Cet élément est basé sur le "modèle de plasticité concentrée" (lumped plasticity model) où l'on suppose que tous les effets inélastiques sont concentrés dans des rotules inélastiques. On introduit alors des paramètres d'endommagement des rotules et la notion de "rotule endommagée". Dans ce cadre général, on peut modéliser les effets inélastiques indiqués, le comportement unilatéral et des grands déplacements. Des lois d'évolution particulières pour des portiques de béton armé sont présentées. On décrit l'adaptation du modèle aux codes de calcul par élément fini standard et on illustre la méthode avec quelques exemples numériques.

ABSTRACT. A finite element formulation for inelastic frames is proposed. This formulation takes into account elasto-plastic effects and damage. The element is based upon the lumped plasticity model where inelastic effects are assumed to be lumped at some inelastic hinges. Therefore hinge's damage parameters and the notion of "damaged hinge" are introduced. In this framework unilateral behavior, large displacements and inelastic effects are taken into account. Internal variable evolution laws are identified for the particular case of reinforced concrete frames. Numerical implementation in standard finite element codes is described. Some numerical examples are shown.

MOTS-CLÉS : mécanique de l'endommagement, modèles de plasticité concentrée, éléments finis, calcul des portiques, béton armé.

KEY WORDS : damage mechanics, lumped plasticity models, finite elements, frame analysis, reinforced concrete.

structures du génie civil. Le temps de calcul et de préparation des fichiers de données serait énorme alors que des résultats satisfaisants à un coût très raisonnable sont obtenus en utilisant une théorie de milieux curvilignes.

On peut trouver plusieurs modèles de poutres endommageables dans la littérature ([BRE88], [ELA91], [LAB90]) et l'emploi de ces modèles dans certains cas peut s'avérer souhaitable, voire nécessaire. Cependant il n'y a aucune raison de penser que les poutres endommageables, qui sont des modèles continus, ne seront pas affectées par les mêmes problèmes numériques que les modèles standards.

Il y a cependant quelques structures où l'analyste peut déterminer a priori les lieux où l'endommagement sera localisé. C'est le cas des portiques où la discrétisation de la structure est presque une donnée du problème. Il est en effet rare que des remaillages de plus en plus raffinés soient nécessaires lorsque l'on fait des calculs de portiques élastoplastiques en utilisant la notion de rotule plastique. Usuellement une simple inspection de la structure suffit pour la discrétiser de telle façon que des rotules plastiques soient placées aux bons endroits. Un seul calcul avec une discrétisation adéquate est alors suffisant.

Des éléments finis avec des rotules plastiques ont été développés à partir des modèles dits "de plasticité concentrée" (*lumped plasticity models*) et utilisés avec succès ([MAI73], [COH79], [RIV89],). Ces éléments sont constitués d'un élément type poutre élastique plus des rotules qui se comportent comme des ressorts à flexion rigide-plastique de longueur nulle. Une caractéristique particulière des modèles de plasticité concentrée est le fait que le comportement des rotules est déterminé à partir de résultats expérimentaux comme pour les lois d'évolution des modèles phénoménologiques de la mécanique des solides. Ce genre de modèles seront désignés dans cet article "théories des portiques" afin de les différencier des théories de poutres citées précédemment.

Le but de cet article est de proposer un élément qui généralise le modèle de plasticité concentrée en incluant des effets d'endommagement. Il s'agit donc d'une tentative de développement d'une mécanique de l'endommagement dans le cadre d'une "théorie des portiques". Cet article présente un bilan des travaux réalisés dans ce sens à l'Université des Andes au Venezuela ([FLO], [FLO91], [CIP92a], [CIP92b], [LOP92]).

Cet élément pourra être utilisé dans les applications industrielles pour lesquelles la précision d'un modèle type "portique" est suffisante et le coût est un facteur déterminant, c'est-à-dire les applications où les modèles de plasticité concentrée sont déjà utilisés. Avec cet élément, la réponse de la structure peut dépendre de la discrétisation choisie puisqu'elle correspond à une localisation de l'endommagement dans les sections où l'analyste a placé des rotules inélastiques. Cependant, on espère que dans ce cas l'ingénieur pourra choisir parmi les résultats celui qui correspond le mieux à la réalité physique du problème.

Le plan de cet article est le suivant: dans les sections 2 et 3, on introduit les notions de ce qu'on a appelé "théorie des portiques". On a choisi de développer l'élément dans le cadre de sollicitations quasi statiques dans un souci de simplicité mais l'extension aux calculs dynamiques ne présente pas de difficultés particulières.

Dans la section 4, on présente les "modèles de dissipation concentrée" (puisqu'on prend en compte et la plasticité et l'endommagement); on propose un modèle particulier de "rotule endommagée" et on décrit les essais utiles à son identification. On a choisi d'illustrer le modèle dans le cas particulier d'un portique plan, l'identification du modèle dans un cas plus général pouvant présenter des difficultés.

Dans la section 5, on discute les aspects numériques et l'adaptation de l'élément aux codes de calcul de structures standards. Cette adaptation est essentiellement basée sur un algorithme de projection similaire à ceux qui sont utilisés pour les modèles de plasticité multicritères [SIM88].

Enfin dans la section 6, on montre deux exemples numériques.

2. Cinématique des portiques plans

2.1 Notations

On considère un portique plan comme celui qui est montré en figure 1. Ce portique est composé de, m , barres connectées par, n , noeuds. On introduit la notation suivante:

a) Les déplacements généralisés du noeud, k , sont indiqués par: $\{U\}_k = (U_1, U_2, U_3)$ où U_1 et U_2 dénotent respectivement les déplacements horizontal et vertical du noeud, et U_3 représente sa rotation (voir figure 1). Ces déplacements sont définis dans le repère global de la structure.

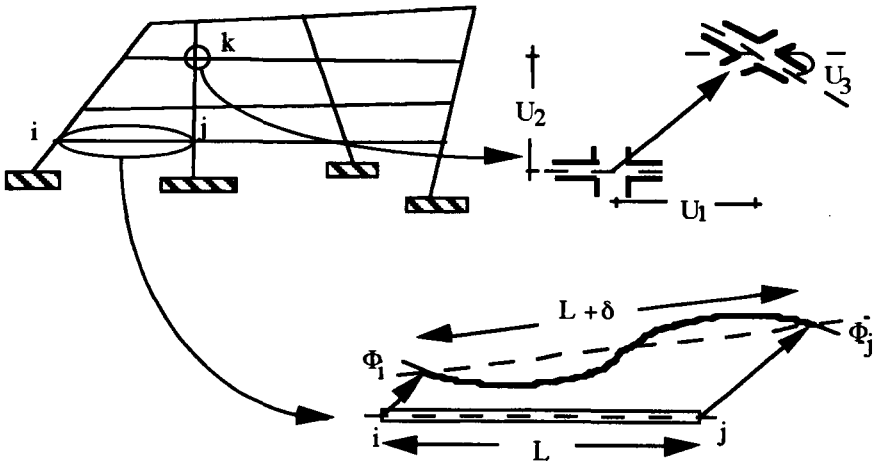


Figure 1. Déplacements du noeud k et déformations de la barre $i-j$.

b) Les déplacements de la barre, b , entre les noeuds, i , et, j , sont indiqués par $\{q\} = (\{U\}_i, \{U\}_j)$. Lorsque l'on aura besoin de considérer les déplacements de plusieurs barres de la structure, on utilisera pour chaque barre une matrice colonne de $3n$ lignes (les $3n$ degrés de liberté de la structure) qui sera appelée $\{q\}_b$. Cette matrice est construite en plaçant des zéros dans les positions qui correspondent aux degrés de liberté des noeuds qui ne sont pas connectés à la barre, b , c'est-à-dire:

$$\{q\}_b = (0,0,0,\dots, \{U\}_i, \dots, \{U\}_j, \dots, 0,0,0)$$

noeud 1noeud inoeud j.....noeud n

c) Avec les déplacements des, n, noeuds de la structure on construit la matrice $\{X\}$ des déplacements de la structure:

$$\{X\} = (\{U\}_1, \{U\}_2, \dots, \{U\}_n)$$

d) La mesure de la déformation de la barre utilisée en théorie de portiques est donnée par la matrice de déformations généralisées: $\{\Phi\} = (\Phi_i, \Phi_j, \delta)$ où Φ_i et Φ_j indiquent les rotations par rapport à la corde, i-j, et δ son allongement (voir figure 1).

2.2 Equations de compatibilité.

On considère une modification infiniment petite de la géométrie de la barre autour d'une configuration, A, quelconque. On peut alors montrer que la relation entre déformations et déplacements est donnée par:

$$\{d\Phi\} = [B^A] \{dq\} \quad [1]$$

La matrice de transformation $[B^A]$ dépend dans le cas général, de la configuration, A, en question (voir l'annexe 1). L'intégration de [1] depuis la configuration initiale, 0, à la configuration déformée considérée donne la relation entre déplacements et déformations :

$$\{\Phi\} = \int_0^A [B] \{dq\} \quad [2a]$$

Cette relation peut être exprimée analytiquement (voir annexe 2)

Dans le cas particulier des petits déplacements, les configurations initiale et actuelle peuvent être confondues, alors:

$$[B^A] \approx [B^0]$$

où $[B^0]$ indique la matrice de transformation dans la configuration initiale connue. Dans ce cas l'intégration de [1] donne:

$$\{\Phi\} = [B^0] \{q\} \quad [2b]$$

3 Efforts dans les portiques

3.1 Notations

a) Les forces généralisées qui agissent sur la barre, b, sont désignés par $\{Q\} = (Q_1, \dots, Q_6)$ (voir la figure 2). On utilisera également la matrice $\{Q\}_b$ qui est construite de façon similaire à la matrice de déplacements $\{q\}_b$ (voir section 2.1).

4. Lois de comportement d'une barre de portique.

4.1 Modèle de dissipation concentrée.

Pour définir complètement le problème à résoudre, il faut ajouter les lois qui mettent en relation la matrice de contraintes à un instant quelconque avec l'histoire des déformations. Par exemple, dans le cas de l'élasticité linéaire, cette relation est donnée par:

$$\{M\} = [S^0] \{\Phi\}$$

où $[S^0]$ est dénommée "matrice de raideur locale" (voir annexe 3). La matrice $[F^0] = [S^0]^{-1}$ est la matrice de flexibilité locale de la barre.

Dans le cas élastique mais non-linéaire, les matrices de flexibilité et de raideur dépendent de la configuration actuelle. Les lois de comportement doivent alors être écrites de la façon suivante (voir annexe 4) :

$$\{M\} = [S^A] \{\Phi\} \quad \text{ou} \quad \{\Phi\} = [F^A] \{M\}$$

Dès qu'il y a dissipation d'énergie, le comportement devient inélastique et les équations précédentes ne sont plus valables. Dans ce cas le comportement de la barre peut être décrit en introduisant des "variables internes" et leurs "lois d'évolution" comme dans les modèles classiques de la mécanique des milieux continus.

Afin de construire de telles lois, on utilisera les modèles dits de "plasticité concentrée" ([MAI73], [COH79], [RIV89], ...) que l'on appellera ici "modèles de dissipation concentrée". Dans cette approche, chaque barre de la structure est représentée comme l'assemblage d'une poutre élastique et d'un ensemble de rotules inélastiques (voir figure 3). On accepte alors que la plasticité, l'endommagement ou n'importe quel autre mécanisme de dissipation d'énergie soit concentré uniquement dans les rotules et que la poutre ait toujours un comportement élastique (linéaire ou non). Les déformations de la barre peuvent alors être exprimées de la manière suivante:

$$\{\Phi\} = [F^A] \{M\} + \{\Phi^r\} \quad [5]$$

Le premier terme de l'expression [5] correspond aux déformations de la poutre élastique. La matrice $\{\Phi^r\} = (\Phi^r_i, \Phi^r_j, \delta^r)$ contient les déformations des rotules. Cette matrice est à son tour décomposée en matrice de déformations plastiques et matrice de déformations dues aux effets de l'endommagement:

$$\{\Phi^r\} = \{\Phi^p\} + \{\Phi^d\}$$

Il est à présent nécessaire de proposer une expression du terme $\{\Phi^d\}$. Cela fera l'objet de la section 4.2.

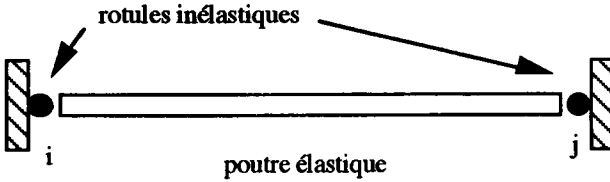


Figure 3. Modèle de dissipation concentrée d'une barre de portique plan.

4.2 Matrices de flexibilité d'une barre élastique endommageable.

On considère d'abord le cas particulier d'une barre de longueur L et section A constante, soumise à un effort axial uniquement (sans flambage). La mécanique de l'endommagement classique ([KAC58], [RAB69], [LEM88],) permet d'obtenir une relation effort-déplacement pour ce problème (en admettant que l'état d'endommagement est uniforme et qu'il n'y a pas de localisation):

$$\delta = \frac{N}{(1-D)S_{33}^0} + \delta^P$$

où D est une mesure de l'endommagement qui peut être défini comme le rapport entre le module d'élasticité endommagé et celui du matériau vierge ($D = 1 - E/E^0$) et où $S_{33}^0 = E^0 A / L$. La variable D peut donc avoir des valeurs comprises entre zéro et un. La valeur zéro indique un matériau vierge et la valeur un, un matériau complètement endommagé sans aucune raideur.

D'autre part, dans le modèle de dissipation concentrée, la barre est représentée comme l'assemblage de deux types d'élément: une poutre élastique et des rotules inélastiques. D'après l'équation [5], l'allongement de la barre doit pouvoir s'exprimer comme:

$$\delta = \frac{N}{S_{33}^0} + \delta^r$$

Par comparaison avec la relation précédente, on déduit:

$$\delta^r = \frac{D}{(1-D)S_{33}^0} N + \delta^P$$

Pour D égal à zéro, on a une liaison rigide-plastique (à flexibilité nulle). Pour D égal à un, les rotules sont "complètement déconnectées" de la poutre (flexibilité infinie).

Si la barre est sollicité en traction-compression, il faut deux paramètres d'endommagement pour représenter les effets unilatéraux du comportement ([LAD83],[MAZ86]). On a d'après la mécanique de l'endommagement classique:

$$\delta = \frac{\langle N \rangle_+}{(1-D^+)S_{33}^0} + \frac{\langle N \rangle_-}{(1-D^-)S_{33}^0} + \delta^P \quad [6]$$

où $\langle X \rangle_+$ représente la partie positive de X et $\langle X \rangle_-$ sa partie négative, c'est à dire:

$$\langle X \rangle_+ = \begin{cases} X & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \langle X \rangle_- = \begin{cases} 0 & \text{si } X > 0 \\ X & \text{sinon} \end{cases}$$

D^+ est alors une mesure de l'endommagement de traction et D^- de celui de compression. Si l'on calcule la déformation des liaisons dans ce cas, on obtient:

$$\delta^r = \frac{D^+}{(1-D^+)S_{33}^0} \langle N \rangle_+ + \frac{D^-}{(1-D^-)S_{33}^0} \langle N \rangle_- + \delta^p$$

Dès qu'il a des effets de flexion, le problème devient trop complexe pour établir des résultats analytiques valables dans le cas général à partir de la mécanique de l'endommagement classique, même avec des lois d'évolution très simples.

On postule alors l'existence de deux ensembles de paramètres d'endommagement, $\{D^+\} = (d_i^+, d_j^+, d_n^+)$ et $\{D^-\} = (d_i^-, d_j^-, d_n^-)$ tels que l'énergie de déformation complémentaire d'une barre de portique puisse s'exprimer de la façon suivante:

$$U^* = \frac{1}{2} \{ \langle M \rangle_+ \}^T [C(D^+)] \{ \langle M \rangle_+ \} + \frac{1}{2} \{ \langle M \rangle_- \}^T [C(D^-)] \{ \langle M \rangle_- \} + W^* \quad [7]$$

où les deux premiers termes de [7] correspondent à l'énergie de déformation complémentaire cumulée dans les rotules inélastiques et où W^* dénote l'énergie de la poutre élastique. Les matrices $[C(D^+)]$ et $[C(D^-)]$ sont donc les matrices de flexibilité de l'ensemble des deux rotules et ont pour expression:

$$[C(D)] = \begin{pmatrix} \frac{d_i}{(1-d_i)S_{11}^0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_j}{(1-d_j)S_{22}^0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_n}{(1-d_n)S_{33}^0} \end{pmatrix}$$

dans le cas particulier d'une barre à inertie constante, on peut préciser les matrices $[C(D)]$ en utilisant les coefficients de raideur S_{11}^0, S_{22}^0 et S_{33}^0 donnés en annexe 3.

La relation contrainte-déformation élastique de la barre est par conséquent donnée par:

$$\{ \Phi^e \} = \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial M} \right\}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \{\Phi\} - \{\Phi^P\} &= [C(D^+)]\{\langle M \rangle_+\} + [C(D^-)]\{\langle M \rangle_-\} + [F^A]\{M\} = \\ &= [F(D^+, M)]\{\langle M \rangle_+\} + [F(D^-, M)]\{\langle M \rangle_-\} \end{aligned} \quad [8]$$

$$\text{où} \quad [F(D, M)] = [C(D)] + [F^A]$$

Les matrices $[F(D^+, M)]$ et $[F(D^-, M)]$ sont donc les matrices de flexibilité de la barre élastique endommageable.

Les paramètres d'endommagement d_i et d_j représentent respectivement les mesures de "l'endommagement en flexion" des rotules, i , et, j , de la barre. Les deux paramètres d_n correspondent aux mesures de "l'endommagement axial". L'utilisation des paramètres, +, et, -, permet la représentation généralisée d'effets unilatéraux dans le comportement.

Il est évident que dans le cas particulier de la loi de comportement d'un élément d'un treillis ($M_i = M_j = 0$), on obtient les relations de la mécanique de l'endommagement classique (equations [6]) avec $d_n = D$.

On peut remarquer que lorsque les paramètres d'endommagement en flexion prennent la valeur zéro, on retrouve les rotules rigide-plastiques des modèles de plasticité concentrée. S'ils prennent la valeur un, on a des rotules sans raideur (flexibilité infinie) comme les articulations qui sont introduites dans la théorie classique de portiques élastiques. Si l'un des paramètres d'endommagement prend la valeur un, alors la rotule en question sera appelée "rotule endommagée".

Il peut être intéressant de considérer le cas particulier d'une barre de longueur L , de module d'élasticité E , de section A et d'inertie I constantes, en petit déplacements et soumis à des sollicitations qui ne changent pas de signe (ce qui permet de n'utiliser qu'une seule matrice de paramètres d'endommagement); on obtient alors la matrice de raideur suivante:

$$[S(D)] = \begin{pmatrix} \frac{(1-d_i)(4-d_j)}{4-d_i d_j} 4EI/L & \frac{4(1-d_i)(1-d_j)}{4-d_i d_j} 2EI/L & 0 \\ & (1-d_j) \frac{(4-d_i)}{4-d_i d_j} 4EI/L & 0 \\ \text{sym.} & & (1-d_n) A E / L \end{pmatrix}$$

Pour d_i , d_j et d_n égaux à zéro, on retrouve la matrice de raideur d'une barre élastique classique (voir annexe 3). Pour d_i égal à un, mais d_j et d_n égaux à zéro, on obtient la matrice de raideur d'une barre élastique avec une articulation interne à l'extrémité gauche. Si d_i et d_j sont égaux à un et d_n est égal à zéro, alors on retrouve la matrice de raideur de la barre d'un treillis élastique.

4.3 Forces associées aux paramètres d'endommagement.

L'expression [7] de l'énergie de déformation complémentaire permet aussi de définir des "forces thermodynamiques" associées aux paramètres d'endommagement (on suppose

que l'enthalpie libre de la barre est égale à l'énergie de déformation complémentaire plus des termes qui ne dépendent pas des paramètres d'endommagement):

$$\{G^+\} = - \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial D^+} \right\}; \quad \{G^-\} = - \left\{ \frac{\partial U^*}{\partial D^-} \right\} \quad [9]$$

Ces forces sont donc équivalentes aux taux de restitution d'énergie qui sont définis, de manière classique, en mécanique de la rupture et de l'endommagement .

Dans le cas où il n'y a pas d'autres variables internes, la puissance dissipée, ξ , dans la barre (par les rotules) est donnée par:

$$\xi = \{\dot{D}^+\}^T \{G^+\} + \{\dot{D}^-\}^T \{G^-\} + \{\dot{\Phi}^P\}^T \{M\} \geq 0$$

qui doit être, bien entendu, positive. Si l'on suppose que les mécanismes de dissipation de chaque rotule sont indépendants les uns des autres (possibilité de déformations plastiques sans endommagement et vice versa), chaque terme de la dissipation doit être positif, c'est-à-dire:

$$\dot{\Phi}^P_i M_i + \dot{\delta}^P N \geq 0 \quad ; \quad \dot{\Phi}^P_j M_j + \dot{\delta}^P N \geq 0 \quad [10]$$

$$\dot{d}^+_i G^+_i + \dot{d}^+_n G^+_n \geq 0 \quad ; \quad \dot{d}^-_i G^-_i + \dot{d}^-_n G^-_n \geq 0$$

Ces inégalités doivent être prises en compte lors de la résolution numérique pour identifier les éventuels retours élastiques.

4.4 Lois d'évolution des variables internes.

On introduit maintenant des lois d'évolution indépendantes du temps telles que l'on retrouve les modèles élasto-plastiques classiques pour portiques lorsque $\{\dot{D}^+\} = \{\dot{D}^-\} = 0$. De façon générale, ces lois peuvent s'écrire comme suit:

a) Lois d'évolution des déformations plastiques:

$$\dot{\Phi}^P_i = \lambda^P_i \frac{\partial f_i}{\partial M_i} \quad \dot{\Phi}^P_j = \lambda^P_j \frac{\partial f_j}{\partial M_j} \quad \dot{\delta}^P = \lambda^P_i \frac{\partial f_i}{\partial N} + \lambda^P_j \frac{\partial f_j}{\partial N} \quad [11]$$

où $f_i \leq 0$ et $f_j \leq 0$ sont les fonctions de plasticité qui caractérisent les surfaces seuil des rotules, i , et, j . Ces fonctions dépendent des contraintes $\{M\}$. Elles peuvent dépendre éventuellement des variables internes et des multiplicateurs plastiques λ^P_i et λ^P_j . Elles doivent correspondre à des modèles de plasticité standard lorsque les paramètres d'endommagement n'évoluent pas. Les multiplicateurs plastiques sont calculés de façon usuelle, c'est-à-dire:

$$\dot{\lambda}^p \begin{cases} = 0 & \text{si } f < 0 \\ > 0 & \text{si } f = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{f} < 0 \\ \dot{f} = 0 \end{cases} \quad \text{et}$$

Lorsque la vitesse du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}^p$ est strictement positive, on dira que la déformation plastique est "active" dans la rotule en question; si elle est nulle, la déformation plastique sera dite "inactive"

b) Lois d'évolution des paramètres d'endommagement. On peut choisir des lois similaires à celles de la déformation plastique, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \dot{d}^+_i &= \dot{\lambda}^+_i \frac{\partial g^+_i}{\partial G^+_i} & \dot{d}^+_j &= \dot{\lambda}^+_j \frac{\partial g^+_i}{\partial G^+_j} & \dot{d}^+_n &= \dot{\lambda}^+_i \frac{\partial g^+_i}{\partial G^+_n} + \dot{\lambda}^+_j \frac{\partial g^+_i}{\partial G^+_n} \\ \dot{d}^-_i &= \dot{\lambda}^-_i \frac{\partial g^-_i}{\partial G^-_i} & \dot{d}^-_j &= \dot{\lambda}^-_j \frac{\partial g^-_i}{\partial G^-_j} & \dot{d}^-_n &= \dot{\lambda}^-_i \frac{\partial g^-_i}{\partial G^-_n} + \dot{\lambda}^-_j \frac{\partial g^-_i}{\partial G^-_n} \end{aligned} \quad [12]$$

où $g^+_i \leq 0$; $g^-_i \leq 0$; $g^+_j \leq 0$ et $g^-_j \leq 0$ sont les fonctions d'endommagement qui peuvent dépendre des forces thermodynamiques $\{G\}$ associées à l'endommagement, des variables internes et des multiplicateurs d'endommagement. Elles pourraient coïncider avec les fonctions de plasticité. Les multiplicateurs d'endommagement $\dot{\lambda}^+_i$; $\dot{\lambda}^+_j$; $\dot{\lambda}^-_i$ et $\dot{\lambda}^-_j$ sont calculés par:

$$\dot{\lambda} \begin{cases} = 0 & \text{si } g < 0 \\ > 0 & \text{si } g = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{g} < 0 \\ \dot{g} = 0 \end{cases}$$

De la même façon que dans le cas de la déformation plastique, on dira que l'endommagement est "actif" dans une rotule si la vitesse du multiplicateur d'endommagement en question n'est pas nulle.

Il peut s'avérer nécessaire d'introduire d'autres variables internes et leurs lois d'évolution afin de décrire des comportements cycliques complexes. Ces variables ne sont pas explicitement incluses ici dans le modèle pour ne pas alourdir encore plus la présentation.

4.5 Identification des lois d'évolution.

Dans le modèle précédent, on a postulé la forme de l'énergie de déformation complémentaire; il est donc nécessaire de pouvoir identifier les lois d'évolution à partir de résultats expérimentaux, comme dans les modèles de plasticité concentrée. Cette identification peut se faire avec des essais tout à fait classiques en génie civil sur des liaisons poutre-poteau ou poutres simplement appuyées ([COL84], [ROU87], [KUN90],

[ROD90], [PEN91], [GOT91],). Aux figures 4 et 5, on montre un schéma de ce type de test et le modèle de dissipation concentrée qui lui est associé.

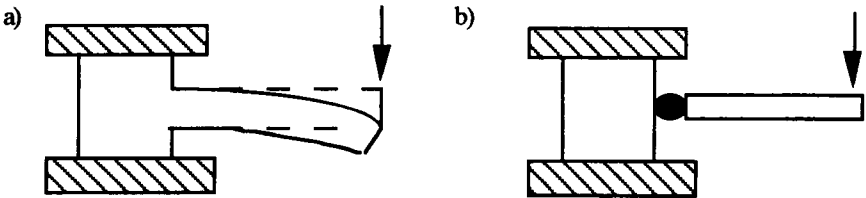


Figure 4. Essai sur une liaison poutre-poteau pour l'identification des lois d'évolution. a) Essai b) Modèle de dissipation concentrée.

Par exemple, dans le cas d'un essai avec une poutre simplement appuyée, la valeur du paramètre d'endommagement de la rotule inélastique peut être déterminée en effectuant des décharges successives pour mesurer le module de raideur Z (voir figure 5). En effet, si l'on tient compte du fait que:

a) on a: $M_i = N = 0; \quad M_j = \frac{P L}{2}$

b) les petits déplacements restent petits: $\Phi_j = \frac{t}{L}; \quad \delta = 0$

c) on peut supposer: $d_n = d_i = \delta^P = 0,$

alors on obtient à partir de [8] la relation suivante:

$$P = \frac{4 - 4d}{4 - d} \left(\frac{6EI}{L^3} \right) (t - t^P) \quad \text{où} \quad d = d_j; \quad t^P = L \Phi_j^P$$

Le module de raideur Z est donc égal à:

$$Z = \frac{4 - 4d}{4 - d} Z^0 \quad \text{où} \quad Z^0 = \left(\frac{6EI}{L^3} \right)$$

Par conséquent :

$$d = \frac{4 (Z^0 - Z)}{4 Z^0 - Z}$$

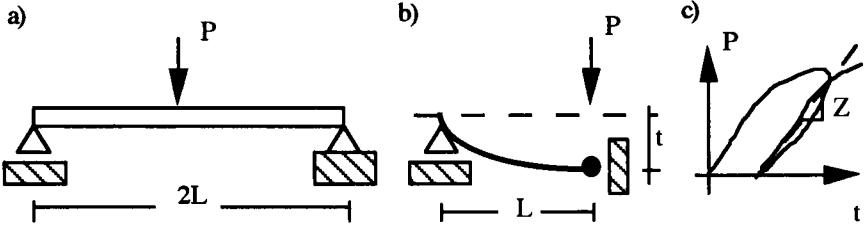


Figure 5. Essai d'une poutre simplement appuyée pour l'identification des lois d'évolution. a) Essai b) Modèle de dissipation concentrée c) Définition du module de raideur.

Des fonctions de plasticité et d'endommagement particulièrement simples pour les barres en béton armé ont été identifiées à l'aide de ce type d'essai pour le cas particulier où les sollicitations ne changent pas de signe et les effets de la déformation plastique axiale et de l'endommagement axial sont négligeables ([CIP92a], [CIP92b]). Les expressions phénoménologiques obtenues sont les suivantes:

$$f = \left| M - \left(\frac{1-d}{4d} \right) c \Phi P \right| + \left(\frac{1-d}{4d} \right) 4 M_y ; \quad g = G - G_{cr} - q \frac{\ln(1-d)}{1-d} \quad [13]$$

où c , M_y , G_{cr} , et q sont des paramètres de la barre. On peut remarquer que pour d constant, on obtient le modèle élastoplastique bilinéaire classique. Si en plus la constante c est égale à zéro, on a un portique élastoplastique parfait.

Les paramètres introduits en [13] n'ont pas de signification mécanique bien définie, il est donc préférable de les calculer à partir du système d'équations suivant:

Pour $M = M_{cr}$	on a	$d = 0$
Pour $M = M_p$	on a	$\Phi P = 0$
Pour $M = M_u$	on a	$\frac{dM}{d\Phi P} = 0$
Pour $M = M_u$	on a	$\Phi P = \Phi P_u$

où M_{cr} est le moment de première fissuration, M_p le moment plastique (et qui ne correspond pas au M_y introduit en [13]), M_u le moment ultime et ΦP_u la déformation plastique ultime, c'est à dire la déformation plastique qui correspond au moment ultime. Ces coefficients peuvent être calculés par des moyens plus ou moins sophistiqués (voir [PAR75], [RIV88],.....) qui ne seront pas discutés dans cet article.

Les courbes moment-déformation plastique, moment thermodynamique associé-endommagement et force-flèche de l'un des tests ($L = 0.75$ m., $A = 20 \times 20$ cm², $f_c = 300$ N/mm², armatures = $5 \phi 9,525$ mm (3/8'), $f_y = 420$ N/mm²) qui ont servi à l'identification des fonctions [13] sont indiqués aux figures 6 (les simulations numériques ont été réalisées avec $q = -1353$ KN-m, $c = 2673,36$ KN-m, $M_y = 18,66$ KN-m, $G_{cr} = 0$).

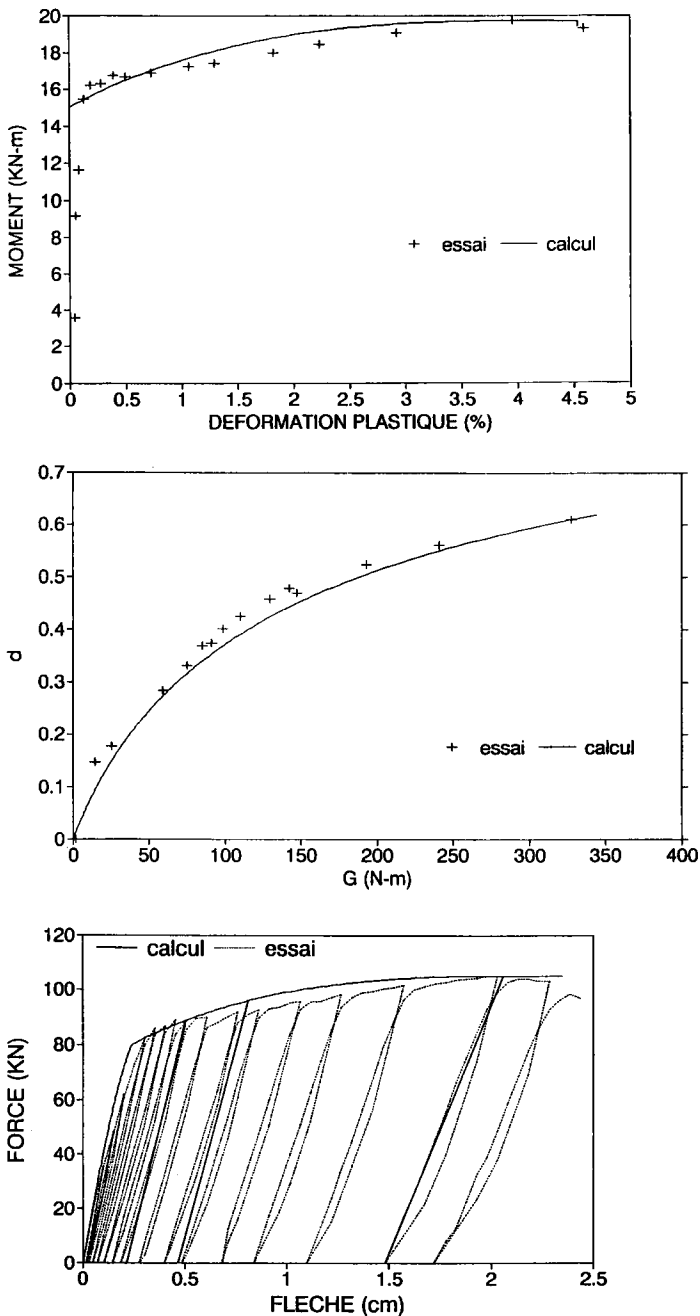


Figure 6. Poutre simplement appuyée. a) Déformation plastique de la rotule - moment fléchissant au milieu de la poutre. b) Moment thermodynamique associé - endommagement en flexion de la rotule. c) Force - flèche.

5. Elément fini pour le calcul de portiques endommageables.

5.1. Formulation des problèmes global et local.

Le problème à résoudre est le suivant:

On connaît la géométrie de la structure et les lieux où l'endommagement peut être localisé, les propriétés de chaque barre, l'histoire des forces extérieures sur les noeuds libres et l'histoire des déplacements des appuis durant l'intervalle [0,T].

On doit calculer l'histoire des déplacements de la structure {X} ainsi que l'histoire des déformations {Φ}, des contraintes {M}, des forces internes {Q}, des déformations plastiques {Φ^P} et des endommagements {D⁺} et {D⁻} pour chaque barre de la structure, devant vérifier les équations [2],[3],[4],[8],[9],[11], et [12].

On discrétise l'intervalle [0,T] en (0,t₁, ...,T); on calcule alors les inconnues du problème uniquement aux instants choisis par une méthode pas à pas classique. L'intégration des lois d'évolution est réalisée en utilisant une méthode numérique appropriée que sera précisée dans les sections 5.2, 5.3 et 5.4.

Les équations [2],[3],[8],[9] et les lois d'évolution discrétisées explicitées plus loin, en 5.2 constituent un système d'équations qui met en relation les déplacements généralisés {q} et les forces généralisées {Q} à la fin chaque pas. On écrit formellement cette relation, pour chaque barre, de la façon suivante:

$$\{Q\}_b = \{Q(q)\}_b \tag{14}$$

L'équation d'équilibre quasi statique [4] à la fin d'un pas quelconque devient alors:

$$\{L(X)\} = \{P\} - \sum_{b=1}^m \{Q(X)\}_b = 0 \tag{15}$$

La résolution de l'équation [15] est appelée "problème global" et peut être effectuée par la méthode de Newton, auquel cas il faut résoudre à chaque itération le système d'équations linéaires suivant:

$$\{L(X_k)\} - \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_{b=1}^m \{Q\}_b \right) \right]_{X=X_k} \{X_{k+1} - X_k\} = 0$$

Pour calculer les déplacements {X} à l'itération k+1, il faut donc déterminer les forces de chaque barre {Q(q)} et le jacobien $\left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right]$ qui correspond aux déplacements {q} pour l'itération k. Le calcul de ces matrices est désigné "problème local" et il sera décrit dans les sections 5.2 à 5.5.

5.2 Discrétisation des lois d'évolution.

La discrétisation des lois d'évolution sera réalisé en utilisant la méthode suivante, dite "du facteur θ ". Soit $\{A\} = (A_i, A_j, A_n)$ la valeur à la fin du pas d'une variable interne quelconque. Autrement dit, $\{A\}$ peut représenter la valeur de la déformation plastique $\{\Phi^P\}$ ou de l'une des matrices d'endommagement $\{D^+\}$ ou $\{D^-\}$. Soit $\{Y\}$ la valeur de la force thermodynamique associée, c'est-à-dire $\{M\}$ ou $\{G^+\}$ ou $\{G^-\}$. L'évolution de la variable interne $\{A\}$ est déterminée par les fonctions seuil h_i de la rotule i et h_j de la rotule j de la manière décrite dans la section 4.4. Les fonctions h représentent donc des fonctions de plasticité ou d'endommagement. Les multiplicateurs inélastiques associés aux fonctions seuil h_i et h_j sont: λ_i pour la rotule i et λ_j pour la rotule j . L'incrément de la variable interne durant un pas de calcul sera désigné $\{\Delta A\}$ et les valeurs de la variable interne dans la configuration au début du pas est $\{A_0\}$. Alors l'incrément de la variable interne peut être approché comme suit:

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \Delta \lambda_i \left. \frac{\partial h_i}{\partial Y_i} \right|_{\{A; Y\}=\{A_\theta; Y_\theta\}} \\ \Delta A_j &= \Delta \lambda_j \left. \frac{\partial h_j}{\partial Y_j} \right|_{\{A; Y\}=\{A_\theta; Y_\theta\}} \\ \Delta A_n &= \Delta \lambda_i \left. \frac{\partial h_i}{\partial Y_n} \right|_{\{A; Y\}=\{A_\theta; Y_\theta\}} + \Delta \lambda_j \left. \frac{\partial h_j}{\partial Y_n} \right|_{\{A; Y\}=\{A_\theta; Y_\theta\}} \end{aligned} \quad [16]$$

$$\text{où } \{Y_\theta\} = \theta \{Y\} + (1 - \theta)\{Y_0\}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Ce schéma d'intégration implicite est similaire à celui qui est utilisé dans les problèmes de milieux continus avec endommagement. Une étude sur la stabilité de cet algorithme peut être consulté dans [BEN89]. Dans cet étude, on montre que la limite supérieure du pas assurant la convergence des itérations est d'autant plus petite que le paramètre θ est grand. D'autre part l'algorithme est inconditionnellement stable quelque soit le signe de la partie réelle des valeurs propres du jacobien pour $\theta \geq 1/2$; c'est pourquoi, on adopte usuellement la valeur $1/2$.

5.3 Résolution du problème local.

Par la résolution du problème local, on détermine, pour chaque barre, le vecteur de forces nodales (matrice $\{Q\}$) et la matrice de rigidité tangente (matrice $\left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right]$). La barre peut alors être introduite comme élément fini dans une bibliothèque de logiciels de calcul de structure standards. Le calcul de cet élément est réalisé en trois étapes:

- Calcul de la matrice des déformations de la barre à partir des déplacements de la barre $\{q\}$.

b) Calcul de la matrice des contraintes $\{M\}$, des variables internes $\{A\}$, des forces thermodynamiques $\{Y\}$ et du jacobien en coordonnées locales $\left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right]$ à la fin du pas, à partir de la matrice des déformations déterminée à l'étape précédente.

c) Calcul de la matrice des forces de la barre $\{Q\}$ et du jacobien $\left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right]$ en coordonnées globales à partir des matrices des contraintes et du jacobien en coordonnées locales déterminés à l'étape précédente.

La première étape est réalisée par l'application directe des équations de compatibilité [2b] en petits déplacements, ou [2a] dans le cas général. La deuxième étape est décrite dans la section 5.4. et la troisième dans la section 5.5

5.4 Calcul des contraintes et du jacobien local.

Pour le calcul des contraintes et des variables internes à la fin du pas, on doit résoudre le système d'équations non-linéaires constitué par la relation contrainte-déformation [8], la loi d'évolution discrétisée [16] et les critères de charge-décharge des lois d'évolution. Les inconnues du système sont donc: la matrice des contraintes, les multiplicateurs inélastiques et les variables internes. On écrira ce système d'équations de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \{R(M, \Phi, A_r)\} &= 0 \\ \{A\}_r - \{A_0\}_r - \{T(\lambda, M, \Phi, A_r)\}_r &= 0 \quad r = 1, 2, 3, \dots \\ \{V(\lambda, M, \Phi, A_r)\}_r &= 0 \end{aligned} \quad [17]$$

où $\{A\}_1, \{A\}_2, \{A\}_3, \dots$, représentent les variables internes du modèle, c'est à dire: $\{\Phi^p\}, \{D^+\}, \{D^-\}, \dots$

$$\{R(M, \Phi, A_r)\} = \{\Phi\} - \{\Phi^p\} - [F(D^+, M)]\{<M>_+\} - [F(D^-, M)]\{<M>_-\}$$

$$\begin{aligned} \{T(\lambda, M, \Phi, A_r)\}_r &= \begin{bmatrix} \Delta \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial Y_i} \Big|_{\theta} \\ \Delta \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial Y_j} \Big|_{\theta} \\ \Delta \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial Y_n} \Big|_{\theta} + \Delta \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial Y_n} \Big|_{\theta} \end{bmatrix}_r \\ \{V(\lambda, M, \Phi, A_r)\}_r &= \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix}_r \end{aligned}$$

$$V_i = \begin{cases} h_i(M, \Phi, A) = 0 & \text{si la variable } A_i \text{ de l'ensemble de variables} \\ & \text{internes } \{A\}_r \text{ est "active"} \\ \Delta \lambda_i = 0 & \text{si la variable } A_i \text{ de l'ensemble } r \text{ est "inactive"} \end{cases}$$

Ce système peut être résolu par la méthode de Newton. Cependant on ne sait pas a priori quelles sont les variables internes "actives". On utilise alors l'algorithme ci-après et qui peut être décomposé en trois étapes:

a) L'étape dite "prédicteur élastique". Celle-ci consiste à calculer la matrice de contraintes $\{M_e\}$ à la fin du pas en supposant qu'il n'y a pas de modification des variables internes. Ce calcul est réalisé par la résolution de l'équation suivante:

$$\{R(M_e, \Phi, A_{0r})\} = 0$$

On peut alors avoir une estimation des variables internes actives par le critère:

$$\begin{cases} \text{si } f_i(M_e, \Phi, A_{0r}) > 0 & A_i \text{ de l'ensemble } r \text{ est supposée active} \\ \text{sinon} & A_i \text{ de l'ensemble } r \text{ est supposée inactive} \end{cases}$$

b) L'étape que l'on appelle "correcteur inélastique" qui consiste à résoudre le système d'équations [17], par exemple, par la méthode de Newton à partir des résultats de l'étape précédente.

c) L'étape que l'on appelle "vérificateur" où l'on vérifie que:

c1) Toutes les variables jugées "actives" le sont effectivement, par la vérification des inégalités [10]. Celle qui n'a pas le signe approprié, indique que la variable interne en question n'est pas active.

c2) Toutes les variables jugées "inactives" le sont effectivement, par le calcul des fonctions seuil qui doivent être négatives ou nulles. Celle qui n'a pas le signe approprié, indique que la variable interne en question n'est pas "inactive".

Si l'étape de vérification est passée avec succès, le calcul de contraintes et des variables internes est terminé; sinon on recommence la correction inélastique avec une nouvelle estimation. Dans les exemples présentés dans cet article, cet algorithme a convergé, dans le cas le plus défavorable, en deux itérations.

Après le calcul de l'état à la fin du pas, on peut déterminer le jacobien en coordonnées locales. En effet, les équations [17] définissent de façon implicite l'expression de la matrice de contraintes en fonction des déformations, par conséquent on peut écrire:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial M} \right] \left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right] + \left[\frac{\partial R}{\partial A_r} \right] \left[\frac{\partial A_r}{\partial \Phi} \right] = - \left[\frac{\partial R}{\partial \Phi} \right]$$

$$\left[\frac{\partial A_r}{\partial \Phi} \right] - \left[\frac{\partial T}{\partial M} \right] \left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right] - \left[\frac{\partial T}{\partial A_r} \right] \left[\frac{\partial A_r}{\partial \Phi} \right] - \left[\frac{\partial T}{\partial \lambda} \right] \left[\frac{\partial \lambda}{\partial \Phi} \right] = \left[\frac{\partial T}{\partial \Phi} \right]$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial M} \right] \left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right] + \left[\frac{\partial V}{\partial A_r} \right] \left[\frac{\partial A_r}{\partial \Phi} \right] + \left[\frac{\partial V}{\partial \lambda} \right] \left[\frac{\partial \lambda}{\partial \Phi} \right] = - \left[\frac{\partial V}{\partial \Phi} \right]$$

La résolution de ce système linéaire d'équations matricielles permet d'obtenir le jacobien $\left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right]$.

5.5 Calcul des forces nodales et du jacobien en coordonnées globales.

La matrice de forces généralisées $\{Q\}$ peut alors être calculée directement par l'équation d'équilibre de la barre [3]. Le jacobien en coordonnées globales, pour le cas particulier des petits déplacements, est obtenu en utilisant les équations [2b] et [3b]:

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right] = \left[\frac{\partial Q}{\partial M} \right] \left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial q} \right] = [B^0]^T \left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right] [B^0]$$

Dans le cas général ("grands déplacements"), on cherche une expression du type:

$$\{dQ\} = \left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right] \{dq\};$$

d'après [3a] et l'équation de compatibilité [1], on a:

$$\{dQ\} = [B^A]^T \{dM\} + [dB^A]^T \{M\} = [B^A]^T \left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right] [B^A] \{dq\} + [dB^A]^T \{M\}$$

Le dernier terme de la dernière équation peut être exprimé de la façon suivante (voir annexe 5):

$$[dB^A]^T \{M\} = [C^A] \{dq\};$$

le jacobien en coordonnées globales est donc donné par:

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial q} \right] = [B^A]^T \left[\frac{\partial M}{\partial \Phi} \right] [B^A] + [C^A]$$

6 Exemples d'application.

Un logiciel qui contient l'élément fini décrit dans la section 5 a été développé. Celui-ci est pour l'instant limité au calcul en petits déplacements et il ne prend pas en compte des effets unilatéraux. Un interface de connexion avec le logiciel ABAQUS [ABA89] a été également écrit. Ce logiciel a été vérifié en comparant les calculs analytiques réalisés pour les essais d'identification du modèle de la section 4.5 avec les résultats obtenus avec ABAQUS.

Deux exemples traités à l'aide de ce logiciel sont présentés dans les sections 6.1 et 6.2.

6.1 Portique à quatre étages avec efforts imposés.

Dans cet exemple on étudie le portique de la figure 7. Chaque poteau est représenté par un seul élément. Les poutres de tous les étages sont discrétisées en deux éléments de telle façon que l'endommagement puisse être localisé aussi au milieu de chaque poutre. On a utilisé les fonctions seuil [13]. Les caractéristiques des barres de la structure sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Poutres : } L_p &= 9,15 \text{ m.} & EI &= 12420 \text{ KN-m}^2 & AE &= 414000 \text{ KN} \\ M_{cr} &= 0 & M_p &= 300 \text{ KN-m} & M_u &= 403 \text{ KN-m} & \Phi^p_u &= 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Poteaux : } L_c &= 3,66 \text{ m} & EI &= 11960 \text{ KN-m}^2 & AE &= 575000 \text{ KN} \\ M_{cr} &= 0 & M_p &= 500 \text{ KN-m} & M_u &= 600 \text{ KN-m} & \Phi^p_u &= 0,6 \end{aligned}$$

Ces valeurs ont été choisies arbitrairement et ne correspondent pas nécessairement à des paramètres représentatifs d'un portique réel. L'histoire des paramètres de charge Q et P est indiquée sur la même figure. On applique une charge verticale d'abord, puis une charge horizontale croissante jusqu'à la charge limite de la structure. La courbe Q en fonction du déplacement horizontal du noeud supérieur gauche est indiquée en figure 8. Le diagramme des moments ainsi que les valeurs de l'endommagement et de la déformation plastique dans les rotules inélastiques à différents niveaux de sollicitation sont indiquées en figure 9. Les valeurs des paramètres d'endommagement sont indiquées sur la figure par une lettre placée à côté de chaque rotule; à chaque lettre correspond l'intervalle de valeurs indiqué sur la même figure. Les diagrammes des moments ont été dessinés à échelle: la longueur qui correspond à 125 KN-m est précisée dans la figure.

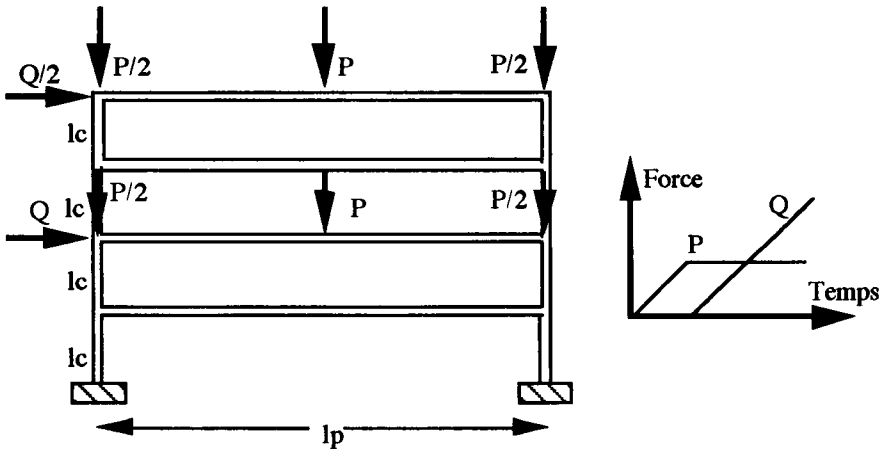


Figure 7. Portique à quatre étages avec efforts imposés. Géométrie et sollicitation.
 $P_{max} = 10.5 \text{ KN}$, $Q_{max} = 210 \text{ KN}$

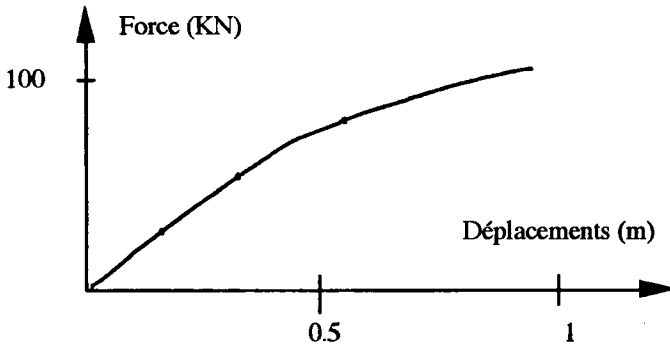


Figure 8 Courbe force-déplacement du noeud supérieur gauche du portique.

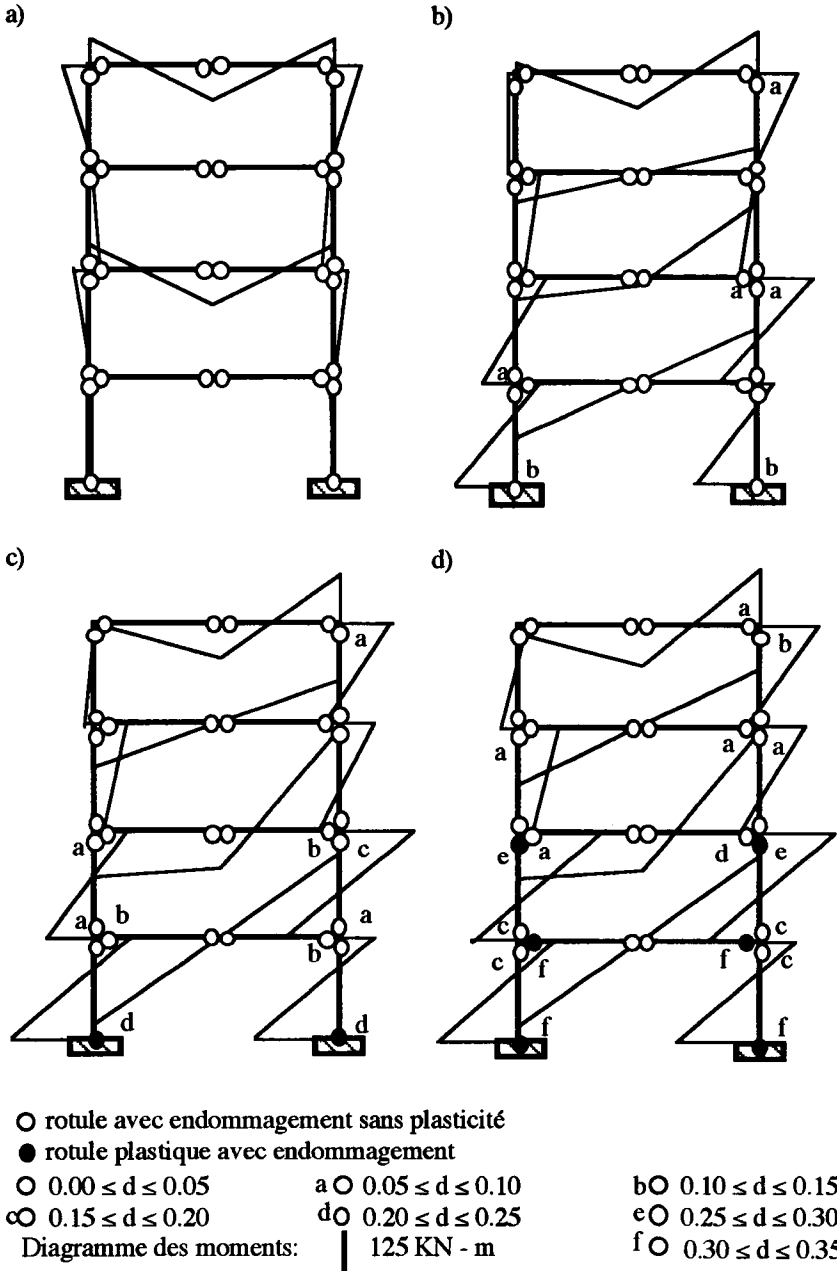


Figure 9. Diagramme des moments ainsi que valeurs de l'endommagement et de la déformation plastique à différents niveaux de la sollicitation. a) $P = P_{max}$, $Q = 0$.
 b) $P = P_{max}$, $Q = Q_{max} / 2$ c) $P = P_{max}$, $Q = 3 Q_{max} / 4$,
 d) $P = P_{max}$, $Q = Q_{max}$

6.2 Portique avec déplacement imposé.

L'exemple précédent ne montre pas le caractère adoucissant du comportement puisque la structure est soumise à des efforts imposés. Dans cet autre exemple, on considère le portique qui est indiqué en figure 10 soumis à un déplacement imposé du noeud supérieur gauche.

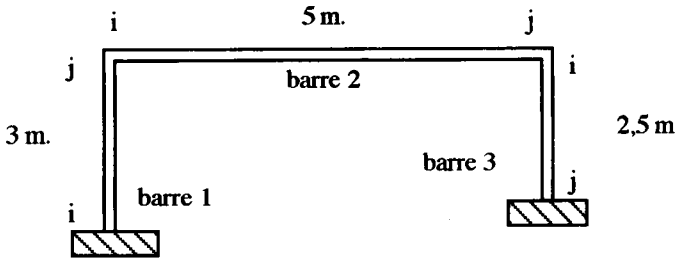


Figure 10. Portique à déplacement imposé. $EI = 332 \text{ KN-m}^2$; $AI = 3,32 \times 10^{-8} \text{ m}^6$; $m = 0,991 \text{ KN-m}$, $n = 1$, $G_{Cr} = 0,085 \text{ KN-m}$.

On utilise les fonctions de plasticité et d'endommagement suivantes pour chaque rotule:

$$f = -1 \qquad g = G - m (d)^n + G_{Cr}$$

où m , n et G_{Cr} sont des paramètres du barre.

L'emploi de ce modèle, qui n'a pas été identifié avec des résultats expérimentaux, permettra l'apparition de rotules endommagées (c'est à dire de rotules où le paramètre d'endommagement prend la valeur un) dans la structure.

L'emploi de une fonction de plasticité constante et negative (de valeur arbitraire) est un artifice afin de ne considérer que l'endommagement comme variable interne dans le calcul.

La courbe force-déplacement du portique jusqu'à l'apparition de la première rotule endommagée est indiquée en figure 11. Dans cette figure on peut remarquer la phase d'adoucissement de la structure jusqu'à l'apparition de la première rotule endommagée. La courbe force-déplacement est régulière même dans la partie adoucissante. L'évolution des paramètres d'endommagement est indiquée en figure 12. La figure 13 montre la distribution de moments sur le portiques à différents étapes du chargement, une distribution élastique sans endommagement (figure 13a), la distribution immédiatement après l'apparition de la première rotule endommagée (figure 13b), la distribution après l'apparition de la deuxième rotule endommagée (figure 13c) et enfin la distribution après la troisième rotule (figure 13d).

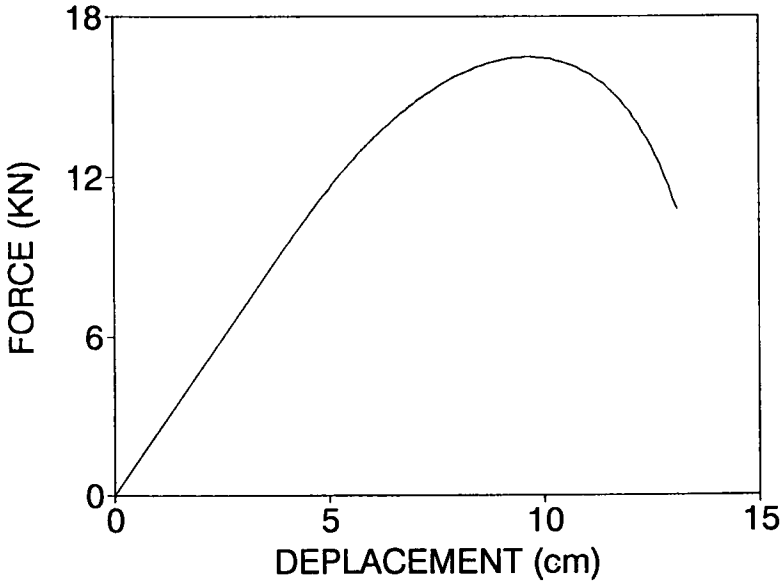


Figure 11. Courbe force - déplacement calculée du portique.

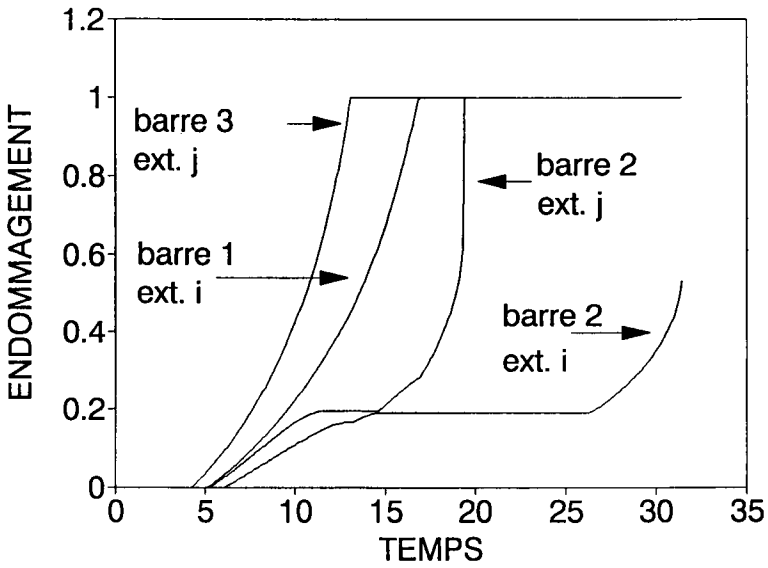


Figure 12. Evolution des paramètres d'endommagement du portique en fonction du temps.

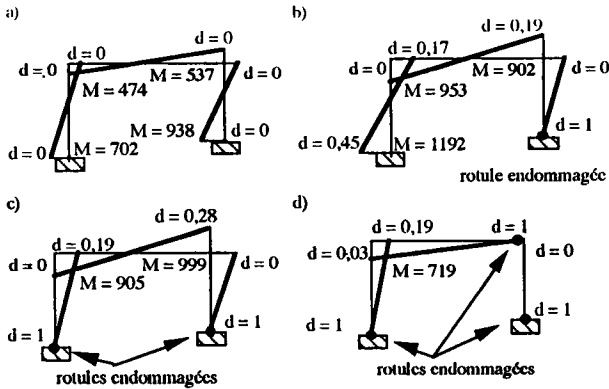


Figure 13 Distribution des moments (en KN-m) et valeurs d'endommagement aux rotules inélastiques. a) Comportement élastique b) Apparition de la première rotule endommagée c) Apparition de la deuxième rotule endommagée c) Apparition de la troisième rotule endommagée. (d'après [FLO91])

7 Conclusions.

Un élément fini pour le calcul de portiques élastoplastiques endommageables a été développé. Cet élément est basé sur la notion de "modèle de dissipation concentrée" et ses lois d'évolution doivent être identifiées avec des résultats expérimentaux. Cet élément peut facilement être introduit dans la bibliothèque d'éléments des logiciel de calcul de structures standards.

Les essais pour l'identification des lois d'évolution sont des essais classiques du génie civil, au moins dans le cas particulier des portiques plans. On pourrait aussi envisager d'adapter certains modèles de comportement des unions poutre-poteau que l'on trouve dans la littérature, au cadre développé dans ce travail.

Dans les exemples présentés, on n'a pas remarqué d'instabilités numériques. Les exemples présentés et d'autres similaires semblent indiquer que, au moins pour une discrétisation particulière, la méthode proposée permettrait de mener des simulations numériques de l'effondrement des portiques en efforts ou déplacements imposés. Bien entendu, des études mathématiques approfondies doivent être réalisées avant de pouvoir affirmer que le problème est bien posé dans le cas général.

8. Remerciements

Cet article a été rédigé lors d'un séjour au Laboratoire de Mécanique et Technologie à Cachan, et imprimé au "Laboratorio de Fenómenos Interfaciales y Recuperación del Petroleo" Mérida, Vénézuéla. L'auteur est très reconnaissant de la gentillesse des membres des deux laboratoires.

Le séjour en France a été possible grâce au financement conjoint du CNRS et du CONICIT (Venezuela). Le travail a été réalisé grâce au financement du CDCHT de la Universidad de Los Andes.

9. Bibliographie

- [ABA 88] ABAQUS, *User's manual*, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. 1988.
- [BAZ 91] BAZANT Z.P., CEDOLIN L., *Stability of structures*, Oxford University Press, New York, 1991.
- [BEN 89] BENALLAL A., Thermoviscoplasticité et endommagement des structures, Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1989.
- [BRE 88] BREYSSE D., MAZARS J., "Simplified approach of nonlinearity in R.C. beams", *ASCE J. Struct. Engng. Div.*, 114, 251-268, 1988.
- [ELA 91] ELACHACHI S.M., BREYSSE D., COLSON A., AITA S., PENAZZI L., "Calcul par macro-éléments des structures en béton armé sous sollicitations cycliques", AFPS, Paris, 1991.
- [CIP 92a] CIPOLLINA A., FEBRES CEDILLO R., FLOREZ-LOPEZ J., "A model of plasticity coupled to damage for RC frames", *X World Conference on Earthquake Engineering*, Madrid, Espagne, 1992.
- [CIP 92b] CIPOLLINA A., Análisis de elementos estructurales de concreto armado mediante la mecánica de la degradación, Thèse de Mastère de l'Université des Andes, Mérida, Venezuela. 1992.
- [COH 79] COHN Z.M., FRANCHI A., "STRUPL : A computer system for structural plasticity". *J. Struc. Div. ASCE* 105(4). 789-804. 1979.
- [COL 84] COLSON A., Modélisation des conditions aux limites et d'assemblage en mécanique des structures métalliques, Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1984.
- [GOT 91] GOTO Y., SUZUQUI S., CHEN W.F., "Analysis of critical behavior of semi-rigid frames with or without load history in connections", *Int. J. Solids Struct.*, 27, 4, 467-483, 1991.
- [KAC 58] KACHANOV L.M. "On creep rupture time". *IZV. AKAD. NAUK. SSSR* 8, 26-31. 1958.
- [FLO 91] FLOREZ-LOPEZ J. "Análisis de estructuras aporricadas mediante la mecánica de la degradación" *XXV Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, Porto Alegre, Brasil, 1991.
- [FLO] FLOREZ-LOPEZ J., "Modelos de daño concentrado para la simulación numérica del colapso de pórticos planos" *Revista internacional de métodos numéricos para el cálculo y diseño en ingeniería*, à paraître.
- [LAB 90] LABORDERIE C., BERTHAUD Y., PIJODIER-CABOT G., "Crack closure effect in continuum damage mechanics : numerical implementation", in *Preprints SCI90 Conference*, N. Bicanic, M. Mang eds, Pineridge Press, 975-986, 1990.
- [LAD 83] LADEVEZE P. "On a anisotropic damage theory.", *Proc. of the CNRS International Colloquium of failure criteria of structural media*, villars de lans, France, 1983.
- [LEM 88] LEMAITRE J., CHABOCHE J.-L., *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris. 1988.
- [LOP 92] LOPEZ INOJOSA A. Método de la rigidez directa tomando en cuenta plasticidad y daño, Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme d'ingénieur en génie civil, Université des Andes, Mérida, Vénézuéla 1992.
- [MAZ 86] MAZARS J., "A model of unilateral elastic damageable material and its application to concrete", in *Proceedings of Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, F.H. Wittmann, ed. Elsevier, 61-71, 1986.
- [MAI 73] MAIER G., DE DONATO L., CORRADI L., "Inelastic analysis of reinforced concrete frames by quadratic programming". *Simp. on Inelasticity and Nonlinearities in Struc. Concr.*, Univ. of Waterloo, Canada 1973.

- [PAR 75] PARK R., PAULAY T., *Reinforced concrete structures*. John Wiley & Sons, New York. 1975.
- [PEN 91] PENSERINI P., *Caractérisation et modélisation du comportement des liaisons structure métallique-fondation*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1991.
- [POW 69] POWELL H.G., "Theory of nonlinear elastic structures", *J. Struc. Div. ASCE* 95(ST12), 2687-2701, 1969
- [RAB 69] RABOTNOV Y.N. "Creep rupture" *Proc. XII Int. Cong. Appl. Mech.* 1968. Stanford-Springer. 1969.
- [RIV 88] RIVA P. "Engineering approaches to nonlinear analysis of concrete structures" PhD Thesis, Université de Waterloo, Canada, 1988.
- [RIV 89] RIVA P., COHN M.Z. "Engineering approach to nonlinear analysis of concrete structures". *J. Struc. Div. ASCE* 116(8), 2162-2185. 1989.
- [SIM 88] SIMO J.-C., KENNEDY A., GOVINDJEE S. "Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms", *Int. Num. Meth. Eng.*, 26, 2161-2185, 1988.

Annexes

1) Expression de la matrice de transformation $[B^A]$ d'après Powell [POW69] :

$$[B^A] = \begin{bmatrix} -\frac{s}{L} & \frac{c}{L} & 1 & \frac{s}{L} & -\frac{c}{L} & 0 \\ -\frac{s}{L} & \frac{c}{L} & 0 & \frac{s}{L} & -\frac{c}{L} & 1 \\ -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix}$$

où $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$, α est l'angle du barre avec l'axe de référence (voir figure 2) et L la longueur du barre.

2) Relation entre déformations et déplacements en "grands déplacements" d'après Powell [POW69] :

$$\Phi_i = q_3 + (\theta_0 - \theta_A); \quad \Phi_j = q_6 + (\theta_0 - \theta_A)$$

$$\delta = L_A - L_0$$

où

$$\theta_0 = \arctg\left(\frac{Y_0}{X_0}\right), \quad \theta_A = \arctg\left(\frac{Y_A}{X_A}\right)$$

$$L_0 = (X_0^2 + Y_0^2)^{1/2}, \quad L_A = (X_A^2 + Y_A^2)^{1/2}$$

$$X_A = X_0 + q_4 - q_1, \quad Y_A = Y_0 + q_5 - q_2$$

X_0 projection de la barre dans la configuration initiale sur l'axe x.

Y_0 projection de la barre dans la configuration initiale sur l'axe y.

3) Matrice $[S^0]$ dans le cas particulier d'une barre de longueur L, section A et inertie I constantes :

$$[S^0] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & A/I \end{bmatrix}$$

4) Matrice $[F^A]$ dans le cas particulier d'une barre de longueur L, section A et inertie I constantes, d'après Bazant et Cedolin [BAZ91] :

$$[F^A] = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} \Psi & \phi & 0 \\ \phi & \Psi & 0 \\ 0 & 0 & A/I \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \Psi = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} - \cot \tau \right) & \text{si } N \geq 0 \\ \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tanh \tau} - \frac{1}{\tau} \right) & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

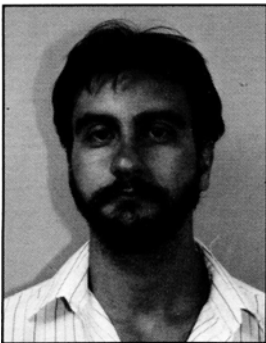
$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\sin \tau} - \frac{1}{\tau} \right) & \text{si } N \geq 0 \\ \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\sinh \tau} \right) & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{N}{EI}} L, \quad N \text{ est la force axiale.}$$

5) Matrice de transformation pour le jacobien $[C^A]$ d'après Powell [POW69] :

$$[C^A] = N \begin{bmatrix} s^2 & -sc & 0 & -s^2 & sc & 0 \\ -sc & c^2 & 0 & sc & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s^2 & sc & 0 & s^2 & -sc & 0 \\ sc & -c^2 & 0 & -sc & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$ et N est la force axiale.



Julio Florez-Lopez a reçu en 1980 le diplôme d'ingénieur en génie civil de l'université des Andes à Mérida au Venezuela. Il a fait le DEA en mécanique appliquée à la construction à l'université Pierre et Marie Curie et sa thèse de doctorat au laboratoire de mécanique et technologie à Cachan en France. Il a soutenu sa thèse en 1989. Actuellement, il est professeur associé à l'université des Andes. Ses domaines d'intérêt professionnel sont : les aspects théoriques et numériques de la mécanique de l'endommagement et ses applications en génie civil.