
Modélisation élastoplastique des coques minces par un élément courbe à variables nodales globales

Ghassan Ghazlan — Maurice Lemaire*

Laboratoire de Génie civil, université Blaise Pascal
UFRRST, 63177 Aubière cedex

* LaRAMA, Institut français de mécanique avancée
BP 265, 63175 cedex

RÉSUMÉ. Ce travail concerne l'analyse non linéaire géométrique (grands déplacements) et matérielle (plasticité) de structures formées de plaques et de coques minces, discrétisées par facettes courbes triangulaires formulées en théorie de Marguerre. Les relations incrémentales du modèle sont fondées sur une description lagrangienne actualisée approchée, les champs des variables mécaniques et cinématiques sont rattachés à un système corotationnel de coordonnées liées à la position actuelle de la coque. La géométrie déformée de la coque est introduite dans le tenseur des déformations par la théorie de Marguerre. L'étude élastoplastique est fondée sur un critère faisant intervenir les invariants du tenseur des contraintes généralisées (approximation d'Eidsheim et Larsen). En utilisant des variables globales, le processus d'intégration numérique à travers l'épaisseur est évité tout en tenant compte de l'apparition progressive de la plasticité. Le calcul élastoplastique de l'accroissement de contrainte vraie par une approche intégrale permet d'éviter un processus d'approximations successives dans le cas du critère retenu. Afin de gérer les processus non linéaires, l'algorithme de Newton-Raphson, associé au pilotage en sphère de rayon pondéré, est utilisé ; ce qui permet la détermination automatique de toute la réponse d'une structure sous les hypothèses retenues. Le couplage de la théorie de Marguerre pour l'actualisation de la géométrie et du critère d'Eidsheim et Larsen pour la modélisation de la plastification progressive, rendu possible tout en évitant les itérations internes, conduit à une modélisation performante avec un nombre réduit d'éléments.

ABSTRACT. The purpose of this text is to present a geometrically (large displacements) and materially (plasticity) nonlinear analysis of thin plates and shells modeled by a curved triangular element based on Marguerre's theory. For computational efficiency an updated lagrangian description is used, referring the kinematical and mechanical field variables to local corotated coordinate frames. The curved shape of the shell is taken into account by Marguerre's theory. The constitutive equations are given in terms of increments of midsurface strains and curvatures and corresponding generalized stress (Eidsheim-Larsen).

approximation), thus avoiding the integration over the shell thickness and taking into account the propagation of plastic zones through the thickness. Integral approach is used to evaluate stress increments satisfying elastoplastic conditions, thus avoiding in some cases successive approximation process. The nonlinear response is determined using the Newton-Raphson method in conjunction with a scaling sphere, thus permitting an automatic piloting of the whole response in geometrically and materially nonlinear problems. An efficient solution with a small number of elements is obtained using Marguerre's theory coupled to Eidsheim-Larsen criterion which allowed progressive propagation of plastic zone without successive approximation process.

KEY-WORDS : *Marguerre's shell, finite element, large displacements, elastoplastic computations, generalized variables.*

MOTS-CLÉS : *coque de Marguerre, éléments finis, grands déplacements, calcul élastoplastique, variables généralisées.*

0. Introduction

Le développement d'éléments finis **simples, efficaces et fiables**, pour l'analyse des structures minces, constitue toujours un important axe de recherche en mécanique des structures. La diversité des problèmes rencontrés en pratique rend cet objectif difficile à atteindre. Différents aspects, comme la simplicité et l'efficacité, ne sont pas toujours compatibles.

Des travaux récents menés à l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon [ELK 2] [DJE 5], à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne [DEV 3] [JET 2] et à l'Université de Liège [JET 1] [DEV 2], ont montré tout l'intérêt d'une nouvelle approche, appelée *approche par coque quasi-plane de Marguerre* [STO 2], qui semble répondre à ces objectifs. En effet, la théorie de **Marguerre**, en permettant un compromis entre l'approche par facettes planes et celle en coordonnées curvilignes, offre des avantages intéressants tant du point de vue simplicité qu'efficacité. Nous avons étendu cette théorie à l'analyse non linéaire matérielle des structures minces en présence de grands déplacements.

Pour fixer les notations, nous rappelons tout d'abord le principe du travail virtuel en description Lagrangienne actualisée, ensuite nous exposons en détail comment la géométrie déformée de la coque est prise en compte dans le tenseur des déformations, puis nous décrivons les lois de comportement élastoplastiques exprimées en termes de contraintes généralisées sur la surface moyenne de la coque.

Nous abordons ensuite les méthodes numériques utilisées pour résoudre des problèmes élastoplastiques non linéaires. Après avoir présenté un algorithme de résolution automatique, nous décrivons une méthode basée sur une approche intégrale permettant de calculer l'accroissement de contrainte vraie et les déformations plastiques sans exiger d'itérations internes. Enfin, nous proposons un ensemble de tests de validation du modèle où nous avons comparé les résultats obtenus à des résultats numériques issus de la littérature.

1. Description Lagrangienne pour le calcul non linéaire

1.1. Notations

Afin d'identifier clairement les quantités mises en jeu, une notation dérivée de celle proposée par Bathe et al. [BAT 4] est utilisée. Une variable v possède quatre positions d'indices notées 1, 2, 3, 4 : $\frac{1}{2}v_3^4$:

- 1 indique la date à laquelle la variable est considérée,
- 2 indique la date de la configuration de référence,
- 3 et 4 sont les positions habituelles de la notation indicielle.

Un accroissement mesuré sur une position est noté par l'indice de cette position en 2. Les variables absolues, qui ne nécessitent pas d'indication de la position de référence, sont notées sans utilisation de la position 2. Lorsque les positions 1 et 2 sont identiques, l'indice en 2 est omis.

1.2. Description Lagrangienne Actualisée Approchée D.L.A.A.

Connaissant une solution à la date t , nous cherchons les valeurs des variables d'état à la date $\tau = t + dt$. Le principe des déplacements virtuels, exprimé à la date τ , indique alors :

$$\int_{tV} \tau \sigma_{ij} \delta_t^{\tau} e_{ij} dV = \delta^{\tau} W_e \tag{1}$$

$\delta^{\tau} W_e$ est le travail virtuel des actions extérieures, donné par :

$$\delta^{\tau} W_e = \int_{tV} \tau f_i^v \delta_t u_i dV + \int_{tS} \tau f_i^s \delta_t u_i dS \tag{2}$$

$\delta_t u_i$ est un champ de déplacement cinématiquement admissible qui traduit une perturbation du champ réel u_i , τf_i^v et τf_i^s sont respectivement les densités des actions volumiques et surfaciques.

La contrainte de Piola-Kirchhoff $\tau \sigma_{ij}$ et la déformation de Green τe_{ij} sont décomposées à partir des valeurs connues à la date t et des accroissements infinitésimaux inconnus, notés par l'indice inférieur gauche t . Cette décomposition fait apparaître la contrainte de Cauchy ${}^t T_{ij}$:

$$\tau \sigma_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + t \sigma_{ij} = {}^t T_{ij} + t \sigma_{ij}$$

$$\delta_t^{\tau} e_{ij} = \delta_t e_{ij} = \delta_t \epsilon_{ij} + \delta_t \eta_{ij}$$

avec :
$$\delta_t \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_t u_{i,j} + \delta_t u_{j,i}) \quad \text{et} \quad \delta_t \eta_{ij} = \frac{1}{2} \delta({}^t u_{k,i} \quad {}^t u_{k,j})$$

La relation entre les accroissements de contrainte et de déformation est notée par :

$$t \sigma_{ij} = {}^t C_{ijrs} t e_{rs} \tag{3}$$

L'expression [1] s'écrit alors en négligeant les termes différentiels d'ordre 2 :

$$\int_{tV} {}^tC_{ijrs} {}^t\epsilon_{rs} \delta_t \epsilon_{ij} dV + \int_{tV} {}^tT_{ij} \delta_t \eta_{ij} dV = \delta^r W_e - \int_{tV} {}^tT_{ij} \delta_t \epsilon_{ij} dV \quad [4]$$

Le détail de cette formulation est donné dans [LEM 2]. Fondée sur la discrétisation de l'équation [4], la construction du modèle éléments finis est maintenant effectuée sur une configuration proche de la configuration actualisée à la date t .

2. Modélisation des coques en éléments finis

2.1. Hypothèses de la théorie des coques

Les différentes théories des coques minces font intervenir des hypothèses sur la nature des contraintes et des déformations. Pour notre part, nous avons retenu les hypothèses suivantes (Love - Kirchhoff) :

- hypothèse de Bernoulli-Euler : les sections normales à la surface moyenne de la coque avant déformation restent normales à la surface moyenne après déformation ; l'influence de la déformation due au cisaillement transversal est négligée,
- hypothèse de contraintes planes : la contrainte de Cauchy suivant la normale à la surface moyenne est négligeable,
- hypothèse d'incompressibilité transversale : pas de variation d'épaisseur de la coque lors de la déformation.

2.2. Généralités sur la modélisation des coques

La modélisation des coques est souvent effectuée par une discrétisation de la surface moyenne en facettes planes. Cette procédure simple est satisfaisante dans certains cas. Elle peut être insuffisante pour bien décrire la géométrie initiale et elle ne permet pas de représenter correctement une géométrie déformée à une date t . La construction d'un élément courbe est rendue délicate par la nécessité d'éviter tout phénomène de blocage. Une solution a été proposée par Stolarsky et *al.* [STO 2] sur une base triangulaire. Elle est fondée sur l'écriture des équations de déformations, en coordonnées cartésiennes, sur le plan de projection d'un élément de coque : c'est la théorie de *Marguerre*, dans laquelle la géométrie est caractérisée par les dérivées premières de la surface et non pas par les rayons de courbures, comme cela est classique dans le cas des coques surbaissées. La convergence est assurée car les pentes tendent vers zéro avec la diminution de la taille des éléments.

Nous proposons d'étendre cette théorie à l'analyse non linéaire matérielle des coques minces en présence de grands déplacements. Les formulations de la théorie sont exprimées en termes de variables généralisées.

2.3. Cinématique de la déformation en théorie de Marguerre

La théorie de Marguerre, en grands déplacements, consiste à considérer la coque déformée à la date t comme une configuration obtenue *a priori* après un petit déplacement fictif d'une configuration plane de référence ${}^t\Pi$. Ce déplacement fictif est supposé purement normal (pas de rotation) au plan de référence ${}^t\Pi$.

Considérons le plan ${}^t\Pi$ passant par les points ${}^t i, {}^t j, {}^t k$, appartenant à la surface moyenne de la coque. Soit l'espace cartésien $({}^t X_1, {}^t X_2, {}^t X_3)$ appartenant au plan ${}^t\Pi$ et défini par le système d'axes orthonormés ${}^t \vec{e}_1, {}^t \vec{e}_2, {}^t \vec{e}_3$ (figure 1). Tout point de la surface moyenne de la coque à la date t est donné par le vecteur ${}^t \vec{R}_0$:

$${}^t \vec{R}_0 = {}^t x_1 {}^t \vec{e}_1 + {}^t x_2 {}^t \vec{e}_2 + {}^t Z({}^t x_\alpha) {}^t \vec{e}_3 \quad [5]$$

où ${}^t Z({}^t x_\alpha)$ est l'équation de la géométrie déformée à la date t .

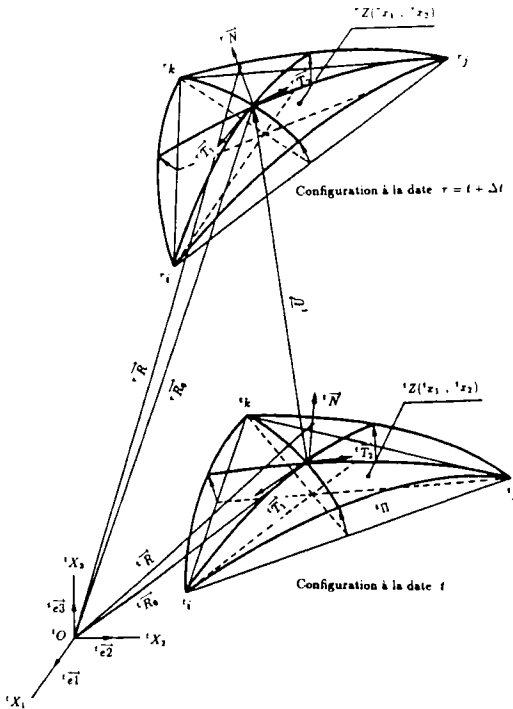


Figure 1 : Cinématique des déformations en D.L.A.

Le système d'axes curvilignes (${}^t\vec{T}_1, {}^t\vec{T}_2, {}^t\vec{N}$) est rattaché à la surface moyenne de la coque. Il est défini par les tangentes ${}^t\vec{T}_1, {}^t\vec{T}_2$ et la normale ${}^t\vec{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} {}^t\vec{T}_1 &= \frac{\partial {}^t\vec{R}_0}{\partial {}^t x_1} = {}^t\vec{e}_1 + {}^t Z_{,x_1} {}^t\vec{e}_3 \\ {}^t\vec{T}_2 &= \frac{\partial {}^t\vec{R}_0}{\partial {}^t x_2} = {}^t\vec{e}_2 + {}^t Z_{,x_2} {}^t\vec{e}_3 \\ {}^t\vec{N} &= {}^t\vec{T}_1 \wedge {}^t\vec{T}_2 = -{}^t Z_{,x_1} {}^t\vec{e}_1 - {}^t Z_{,x_2} {}^t\vec{e}_2 + {}^t\vec{e}_3 \end{aligned} \quad [6]$$

Ces vecteurs sont orthogonaux et normés pour un élément surbaissé où :

$$({}^t Z_{,x_1})^2 \ll 1, \quad ({}^t Z_{,x_2})^2 \ll 1, \quad {}^t Z_{,x_1} {}^t Z_{,x_2} \ll 1$$

Un point quelconque de la surface de la coque est défini par le vecteur ${}^t\vec{R}$:

$${}^t\vec{R} = {}^t\vec{R}_0 + \zeta {}^t\vec{N} \quad [7]$$

où ζ est la coordonnée (constante par hypothèse) selon l'épaisseur de la coque. Avec [5][6][7], on a :

$${}^t\vec{R} = ({}^t x_1 - \zeta {}^t Z_{,x_1}) {}^t\vec{e}_1 + ({}^t x_2 - \zeta {}^t Z_{,x_2}) {}^t\vec{e}_2 + (\zeta + {}^t Z) {}^t\vec{e}_3 \quad [8]$$

Le vecteur ${}^\tau\vec{R}_0$, qui donne la position de la surface moyenne après déformation (dans ${}^\tau\Gamma$), a pour expression :

$${}^\tau\vec{R}_0 = {}^t\vec{R}_0 + {}^t\vec{U}({}^t x_\alpha)$$

${}^t\vec{U}({}^t x_\alpha)$ est le vecteur accroissement de déplacement entre ${}^t\Gamma$ et ${}^\tau\Gamma$. En considérant ${}^t u_1 = {}^t u$, ${}^t u_2 = {}^t v$, ${}^t u_3 = {}^t w$, on obtient :

$${}^\tau\vec{R}_0 = ({}^t x_1 + {}^t u) {}^t\vec{e}_1 + ({}^t x_2 + {}^t v) {}^t\vec{e}_2 + ({}^t Z + {}^t w) {}^t\vec{e}_3 \quad [9]$$

Dans ${}^\tau\Gamma$, on définit les mêmes axes curvilignes (${}^\tau\vec{T}_1, {}^\tau\vec{T}_2, {}^\tau\vec{N}$), avec :

$$\begin{aligned} {}^\tau\vec{T}_1 &= \frac{\partial {}^\tau\vec{R}_0}{\partial {}^t x_1} = (1 + {}^t u_{,x_1}) {}^t\vec{e}_1 + {}^t v_{,x_1} {}^t\vec{e}_2 + ({}^t Z_{,x_1} + {}^t w_{,x_1}) {}^t\vec{e}_3 \\ {}^\tau\vec{T}_2 &= \frac{\partial {}^\tau\vec{R}_0}{\partial {}^t x_2} = {}^t u_{,x_2} {}^t\vec{e}_1 + (1 + {}^t v_{,x_2}) {}^t\vec{e}_2 + ({}^t Z_{,x_2} + {}^t w_{,x_2}) {}^t\vec{e}_3 \\ {}^\tau\vec{N} &= {}^\tau\vec{T}_1 \wedge {}^\tau\vec{T}_2 \end{aligned} \quad [10]$$

Sachant que le passage de ${}^t\Gamma$ à ${}^\tau\Gamma$ est infiniment petit, nous pouvons considérer que le vecteur ${}^\tau\vec{N}$ est sensiblement normé.

La position d'un point quelconque à la date τ est donnée par :

$${}^{\tau}\vec{R} = {}^{\tau}\vec{R}_0 + \zeta {}^{\tau}\vec{N} \quad [11]$$

La déformation de Green est définie par :

$${}^2 t e_{\alpha\beta} = \frac{\partial {}^{\tau}\vec{R}}{\partial {}^t x_{\alpha}} \frac{\partial {}^{\tau}\vec{R}}{\partial {}^t x_{\beta}} - \frac{\partial {}^t\vec{R}}{\partial {}^t x_{\alpha}} \frac{\partial {}^t\vec{R}}{\partial {}^t x_{\beta}} \quad [12]$$

En combinant les relations [8] à [12] et en négligeant les termes $({}^t u_{,\alpha})^2$, $({}^t v_{,\alpha})^2$, ${}^t u_{,\alpha} \cdot ({}^t Z_{,\alpha\beta} + {}^t w_{,\alpha\beta})$ ainsi que ceux en ζ^2 , on trouve l'expression de ${}^t e_{\alpha\beta}$:

$${}^t e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} ({}^t u_{\alpha,\beta} + {}^t u_{\beta,\alpha} + {}^t Z_{,\alpha} {}^t w_{,\beta} + {}^t Z_{,\beta} {}^t w_{,\alpha} - 2 \zeta {}^t w_{,\alpha\beta} + {}^t w_{,\alpha} {}^t w_{,\beta}) \quad [13]$$

Dans l'expression de ${}^t e_{\alpha\beta}$, on retrouve les termes classiques de membrane et de flexion et un terme supplémentaire ${}^t Z_{,\alpha} {}^t w_{,\beta} + {}^t Z_{,\beta} {}^t w_{,\alpha}$ qui traduit le couplage par les pentes. L'application directe de ces relations est à l'origine du phénomène de blocage de membrane qui peut être évité par décomposition modale [STO 2].

En théorie des coques, les déformations en un point quelconque de la coque sont exprimées en fonction des déformations de la surface moyenne et des courbures. Ces déformations sont appelées, par la suite, déformations généralisées :

$${}^t e_{\alpha\beta}(\zeta) = {}^t e_{\alpha\beta} + \zeta {}^t \chi_{\alpha\beta} \quad [14]$$

${}^t e_{\alpha\beta}$ et ${}^t \chi_{\alpha\beta}$ sont respectivement les accroissements de la déformation de membrane et de courbure. Leurs composantes sont données par :

$${}^t e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} ({}^t u_{\alpha,\beta} + {}^t u_{\beta,\alpha} + {}^t Z_{,\alpha} {}^t w_{,\beta} + {}^t Z_{,\beta} {}^t w_{,\alpha} + {}^t w_{,\alpha} {}^t w_{,\beta}) \quad [15]$$

$${}^t \chi_{\alpha\beta} = - {}^t w_{,\alpha\beta}$$

2.4. Efforts de la théorie des coques

Les efforts résultants, par unité de longueur, sur des sections normales à la surface moyenne d'épaisseur h , sont :

$${}^t N_{\alpha\beta} = \int_h {}^t T_{\alpha\beta} d\zeta \quad \text{et} \quad {}^t M_{\alpha\beta} = \int_h \zeta {}^t T_{\alpha\beta} d\zeta \quad [16]$$

Ces efforts sont appelés par la suite contraintes généralisées (ou globales) associées aux déformations généralisées déjà définies. L'accroissement du tenseur de contraintes généralisées est alors :

$${}^t N_{\alpha\beta} = \int_h {}^t \sigma_{\alpha\beta} d\zeta \quad \text{et} \quad {}^t M_{\alpha\beta} = \int_h \zeta {}^t \sigma_{\alpha\beta} d\zeta \quad [17]$$

où ${}^t \sigma_{\alpha\beta}$ représente l'accroissement du tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff entre la date t et τ mesuré à la date t . La relation entre contraintes généralisées et déformations associées peut être écrite en notation vectorielle :

$$\begin{aligned} \{ {}^t N \} &= [C_m] \{ {}^t e \} + [C_{mf}] \{ {}^t \chi \} \\ \{ {}^t M \} &= [C_{mf}]^t \{ {}^t e \} + [C_f] \{ {}^t \chi \} \end{aligned} \quad [18]$$

Les matrices $[C_m]$, $[C_f]$, $[C_{mf}]$ caractérisent les propriétés élastiques du milieu. En raison de la symétrie et de l'homogénéité du milieu, la matrice $[C_{mf}]$ s'annule. Les matrices $[C_m]$ et $[C_f]$ sont données par :

$$[C_m] = \frac{E h}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad [C_f] = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

La généralisation de ces relations à un matériau anisotrope ne pose pas de difficulté de principe.

3. Lois de comportement élastoplastique

Lorsque les niveaux de contraintes et de déformations sont élevés, le comportement d'un corps solide ne peut plus être approché par un modèle élastique linéaire classique (correspondant à la loi de Hooke généralisée) et il est nécessaire de recourir à des modèles de matériau plus élaborés. Nous limitons ce travail à l'étude des petites déformations élastoplastiques des matériaux, en admettant que la durée du processus de déformations est suffisamment petite pour que les phénomènes visco-plastiques puissent être négligés. Dans ce qui suit, nous considérons des matériaux isotropes homogènes tels que :

- les coefficients élastiques ${}^t C_{ijrs}$ restent constants au cours des chargements,
- l'effet Bauschinger est absent (le seuil de plasticité en traction est identique au seuil en compression),
- les décharges élastiques sont négligées.

3.1. Approche élastoplastique

L'étude des structures minces en élastoplasticité peut être abordée de deux manières différentes :

- en exprimant les lois de comportement ainsi que les critères de plasticité en termes de variables locales, ce qui nécessite une intégration numérique à travers l'épaisseur. Généralement le nombre de points d'intégration varie entre 5 et 10. Cette approche a été retenue pour l'étude des plaques minces par Barnard [BAR 3] qui utilise l'élément hybride de Allowood [ALL 1] avec 5

points d'intégration à travers l'épaisseur. Bergan [BER 7] propose un élément rectangulaire du type déplacement avec 11 points d'intégration et Ando [KIK 1] retient un élément triangulaire avec 20 couches à travers l'épaisseur. Pour les coques minces, Chen [CHE 1] utilise un élément triangulaire à 18 degrés de liberté avec 12 points d'intégration, Backlund [BAC 1] propose un élément triangulaire plat à 12 degrés de liberté avec 10 points d'intégration et Landau [LAN 1] prend des éléments isoparamétriques dégénérés avec un schéma d'intégration $(2 \times 2 \times 2)$. Frey [FRE 1] a analysé l'influence de la plasticité à travers l'épaisseur. Cela lui permet de prendre en compte correctement les contraintes résiduelles ainsi que les lois de comportement avec écrouissage. Cette approche a l'avantage d'être très générale et de donner de très bons résultats, mais présente l'inconvénient de la lenteur numérique et du stockage important des informations à traiter, ce qui n'est pas justifié dans le cas des structures minces.

- En exprimant les lois de comportement ainsi que les critères de plasticité en termes de variables généralisées, ce qui permet d'éviter le processus d'intégration numérique à travers l'épaisseur. Une telle approche a été retenue par Crisfield [CRI 3] et Owen [OWE 1] qui utilisent des éléments quadrilatères isoparamétriques et Eidsheim et Larsen [EID 1] qui proposent deux éléments quadrilatère et triangulaire plats. Backlund [BAC 2] propose un élément triangulaire mixte et enfin Denis [DEN 1] utilise le même élément que Owen pour l'étude des plaques circulaires.

Dans la suite, nous allons retenir cette deuxième approche.

3.2. Critère de Von Mises adapté aux plaques et coques minces

L'expression la plus courante de la surface d'écoulement pour les matériaux métalliques est celle de Von Mises (1913), ce critère a la forme suivante :

$${}^tF({}^tT_{ij}, {}^tA) = \frac{1}{2} {}^tS_{ij} {}^tS_{ij} - \frac{1}{3} {}^t\sigma_e^2 \quad [19]$$

${}^tS_{ij}$ est le tenseur déviateur des contraintes, ${}^tT_{ij}$ est la contrainte de Cauchy à la date t et ${}^t\sigma_e$ est la limite élastique à la date t en traction simple.

Ce critère est représenté par un cylindre dans l'espace des contraintes principales. Il a l'avantage de ne pas introduire une discontinuité de la normale comme dans le cas du critère de Tresca.

A partir de ce critère, formulé en variables locales, Robinson [ROB 1] et Ilyushin [ILY 1] ont proposé une adaptation pour les plaques et coques minces en le formulant en termes d'efforts généralisés (moments fléchissants et efforts normaux) :

$${}^tF = \frac{{}^t\bar{N}}{N_L^2} + \frac{{}^t\bar{M}}{M_L^2} + \frac{\text{Sign}({}^t\bar{NM})} {\sqrt{3}} \frac{{}^t\bar{NM}}{N_L M_L} - 1 = 0 \quad [20]$$

$$N_L = h\sigma_e \quad ; \quad M_L = \frac{1}{4}h^2\sigma_e$$

h est l'épaisseur de la coque. ${}^t\bar{N}$, ${}^t\bar{M}$, ${}^t\bar{NM}$ sont fonction des contraintes

généralisées, définies par :

$${}^t\bar{N} = {}^tN_{11}^2 + {}^tN_{22}^2 - {}^tN_{11}{}^tN_{22} + 3{}^tN_{12}^2 \quad [21]$$

$${}^t\bar{M} = {}^tM_{11}^2 + {}^tM_{22}^2 - {}^tM_{11}{}^tM_{22} + 3{}^tM_{12}^2 \quad [22]$$

$$\begin{aligned} {}^t\bar{NM} &= {}^tN_{11}{}^tM_{11} + {}^tN_{22}{}^tM_{22} \\ &\quad - \frac{1}{2}({}^tN_{11}{}^tM_{22} + {}^tN_{22}{}^tM_{11}) + 3{}^tN_{12}{}^tM_{12} \end{aligned} \quad [23]$$

Rappelons que l'effet des contraintes de cisaillement et des contraintes normales à la surface moyenne ${}^tT_{nn}$ est négligé.

Robinson [ROB 1] a montré que l'équation [20] est la meilleure parmi les approximations proposées qui sont linéaires dans l'espace de ${}^t\bar{N}$, ${}^t\bar{M}$, ${}^t\bar{NM}$. On note que l'équation [20] est une approximation et n'est valable que pour des situations où le moment fléchissant est dominant [CRI 4].

Crisfield [CRI 5] a montré que l'utilisation de l'équation [20] pour des structures contenant un nombre important d'éléments comprimés, donne une sur-estimation des charges de ruine. Une méthode approchée a été proposée [CRI 5] afin de tenir compte de la propagation de la plasticité à travers l'épaisseur. Cette méthode consiste à introduire la notion de courbure plastique équivalente dans le critère de plasticité. Pour cela, le terme M_L dans l'équation [20] est remplacé par ${}^t\alpha({}^t\bar{\chi}_{ps}) M_L$, où ${}^t\alpha({}^t\bar{\chi}_{ps})$ est un coefficient à déterminer.

Pour un état multiaxial, Crisfield [CRI 6] propose la relation :

$${}^t\alpha({}^t\bar{\chi}_{ps}) = 1 - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{8}{3}\sqrt{{}^t\bar{\chi}_{ps}}\right) \quad [24]$$

${}^t\bar{\chi}_{ps}$ est la courbure plastique équivalente adimensionnelle obtenue par sommation des incréments de courbure plastique équivalente :

$${}^t\bar{\chi}_{ps} = \int_0^{{}^t\bar{\chi}_{ps}} {}^t\bar{\chi}_{ps} \quad [25]$$

$${}^t\bar{\chi}_{ps} = \left(\frac{Eh}{3\sigma_e}\right) \frac{2}{\sqrt{3}} ({}^t\chi_{px}^2 + {}^t\chi_{py}^2 + {}^t\chi_{px}{}^t\chi_{py} + \frac{1}{4}{}^t\chi_{pxy}^2)^{1/2} \quad [26]$$

${}^t\chi_{px}$, ${}^t\chi_{py}$, ${}^t\chi_{pxy}$ sont les incréments de la courbure plastique à la date t .

En conséquence, le critère de plasticité a la forme :

$${}^tF = \frac{{}^t\bar{N}}{N_L^2} + \frac{{}^t\bar{M}}{{}^t\alpha^2 M_L^2} + \frac{\text{Sign}({}^t\bar{NM})}{\sqrt{3}} \frac{{}^t\bar{NM}}{{}^t\alpha N_L M_L} - 1 = 0 \quad [27]$$

Afin d'améliorer le comportement au début de la plastification, Eidsheim et Larsen [EID 1] propose l'approximation suivante :

$${}^tF = \frac{{}^t\bar{N}}{N_L^2} + \frac{{}^t\bar{M}}{{}^t\alpha^2 M_L^2} + \frac{\text{Sign}({}^t\bar{NM})}{\sqrt{3}} \frac{{}^t\bar{NM}}{{}^t\beta N_L M_L} - 1 = 0 \quad [28]$$

où le paramètre ${}^t\beta$ est donné par :

$${}^t\beta({}^t\bar{\chi}_{ps}) = 1 - (3 - \frac{1}{\sqrt{3}}) (1 - {}^t\alpha({}^t\bar{\chi}_{ps})) \quad [29]$$

3.3. Formulations élastoplastiques en variables généralisées

Un couple $({}^tN_{\alpha\beta}, {}^tM_{\alpha\beta})$ est dit plastiquement admissible lorsqu'il lui correspond au moins une distribution de contraintes ${}^tT_{ij}$ plastiquement admissibles.

Le principe de normalité et l'hypothèse de petits incréments de déformations donnent l'expression du multiplicateur plastique :

$${}^t\lambda_p = \frac{\langle F_{,m} \rangle [C_m] \{t e\} + \langle F_{,f} \rangle [C_f] \{t \chi\}}{{}^t\gamma_m + {}^t\gamma_f} \quad [30]$$

avec :

$${}^t\gamma_m = \langle F_{,m} \rangle [C_m] \{F_{,m}\}$$

$${}^t\gamma_f = \langle F_{,f} \rangle [C_f] \{F_{,f}\}$$

$$\langle F_{,m} \rangle = \langle \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tN_{11}}, \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tN_{22}}, \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tN_{12}} \rangle$$

$$\langle F_{,f} \rangle = \langle \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tM_{11}}, \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tM_{22}}, \frac{\partial {}^tF}{\partial {}^tM_{12}} \rangle$$

${}^t\lambda_p$ dépend des efforts généralisés ce qui introduit un couplage membrane-flexion dans les relations de comportement. La relation tangente élastoplastique s'écrit :

$$\{t N\} = {}^t[C_m^{ep}] \{t e\} + {}^t[C_{m,f}^{ep}] \{t \chi\} \quad [31]$$

$$\{t M\} = {}^t[C_{m,f}^{ep}]^t \{t e\} + {}^t[C_f^{ep}] \{t \chi\}$$

avec :

$${}^t[C_m^{ep}] = [C_m] - {}^t\gamma [C_m] \{F_{,m}\} \langle F_{,m} \rangle [C_m] \quad [32]$$

$${}^t[C_f^{ep}] = [C_f] - {}^t\gamma [C_f] \{F_{,f}\} \langle F_{,f} \rangle [C_f] \quad [33]$$

$${}^t[C_{m,f}^{ep}] = -{}^t\gamma [C_m] \{F_{,m}\} \langle F_{,f} \rangle [C_f] \quad [34]$$

$${}^t\gamma = \frac{1}{{}^t\gamma_m + {}^t\gamma_f}$$

4. Modélisation numérique et résolution

4.1 Discrétisation par éléments finis

Elle est effectuée sur la base d'un élément courbe triangulaire à 15 degrés de liberté. A chaque nœud sommet sont affectées 5 variables nodales, les déplacements ${}^t u$, ${}^t v$, ${}^t w$ suivant les directions ${}^t x$, ${}^t y$ et ${}^t n$ et les rotations ${}^t \theta_x$, ${}^t \theta_y$ autour des axes ${}^t x$, ${}^t y$. Des coefficients de rigidité fictifs, associés à la rotation autour de la normale, sont introduits selon la méthode proposée par [ZIE 1].

Cet élément est le résultat de la superposition d'un élément de membrane C.S.T. (*Constant Strain Triangle*) [ZIE 1] modifié par la théorie de Marguerre et d'un élément de plaque en flexion D.K.T. (*Discrete Kirchhoff Triangle*) [BAT 5].

La présence de la géométrie déformée dans le tenseur des déformations conduit au phénomène appelé dans la littérature : *blocage de membrane*. Il est levé par décomposition modale [STO 2].

La non-linéarité des lois élastoplastiques et la présence de grands déplacements nous conduisent à disposer d'une technique de résolution numérique des lois élastoplastiques en grands déplacements, elle est développée au prochain paragraphe.

4.2. Technique de résolution en sphère

Les équations différentielles d'équilibre (en utilisant un modèle de type éléments finis) sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels pour la structure entière. Le système d'équations à la date t , pour l'itération (j) , est donné par :

$${}^t [K_T]^{(j-1)} \{ {}^t q^{(j)} \} = {}^t \lambda^{(j)} \{ P \} + \{ {}^t R^{(j-1)} \} \quad [35]$$

$\text{ou } < {}^t R^{(j-1)} >$ représente le vecteur résidu d'équilibre à l'itération $(j-1)$ et ${}^t [K_T]^{(j-1)}$ la matrice tangente.

Dans certaines situations, le paramètre λ est fixé et on cherche les n composantes des déplacements $< q >$ telles que l'équilibre soit satisfait, ou alors on fixe une composante de $< q >$ et on cherche alors λ et les $n-1$ autres composantes de $< q >$. Ces deux situations sont des cas particuliers du problème général posé par la détermination automatique des courbes charge-déplacement.

Nous proposons de généraliser la technique de pilotage en longueur d'arc en imposant la norme euclidienne d'un vecteur pondéré $\{ \vec{r} \}$ défini par :

$$\{ \vec{r} \} = \left[[[a] \{q\}]^t, \sqrt{b} \lambda \right]^t \quad [36]$$

$[a]$ est une matrice carrée dont les éléments non diagonaux sont nuls, b est un scalaire arbitraire.

Cette technique appelée "*technique de pilotage en sphère pondérée*", présente l'avantage d'être très générale et de contenir les approches habituelles de pilotage [GHA 1].

Une équation supplémentaire lie le paramètre de charge λ en imposant la condition du rayon pondéré :

$${}^t\bar{S}^2 = \langle \bar{r} \rangle \{ \bar{r} \} = \langle {}^tq \rangle [a]^t [a] \{ {}^tq \} + b {}^t\lambda^2 \quad [37]$$

${}^t\bar{S}$ est une longueur fictive d'un arc dans l'espace \mathbb{R}^{n+1} .

5. Résolution des lois élastoplastiques en grands déplacements

La nature différentielle des lois élastoplastiques et la présence de non-linéarités géométriques imposent de considérer une méthode de résolution itérative.

Au cours d'un processus incrémental itératif élastoplastique, le résidu d'équilibre est calculé pour chaque itération à partir de l'état de contraintes résiduelles obtenu en faisant au début de chaque itération la différence entre les contraintes issues d'un calcul élastique (vérifiant les équations d'équilibre mais non nécessairement plastiquement admissibles) et les contraintes élastoplastiques vérifiant le comportement. Cette méthode est la plus répandue dans les codes de calcul élastoplastique sous différentes versions [NAY 1]. Elle présente l'avantage de pouvoir tenir compte du cas de plasticité parfaite.

Connaissant une configuration d'équilibre ${}^t\Gamma$ à la date t , nous cherchons la configuration ${}^{\tau}\Gamma$ très proche de ${}^t\Gamma$. Le passage est non linéaire et un processus itératif est nécessaire.

Considérons un niveau de chargement donné par ${}^t_0\lambda + \lambda^{(j)}$ correspondant à une configuration intermédiaire non équilibrée ${}^t\Gamma^{(j)}$ où (j) caractérise la procédure itérative :

- dans un premier temps, nous effectuons un calcul élastique permettant de déterminer l'accroissement du facteur de charge ${}^t\lambda^{(j)}$, l'accroissement du vecteur des variables nodales ${}^tq^{(j)}$ et par conséquent, l'incrément total des déformations généralisées,
- une fois l'accroissement des déformations généralisées déterminé, nous pouvons calculer l'accroissement des contraintes généralisées $\langle N_e^{(j)}, M_e^{(j)} \rangle$ en supposant un comportement purement élastique,
- les contraintes ainsi obtenues vérifient les équations d'équilibre, mais ne sont pas nécessairement plastiquement admissibles. Pour cela, nous effectuons un calcul élasto-plastique permettant de déterminer les contraintes vraies et les déformations plastiques.

5.1. Calcul des contraintes vraies

Au début de chaque itération, nous effectuons un calcul élastique des contraintes généralisées $\langle N_e^{(j)}, M_e^{(j)} \rangle$ à partir des déformations généralisées $\langle \epsilon^{(j)}, \chi^{(j)} \rangle$. Les équations d'équilibre sont satisfaites mais pas le critère de plasticité. Le calcul du critère $F({}^tN + N_e^{(j)}, {}^tM + M_e^{(j)})$ peut donner l'un des résultats suivants :

- $F \leq 0$: on reste dans le domaine élastique et par conséquent, le calcul

élastique de l'accroissement de contrainte $\langle N_e^{(j)}, M_e^{(j)} \rangle$ est correct ; aucune plastification ne se produit au cours de cette itération.

- $F > 0$: une plastification s'est produite au cours de cette itération, le calcul supposé élastique conduit à un état plastiquement non admissible.

Il est donc indispensable de ramener l'état de contrainte sur la surface de plasticité lorsque $F > 0$. Pour cela, une correction sur les contraintes est nécessaire et nous allons montrer comment l'effectuer sans processus itératif.

5.2. Approche Intégrale en Plasticité

Le problème posé est le suivant : dans un calcul élastoplastique, un incrément de contrainte calculé en supposant un comportement élastique doit être corrigé de façon à ce que le critère de plasticité ne soit pas violé.

5.2.1. Système différentiel élastoplastique

Considérons un niveau de chargement donné par ${}^t_0\lambda + \lambda^{(j)}$. L'accroissement de chargement est alors $\lambda^{(j)} \{P\}$. Il lui correspond un incrément de contrainte généralisée (réel) $\{ {}^tT_g \}$ tel que :

$$\{ {}^tT_g \} = {}^t[H_g]^{(j)} \left(\{ {}^t\epsilon_g \} - \{ {}^t\epsilon_g^p \} \right) \quad [38]$$

où ${}^t[H_g]^{(j)}$ représente la matrice élastique de Hooke et $\langle {}^t\epsilon_g \rangle$ l'incrément total des déformations généralisées correspondant à l'incrément des contraintes généralisées $\langle {}^tT_g \rangle$. Ils sont définis par :

$$\langle {}^t\epsilon_g \rangle = \langle {}^t\epsilon_{11}, {}^t\epsilon_{22}, 2 {}^t\epsilon_{12}, {}^t\chi_{11}, {}^t\chi_{22}, 2 {}^t\chi_{12} \rangle$$

$$\langle {}^tT_g \rangle = \langle {}^tN_{11}, {}^tN_{22}, {}^tN_{12}, {}^tM_{11}, {}^tM_{22}, {}^tM_{12} \rangle$$

$\langle {}^t\epsilon_g^p \rangle$ représente l'incrément total de déformation plastique donné par :

$$\langle {}^t\epsilon_g^p \rangle = \langle {}^t\epsilon_g \rangle - \langle {}^t\epsilon_g^e \rangle$$

où $\langle {}^t\epsilon_g^e \rangle$ est la partie élastique de l'accroissement de déformation.

Notons $\langle {}^t\tilde{T}_g \rangle$ l'incrément total de contrainte généralisée dans une évolution purement élastique :

$$\{ {}^t\tilde{T}_g \} = {}^t[H_g]^{(j)} \{ {}^t\epsilon_g \} \quad [39]$$

Il vient ainsi :

$$\{ {}^tT_g \} = \{ {}^t\tilde{T}_g \} - {}^t[H_g]^{(j)} \{ {}^t\epsilon_g^p \} \quad [40]$$

La loi de normalité relie la déformation plastique, l'état de contrainte ${}^tT_{\alpha\beta}$, le critère de plasticité $F({}^tT_{\alpha\beta}, {}^tA)$ et les paramètres de l'écroissage tA :

$$\{ {}^t \epsilon_g^p \} = {}^t \eta \frac{\partial {}^t F}{\partial \{ {}^t T_g \}} \quad [41]$$

Soit :

$$\frac{\{ {}^t T_g \}}{{}^t \eta} = \frac{\{ {}^t \tilde{T}_g \}}{{}^t \eta} - {}^t [H_g]^{(j)} \frac{\partial {}^t F}{\partial \{ {}^t T_g \}} \quad [42]$$

Cette relation n'a de sens que si ${}^t \eta$ existe, ce qui implique une évolution dans le domaine plastique. Pour la résoudre, l'hypothèse suivante est posée : la quantité $\frac{\{ {}^t \tilde{T}_g \}}{{}^t \eta}$ est constante pendant un pas de calcul suffisamment petit. Cela revient à supposer que la variation purement élastique des contraintes est linéairement répartie sur le pas de chargement, ce qui permet de considérer $\frac{\{ {}^t \tilde{T}_g \}}{{}^t \eta}$ comme une constante pour intégrer l'équation d'évolution des contraintes :

$$\frac{\{ {}^t \tilde{T}_g \}}{{}^t \eta} \approx \text{cste} = \frac{\{ \Delta \tilde{T}_g \}}{\Delta \eta}$$

Au cours des itérations, le pas de calcul visant à redistribuer le déséquilibre tend vers zéro.

Le vecteur gradient $\frac{\partial {}^t F}{\partial \{ {}^t T_g \}}$ peut être écrit sous la forme :

$$\frac{\partial {}^t F}{\partial \{ {}^t T_g \}} = {}^t [M] \{ {}^t T_g \}$$

${}^t [M]$ est une matrice dépendant du critère de plasticité.

En remplaçant l'accroissement par sa différentielle, la relation [42] peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d\{ T_g \}}{d\eta} = \frac{\{ \Delta \tilde{T}_g \}}{\Delta \eta} - {}^t [W] \{ {}^t T_g \} \quad [43]$$

$$\text{avec : } {}^t [W] = {}^t [H_g]^{(j)} {}^t [M]$$

La solution à trouver est le coefficient ${}^t \eta > 0$ dans un incrément **fini**, et l'accroissement de contrainte $\{ {}^t T_g \}$. La relation [43] représente 6 équations différentielles couplées par la matrice ${}^t [W]$. Afin de les découpler, on se place dans la base propre de la matrice dont les valeurs propres sont ${}^t \mu_i$ et les vecteurs propres : ${}^t \vec{V}_i$. Nous construisons ensuite les matrices ${}^t [\Psi]$ et ${}^t [\Phi]$ telles que :

$${}^t [\Phi] {}^t [W] {}^t [\Phi] = {}^t [\Psi] \quad [44]$$

${}^t [\Psi]$ est une matrice carrée dont les éléments non diagonaux sont nuls, elle est donnée par :

$${}^t[\Psi] = \begin{bmatrix} {}^t\mu_1 & & & & & \\ & {}^t\mu_2 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & {}^t\mu_6 \end{bmatrix} \tag{45}$$

${}^t[\Phi]$ est une matrice carrée contenant les vecteurs propres de ${}^t[W]$, elle est donnée par :

$${}^t[\Phi] = \left[{}^t\vec{V}_1, {}^t\vec{V}_2, \dots, {}^t\vec{V}_6 \right] \tag{46}$$

Le changement de base s'écrit :

$$\{T_g\} = [\Phi] \{X\} \tag{47}$$

d'où :

$$\begin{aligned} {}^t[\Phi]{}^t \frac{d\{T_g\}}{d\eta} &= {}^t[\Phi]{}^t \frac{\{\Delta\tilde{T}_g\}}{\Delta\eta} - {}^t[\Phi]{}^t {}^t[W] {}^t[\Phi] \{X\} \\ \frac{d\{X\}}{d\eta} &= \frac{\{\Delta\tilde{X}\}}{\Delta\eta} - {}^t[\Psi] \{X\} \end{aligned} \tag{48}$$

Cette relation représente les 6 équations découplées :

$$\frac{dx_i}{d\eta} = \frac{\Delta\tilde{x}_i}{\Delta\eta} - \mu_i x_i \quad , \quad i = 1 \text{ à } 6 \tag{49}$$

Limitation de la méthode

Le découplage du système [43] dépend de la nature de la matrice ${}^t[W]$. Ce découplage demande de trouver 6 vecteurs propres linéairement indépendants, ce qui implique que la matrice ${}^t[W]$ doit être diagonalisable. La possibilité de diagonalisation est vérifiée pour le critère retenu.

5.2.2. Résolution du système différentiel elastoplastique

La solution d'une équation du type :

$$\frac{dx_i}{d\eta} = \frac{\Delta\tilde{x}_i}{\Delta\eta} - \mu_i x_i$$

est donnée par :

$$x_i(\eta) = c \exp(-\mu_i \eta) + \frac{1}{\mu_i} \frac{\Delta\tilde{x}_i}{\Delta\eta} \tag{50}$$

La constante c est déterminée par les conditions initiales au début du pas de chargement.

Si $\eta = \eta_0 \Rightarrow x_i = x_{i0}$ ce qui donne :

$$x_i(\eta) = \left(x_{i0} - \frac{1}{\mu_i} \frac{\Delta \tilde{x}_i}{\Delta \eta} \right) \exp(\mu_i(\eta_0 - \eta)) + \frac{1}{\mu_i} \frac{\Delta \tilde{x}_i}{\Delta \eta}$$

A la fin du pas de chargement, nous avons : $\eta = \eta_0 + \Delta \eta$ ce qui donne :

$$x_i(\eta) = \left(x_{i0} - \frac{1}{\mu_i} \frac{\Delta \tilde{x}_i}{\Delta \eta} \right) \exp(-\mu_i \Delta \eta) + \frac{1}{\mu_i} \frac{\Delta \tilde{x}_i}{\Delta \eta}$$

Cette relation nécessite de connaître $\Delta \eta$. Pour cela, on écrit que le critère de plasticité est satisfait :

$$F(T_g, A) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(\{\Phi\} \{X\}, \alpha) = 0$$

Cette relation est une équation non linéaire en $\Delta \eta$. La présence de μ_i au dénominateur peut créer des difficultés dans le cas où la valeur est nulle. Pour éviter celles-ci, x_i est développé au premier ordre en $\Delta \eta$ car les pas sont petits :

$$x_i(\eta) = \left(x_{i0} - \frac{1}{\mu_i} \frac{\Delta \tilde{x}_i}{\Delta \eta} \right) \left[1 - \mu_i \Delta \eta + \frac{1}{2} (\mu_i \Delta \eta)^2 \right] + \frac{1}{\mu_i} \frac{\Delta \tilde{x}_i}{\Delta \eta} \quad [51]$$

Pour résoudre cette équation, nous l'écrivons à la date τ sous forme matricielle :

$$\{^{\tau}X\} = \{^tX\} + \{^t\tilde{X}\} - {}^{\tau}[\Psi] \left(\{^tX\} + \frac{1}{2} \{^t\tilde{X}\} \right) {}_t\eta \quad [52]$$

Utilisons la transformation donnée par :

$$\{X\} = [\Phi]^t \{T_g\}$$

La relation précédente peut être écrite sous la forme suivante :

$${}^{\tau}[\Phi]^t \{^{\tau}T_g\} = {}^t[\Phi]^t \{^tT_g\} + {}^t[\Phi]^t \{^t\tilde{T}_g\} - {}^{\tau}[\Psi] {}^t[\Phi]^t \left(\{^tT_g\} + \frac{1}{2} \{^t\tilde{T}_g\} \right) {}_t\eta$$

Les pas de chargement sont petits, nous considérons l'approximation suivante :

$${}^{\tau}[\Phi] \approx {}^t[\Phi]$$

Sachant que :

$${}^t[\Phi]^t {}^t[\Phi] = {}^t[\Phi] {}^t[\Phi]^t = [I]$$

$${}^t[\Phi] {}^t[\Psi] {}^t[\Phi]^t = {}^t[W]$$

L'équation [52] peut être écrite sous la forme :

$$\{{}^\tau T_g\} = \{{}^t T_g\} + \{{}^t \tilde{T}_g\} - {}^t[W] \left(\{{}^t T_g\} + \frac{1}{2} \{{}^t \tilde{T}_g\} \right) \iota \eta \quad [53]$$

Cette relation donne la valeur des contraintes généralisées à la date τ en fonction du multiplicateur plastique $\iota \eta$.

Durant l'écoulement plastique, nous avons : ${}^t F = 0$

$${}^t F = {}^\tau F - {}^t F$$

La valeur du critère de plasticité ${}^t F$ à la date t peut donner l'un des résultats suivants :

- ${}^t F = 0 \implies$ Phase entièrement plastique.
- ${}^t F < 0 \implies$ Phase élastoplastique.

• **Phase entièrement plastique :**

L'accroissement de contrainte vraie pour lequel on reste dans le domaine élastique est nul et l'incrément de contrainte $\langle {}^t \tilde{T}_g \rangle$ fournit l'incrément des déformations plastiques (figure 2). Afin de vérifier le comportement nous devons ramener $\langle {}^t \tilde{T}_g \rangle$ sur la surface d'écoulement en permettant l'apparition des déformations plastiques.

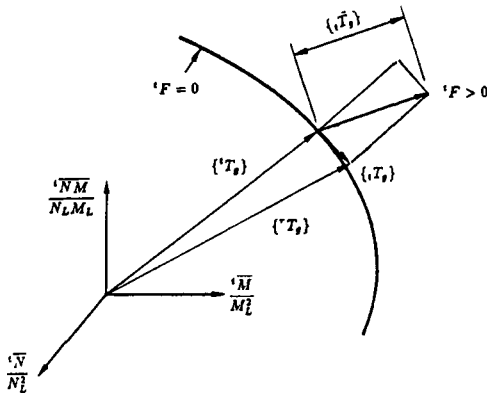


Figure 2 : Etape entièrement plastique

Sachant que ${}^t F = 0$, nous pouvons écrire :

$${}^\tau F (\{{}^\tau T_g\} , {}^\tau A) = 0$$

Développons cette relation non linéaire en ${}^t\eta$:

$$A + B {}^t\eta + C {}^t\eta^2 = 0 \tag{54}$$

L'accroissement de contrainte vraie est alors :

$$\{{}^tT_g\} = \{{}^t\tilde{T}_g\} - {}^t[W] \left(\{{}^tT_g\} + \frac{1}{2} \{{}^t\tilde{T}_g\} \right) {}^t\eta \tag{55}$$

Les déformations plastiques sont données par :

$$\{{}^t\epsilon_g^p\} = {}^t\eta \frac{\partial {}^tF}{\partial \{{}^tT_g\}}$$

● **Phase élastoplastique :**

Cette phase consiste à faire passer un point du domaine élastique au domaine plastique. L'état de contrainte en un point à la date t est donné par :

$${}^tF (\{{}^tT_g\} , {}^tA) < 0$$

L'accroissement de chargement fournit, en réponse élastique, un accroissement de contrainte $\langle {}^t\tilde{T}_g \rangle$ tel que (figure 3) :

$${}^tF (\{{}^tT_g\} + \{{}^t\tilde{T}_g\} , {}^tA) > 0$$

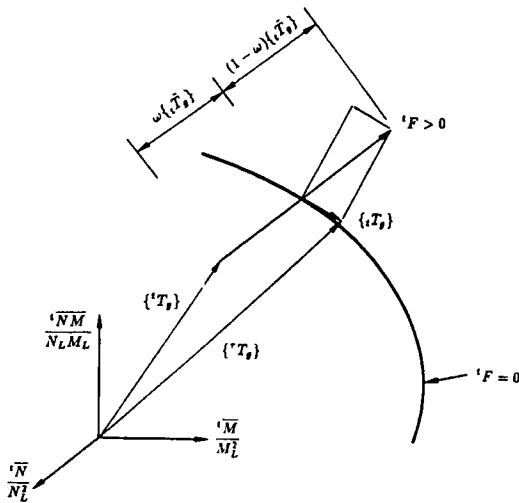


Figure 3 : Etape élastoplastique

Nous cherchons un scalaire ω tel que :

$${}^r F (\{ {}^t T_g \} + \omega \{ {}_t \tilde{T}_g \} , {}^r A) = 0$$

Cette équation du second degré permet de trouver la valeur de ω et l'accroissement de contrainte vraie pour lequel on reste dans le domaine élastique est donné par : $\omega \{ {}_t \tilde{T}_g \}$. Le calcul de ω nous ramène sur la surface de plasticité. Ainsi, nous devons ramener $(1 - \omega) \{ {}_t \tilde{T}_g \}$ sur la surface de plasticité en permettant l'apparition des déformations plastiques. La contrainte vraie à la date τ est alors donnée par :

$$\{ {}^r T_g \} = \{ {}^t T_g \} + \{ {}_t \tilde{T}_g \} - {}^t [W] (\{ {}^t T_g \} + \omega \{ {}_t \tilde{T}_g \} + \frac{1}{2} (1 - \omega) \{ {}_t \tilde{T}_g \}) \, {}_t \eta$$

ou bien :

$$\{ {}^r T_g \} = \{ {}^t T_g \} + \{ {}_t \tilde{T}_g \} - {}^t [W] (\{ {}^t T_g \} + \frac{(1 + \omega)}{2} \{ {}_t \tilde{T}_g \}) \, {}_t \eta$$

Reportons cette valeur dans le critère de plasticité, il vient :

$${}^r F (\{ {}^r T_g \} , {}^r A) = 0$$

Cette équation du second degré donne la valeur de ${}_t \eta$. L'accroissement de contrainte vraie est alors :

$$\{ {}_t T_g \} = \{ {}^r T_g \} - \{ {}^t T_g \} - \omega \{ {}_t \tilde{T}_g \}$$

ou bien :

$$\{ {}_t T_g \} = (1 - \omega) \{ {}_t \tilde{T}_g \} - {}^t [W] (\{ {}^t T_g \} + \frac{(1 + \omega)}{2} \{ {}_t \tilde{T}_g \}) \, {}_t \eta \quad [56]$$

5.2.3. Relations de la phase élastoplastique

La phase élastoplastique est caractérisée par le gradient de la fonction de plasticité. Dans le cas du critère d'Eidsheim et Larsen, on trouve facilement les composantes de la matrice ${}^t [M]$ à partir de [28] :

$${}^t[M] = \begin{bmatrix} \frac{2}{N_L^2} & -\frac{1}{N_L^2} & 0 & \frac{s}{{}^t k} & -\frac{s}{2{}^t k} & 0 \\ & \frac{2}{N_L^2} & 0 & -\frac{s}{2{}^t k} & \frac{s}{{}^t k} & 0 \\ & & \frac{6}{N_L^2} & 0 & 0 & \frac{3s}{{}^t k} \\ & & & \frac{2}{{}^t \alpha^2 M_L^2} & -\frac{1}{{}^t \alpha^2 M_L^2} & 0 \\ & & & & \frac{2}{{}^t \alpha^2 M_L^2} & 0 \\ & & \text{Sym.} & & & \frac{6}{{}^t \alpha^2 M_L^2} \end{bmatrix}$$

avec :

$$s = \text{Sign} ({}^t \overline{NM}) \quad {}^t k = \sqrt{3} {}^t \beta N_L M_L$$

La matrice ${}^t[W]$ (équation [43]), caractérisant la phase élastoplastique, est alors :

$${}^t[W] = \begin{bmatrix} {}^t a_1 & {}^t b_1 & 0 & {}^t c_1 & {}^t d_1 & 0 \\ {}^t a_2 & {}^t b_2 & 0 & {}^t c_2 & {}^t d_2 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t a_3 & 0 & 0 & {}^t b_3 \\ {}^t a_4 & {}^t b_4 & 0 & {}^t c_4 & {}^t d_4 & 0 \\ {}^t a_5 & {}^t b_5 & 0 & {}^t c_5 & {}^t d_5 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t a_6 & 0 & 0 & {}^t b_6 \end{bmatrix}$$

avec :

$${}^t a_1 = {}^t b_2 = k_m (2 - \nu) \quad {}^t c_1 = {}^t d_2 = {}^t k_{mf} (2 - \nu)$$

$${}^t a_2 = {}^t b_1 = k_m (2\nu - 1) \quad {}^t c_2 = {}^t d_1 = {}^t k_{mf} (2\nu - 1)$$

$${}^t a_4 = {}^t b_5 = {}^t k_{fm} (2 - \nu) \quad {}^t c_4 = {}^t d_5 = {}^t k_f (2 - \nu)$$

$${}^t a_5 = {}^t b_4 = {}^t k_{fm} (2\nu - 1) \quad {}^t c_5 = {}^t d_4 = {}^t k_f (2\nu - 1)$$

$${}^t a_3 = 3 k_m (1 - \nu) \quad {}^t b_3 = 3 {}^t k_{mf} (1 - \nu)$$

$${}^t a_6 = 3 {}^t k_{fm} (1 - \nu) \quad {}^t b_6 = 3 {}^t k_f (1 - \nu)$$

$$k_m = \frac{E h}{N_L^2 (1 - \nu^2)} \quad {}^t k_{mf} = \frac{s E h}{2 \sqrt{3} {}^t \beta N_L M_L (1 - \nu^2)}$$

$${}^t k_f = \frac{E h^3}{12 {}^t \alpha^2 M_L^2 (1 - \nu^2)} \quad {}^t k_{fm} = \frac{s E h^3}{24 \sqrt{3} {}^t \beta N_L M_L (1 - \nu^2)}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de ${}^t[W]$ sont ensuite obtenus. L'accroissement du multiplicateur plastique ${}^t \eta$ est déterminé en résolvant l'équation [54] dans laquelle les coefficients A , B , C sont calculés en écrivant que la fonction de plasticité à la date τ est satisfaite :

$${}^\tau F (\{ {}^\tau T_g \} , {}^\tau A) = 0$$

6. Validation du modèle

Nous présentons dans ce paragraphe la validation de notre modèle. Le modèle mécanique à double non-linéarité géométrique et matérielle est testé à travers quelques applications tirées de la littérature. Trois types de comportement sont présentés :

- comportement élastique en déplacements modérés,
- comportement élastoplastique en petits déplacements,
- comportement élastoplastique en déplacements modérés.

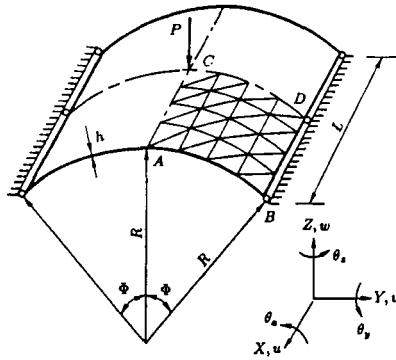
Les exemples choisis ont été traités par d'autres chercheurs, par d'autres méthodes et d'autres éléments finis, afin de permettre la comparaison. La particularité de ces exemples réside dans leurs comportements très variés permettant le traitement de situations non linéaires très sévères. La détermination automatique de toute la réponse a été possible par le pilotage proposé au paragraphe 4.2. Les résultats que nous obtenons avec notre modèle sont comparés à des résultats analytiques ou numériques tirés de la littérature.

6.1. Claquement d'une coque cylindrique

Il s'agit d'une coque cylindrique mince articulée sur deux génératrices, libre sur les deux autres bords et chargée d'une force concentrée en son centre (figure 4). Ce problème est très fréquemment utilisé et constitue un test classique pour la validation d'éléments de coques.

En supposant le claquement symétrique, nous analysons un quart de coque. Deux cas sont considérés :

- un premier cas avec une coque d'épaisseur $h = 12,7$ mm,
- un second cas avec une épaisseur réduite de moitié $h = 6,35$ mm.



Données géométriques :

$$R = 2540 \text{ mm}$$

$$L = 508 \text{ mm}$$

$$\Phi = 0,1 \text{ rad}$$

épaisseur :

$$1^{\text{er}} \text{ cas} : h = 12,7 \text{ mm}$$

Données mécaniques :

$$E = 3,10275 \text{ kN/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$2^{\text{eme}} \text{ cas} : h = 6,35 \text{ mm}$$

Modélisation du quart ABCD

Conditions aux limites :

$$u = v = w = \theta_y = 0 \quad \text{le long de } BD$$

Conditions de symétrie :

$$v = \theta_x = 0 \quad \text{le long de } AC$$

$$u = \theta_y = 0 \quad \text{le long de } CD$$

Figure 4 : Coque cylindrique - Données et maillage

La discrétisation du quart de la coque est réalisée avec deux découpages : 4×4 et 5×5 .

Les conditions aux limites de rotation sont exprimées en repère global, alors qu'une représentation exacte devrait introduire une relation entre θ_y et θ_z . Cette approximation ne nous a pas semblé entraîner d'erreur importante, la coque étant surbaissée.

Sur les figures 5 et 6, nous présentons l'évolution de la flèche au centre ainsi que celle de la flèche au bord libre, en fonction de la charge, pour les deux découpages et pour les deux épaisseurs.

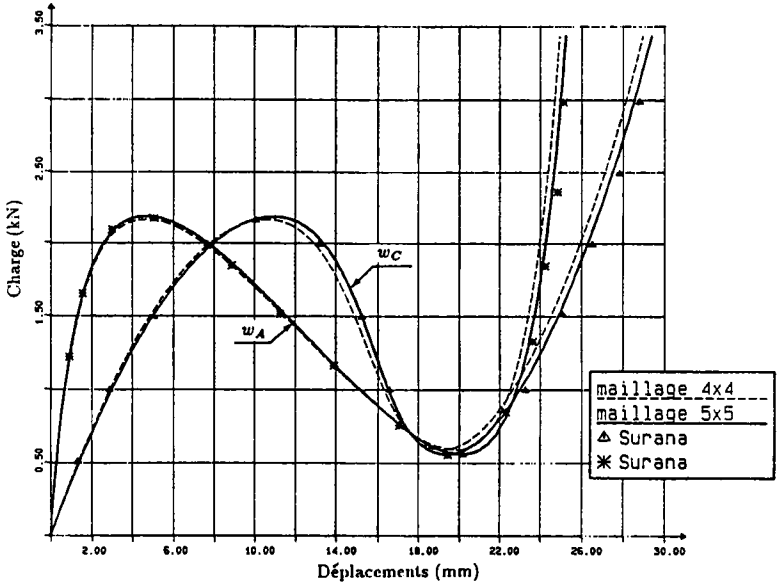


Figure 5 : Coque cylindrique avec charge concentrée
Déplacements au centre et au bord $h = 12,7 \text{ mm}$

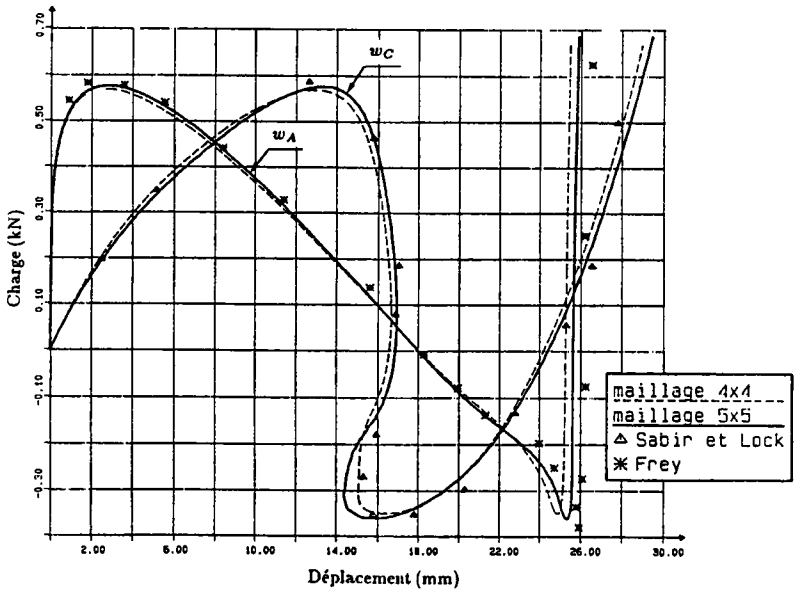
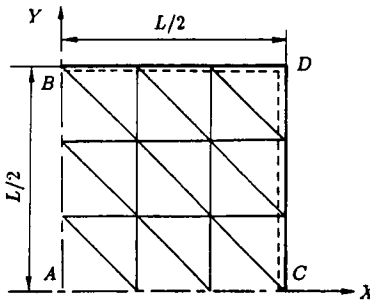


Figure 6 : Coque cylindrique avec charge concentrée
Déplacements au centre et au bord $h = 6.35 \text{ mm}$

Nos résultats sont comparés à ceux de Sabir et Lock [SAB 1], Frey [FRE 1] et Surana [SUR 3]. Une bonne concordance est à noter, même si elle est moins satisfaisante dans la zone particulièrement délicate où le déplacement et la charge décroissent simultanément (*back snap-through*).

6.2. Plaque carrée simplement supportée – charge uniforme répartie

Le comportement élastoplastique, dans le domaine des petits déplacements, d'une plaque carrée simplement supportée soumise à une charge verticale uniformément répartie, est étudié. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure 7.



Données (en supposant un système d'unités cohérent) :

$$L = 1$$

$$\sigma_e = 1600$$

$$h = 0,01$$

$$E = 10,92$$

$$N_p = 16$$

$$\nu = 0,3$$

$$M_p = 0,04$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Conditions aux limites :

$$w = \theta_x = 0 \quad \text{le long de } CD$$

$$w = \theta_y = 0 \quad \text{le long de } BD$$

Conditions de symétrie :

$$v = \theta_x = 0 \quad \text{le long de } AC$$

$$u = \theta_y = 0 \quad \text{le long de } AB$$

Figure 7 : Plaque carrée simplement supportée – Données et maillage

En raison de la double symétrie le quart de la plaque est discrétisé avec deux découpages : 2x2 et 3x3.

Sur la figure 8 nous présentons l'évolution du déplacement normal du point situé au centre de la plaque, sous forme adimensionnelle $w_A^* = \frac{D}{M_p L^2} w_A$, en fonction de l'intensité de la charge uniforme q (par unité de surface), sous forme adimensionnelle $\rho = \frac{L^2}{M_p} q$.

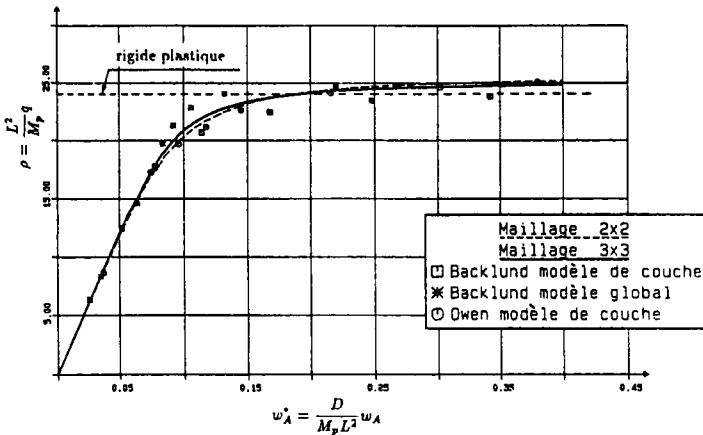


Figure 8 : Plaque carrée simplement supportée - charge répartie
Déplacement normal au centre

La figure 9 présente la propagation des zones plastiques à travers l'épaisseur pour différents niveaux de chargement. La cote traduit l'évolution du paramètre α donné par [24]. Il simule la pénétration de la plasticité à travers l'épaisseur.

Cette plaque a été étudiée par Bergan [BER 7] avec un élément rectangulaire à 20 degrés de liberté et 11 points d'intégration à travers l'épaisseur. Ando [KIK 1] utilise un élément triangulaire avec 20 couches. Nous avons comparé nos résultats avec ceux de Owen [OWE 1] qui utilise un élément "heterosis" à 9 nœuds et divise l'épaisseur en plusieurs couches. Backlund [BAC 1] utilise un élément triangulaire à 12 degrés de liberté avec 10 couches à travers l'épaisseur ainsi qu'une formulation globale.

Les maillages très limités que nous avons utilisés et la modélisation en variables globales, conduisent à des résultats très proches du modèle multicouche de Owen, particulièrement dans la zone où la réponse est conditionnée par la pénétration de la plastification dans l'épaisseur.

A titre de comparaison, le modèle rigide plastique parfait donne un coefficient de chargement limite $\rho = 24$ qui est inférieur de 4% au résultat obtenu en comportement asymptotique.

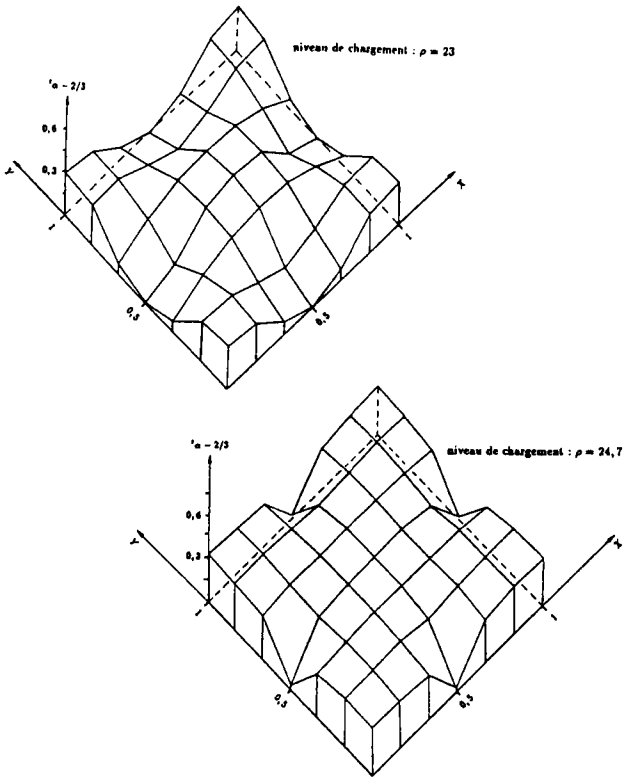


Figure 9 : Plaque carrée simplement supportée - charge répartie
Evolution des zones plastiques

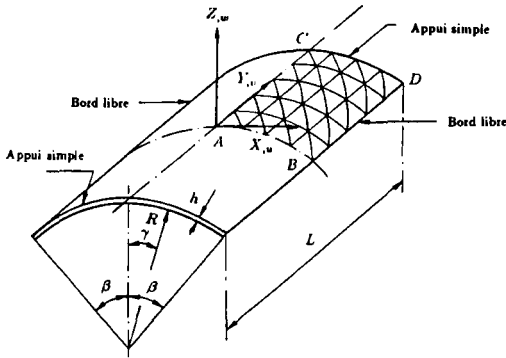
6.3. Comportement élastoplastique d'un panneau cylindrique

L'analyse élastoplastique, dans le domaine des petits et des grands déplacements, du panneau cylindrique décrit sur la figure 10, présente un intérêt particulier car ce problème a été étudié par plusieurs auteurs afin de tester le comportement des éléments de coques.

Il s'agit d'une coque cylindrique, soumise à une charge de gravité répartie uniformément par unité de surface. La coque est totalement libre sur les côtés rectilignes, les bords courbes reposent sur deux diaphragmes rigides. Le matériau est considéré élastique parfaitement plastique.

Vu la double symétrie, un quart de la coque est discrétisé par deux maillages : 4x5 (4 sur le côté courbe) et 6x8 (6 sur le côté courbe).

Sur les figures 11 et 12, nous présentons l'évolution de la flèche w_B au milieu du bord libre en fonction de l'intensité du chargement. La figure 13 concerne l'évolution des zones plastiques à travers l'épaisseur pour différentes valeurs de chargement.



$L = 15200 \text{ mm}$
 $R = 7600 \text{ mm}$
 $h = 76 \text{ mm}$
 $\beta = 40 \text{ degrés}$

$\sigma_e = 4,1 \text{ MPa}$
 $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
 $\nu = 0,$

Conditions aux limites :

$u = w = \theta_y = 0$ le long de CD

Conditions de symétrie :

$v = \theta_x = 0$ le long de AB

$u = \theta_y = 0$ le long de AC

Figure 10 : Coque cylindrique - Données et maillage

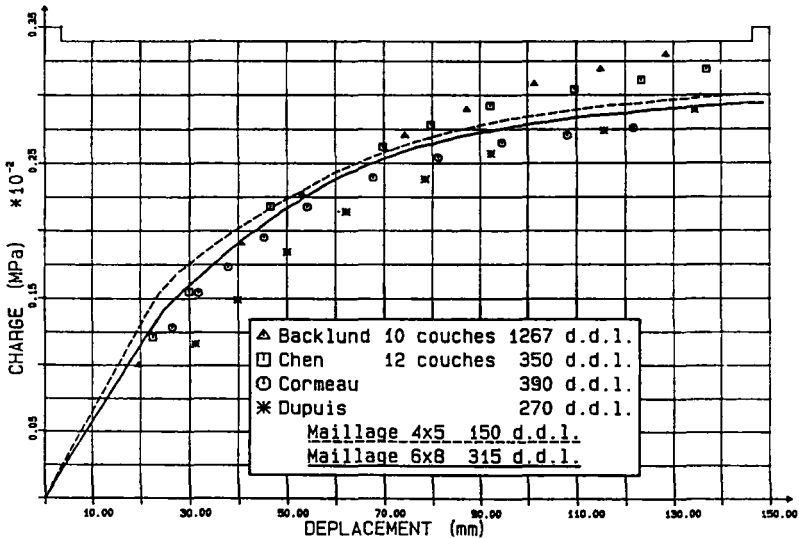


Figure 11 : Coque cylindrique - charge répartie
Déplacement normal au milieu du bord libre (petits déplacements)

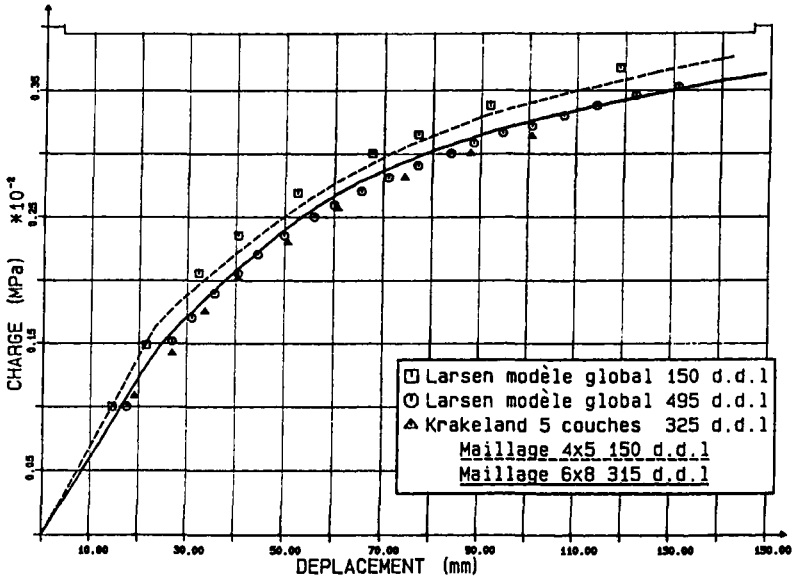


Figure 12 : Coque cylindrique - charge répartie
Déplacement normal au milieu du bord libre (grands déplacements)

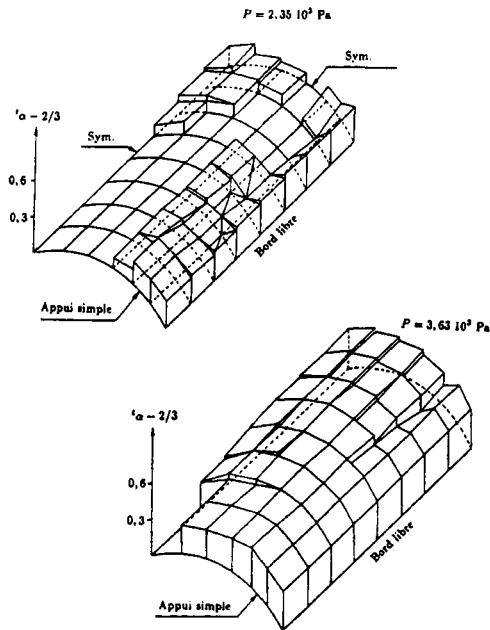


Figure 13 : Coque cylindrique - charge répartie
Evolution des zones plastiques (grands déplacements)

Nous comparons nos résultats avec ceux présentés par Backlund [BAC 1] qui utilise un élément triangulaire plat à 12 degrés de liberté avec 10 points d'intégration à travers l'épaisseur pour un maillage 12x16 ; avec ceux de Chen [CHE 1] qui utilise un élément triangulaire à 18 degrés de liberté avec 12 points d'intégration à travers l'épaisseur pour un maillage 6x9. Nos résultats sont également comparés avec ceux de Cormeau [COR 2] et Dupuis [DUP 6] et ceux de Eidsheim et Larsen [EID 1] qui ont discrétisé cette structure par 40 et 160 éléments triangulaires à 15 degrés de liberté. La plasticité est introduite par l'intermédiaire d'un paramètre permettant de suivre sa propagation à travers l'épaisseur. Krakeland [KRA 2] utilise un élément isoparamétrique quadrilatère à 8 nœuds et 5 points d'intégration à travers l'épaisseur pour un maillage 4x4.

La rigidification apportée par les grands déplacements est confirmée par les résultats de [EID 1].

Comme cela est bien connu dans le comportement des voiles cylindriques, les efforts sont transmis par un développement des efforts normaux et par la traction des rives en bords libres qui plastifient les premières.

Nous constatons que les résultats obtenus avec notre élément de coque sont très comparables aux résultats de référence, bien que le nombre de points de calcul considérés avec notre élément soit environ 10 fois moindre que dans les autres modèles.

7. Conclusion

Nous avons présenté la formulation, par éléments finis en théorie de *Marquerre*, d'un modèle mécanique permettant l'analyse de structures minces de types arcs, plaques et coques en tenant compte des non-linéarités géométriques combinées aux non linéarités matérielles dues à la plasticité.

Le comportement élastoplastique est représenté par un critère exprimé en variables généralisées. Une telle approche prend en compte, de façon correcte, la plastification initiale en un point d'une section et son évolution à travers celle-ci jusqu'à la plastification complète, et ceci quel que soit le couple ($\{^t N\}$, $\{^t M\}$).

Le choix de la théorie de *Marquerre* associée à la description Lagrangienne actualisée approchée du mouvement du corps, l'adoption d'un critère de plasticité exprimé en variables généralisées, conduisent à des performances qui peuvent être résumées dans les points suivants :

- le calcul est fait en coordonnées cartésiennes, ce qui donne une facilité de mise en œuvre intéressante,
- la prise en compte de la géométrie déformée dans le tenseur des déformations permet une représentation correcte de la géométrie courbe à un instant t . Cet avantage est plus important en calcul non linéaire qu'en calcul linéaire car la géométrie déformée est plus complexe qu'une géométrie initiale,
- la prise en compte de l'apparition progressive de la plasticité à travers l'épaisseur, par l'intermédiaire de paramètres faisant intervenir la courbure plastique équivalente, permet d'éviter le processus d'intégration numérique à travers l'épaisseur ainsi que le stockage de nombreuses informations à traiter,

• le calcul de l'accroissement de contrainte vraie par l'approche intégrale, à partir d'une formule simple, permet d'éviter un processus d'itérations, ce qui réduit le temps de calcul.

Les résultats présentés dans ce texte et d'autres essais numériques [GHA 1], ont démontré la fiabilité de la formulation et son efficacité.

En effet, ils l'ont été avec des maillages beaucoup plus réduits que ceux des exemples de référence, pour des valeurs obtenues tout à fait comparables. De plus, le modèle évitant tout à la fois l'intégration selon l'épaisseur par de nombreuses couches et les itérations internes de redistribution de la plasticité, le volume des calculs devrait être diminué.

L'approche globale associée à la théorie de Marguerre conduit à un outil numérique à la fois *simple* dans sa mise au point, *efficace* dans son utilisation et *fiable* dans son application. Combinée avec la méthode de résolution de Newton-Raphson, associée au contrôle en sphère de rayon pondéré, cette approche s'avère très robuste. En effet, la détermination de toute la réponse d'une structure à comportement non linéaire élastoplastique et le parcours des zones d'instabilités, où des points limites en charges ou en déplacements sont rencontrés, ont été effectués automatiquement par l'algorithme. La notion de rayon pondéré devrait maintenant permettre une optimisation du calcul non linéaire.

Le couplage de la théorie de Marguerre pour l'actualisation de la géométrie et du critère de Eidsheim et Larsen pour la modélisation de la plastification progressive, rendu possible tout en évitant les itérations internes, conduit à une modélisation performante avec un nombre réduit d'éléments.

8. Bibliographie

- [ALL 1] Allowood R.J. , Cornes G.M. - "A polygonal finite element for plate bending problems using the Assumed Stress Approach", *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, vol 1, 1969
- [BAC 1] Backlund J., Wennerstorm H. - "Finite element analysis of elastic-plastic shells", *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, vol 8, 1974
- [BAC 2] Backlund J. - Finite element analysis of nonlinear structures, Dr. thesis, Department of Structural Mechanics, Chalsneir Institut of Technology, Gothenburg, 1973
- [BAR 3] Barnard A.J. , Sharman P.W. - "The elasto-plastic analysis of plates using hybrid finite elements", *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, vol 10, 1976
- [BAT 4] Bathe K.J. , Ramm E. , Wilson E.L. - "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis", *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, vol 9, 1975
- [BAT 5] Batoz J.L., Bathe K.J., Ho L.W. - "A study of three-node triangular plate bending elements", *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, vol 15, 1980
- [BAT 6] Batoz J.L., Dhatt G.S. - *Modélisation des structures par éléments finis*, tome 2, Poutres et Plaques, Ed. Hermès, 1991
- [BER 7] Bergan P.G. , Clough R.W. - Elasto-plastic analysis of plates using the finite element method, 3rd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Ohio, U.S.A., 1971

- [CHE 1] Chen K.K. - "A triangular plate finite element for large displacement elastic-plastic analysis of automobile structural components", *Computers and Structures*, vol 10, 1979
- [COR 2] Cormeau I. - "Elasto-plastic thick shell analysis by visco-plastic solid finite elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 12, 1978
- [CRI 3] Crisfield M.A., Puthli R.S. - Approximation in the nonlinear analysis of thin plate structures, Int. Conf. on Finite Element in Nonlinear Solid and Structural Mechanics, Norway, 1977
- [CRI 4] Crisfield M.A. - Some approximations in the nonlinear analysis of rectangular plates using finite elements, TRRL Supplementary Report 51 UC, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, Berkshire, 1974
- [CRI 5] Crisfield M.A. - Finite element analysis for combined materials and geometric nonlinearities, Europe - U.S. Workshop : Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Bochum, Germany, 1981
- [CRI 6] Crisfield M.A. - On an approximate yield criterion for thin shells, TRRL Report LR 658, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, Berkshire, 1974
- [DEN 1] Denis L.M.S., Owen D.R.J. - "Elastic-visco-plastic analysis of plates by the finite element method", *Computers and Structures*, vol 8, 1977
- [DEV 2] De Ville de Goyet V. - L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique, thèse de doctorat, université de Liège, 1988 - 1989
- [DEV 3] De Ville de Goyet, Frey F. - Use of Marguerre theory in the nonlinear analysis of beam and plate structures, Proceedings of the Fourth World Congress, Switzerland, 1984
- [DHA 4] Dhatt G.S., Touzot G. - *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Ed. Maloine, Compiègne, 1984
- [DJE 5] Djeghaba K. - Contribution à l'analyse non linéaire géométrique des coques minces en théorie de Marguerre, thèse de doctorat, I.N.S.A. de Lyon, 1990
- [DUP 6] Dupuis G.A., Hibbet H.D., McNamara S.F. and Marcal P.V. - "Nonlinear material and geometric behaviour of shell structures", *Comp. and Struct.*, vol 1, 1971
- [EID 1] Eidsheim O.M., Larsen P.K. - "Nonlinear analysis of elastic-plastic shells by hybrid stress finite elements", *Computer Meth. in Applied Mech. and Eng.*, vol 34, 1982
- [ELK 2] El - Khaldi F. - Contribution au traitement des phénomènes de blocage de membrane et cisaillement dans la modélisation des arcs et des coques minces en théorie de Marguerre, thèse de doctorat, I.N.S.A. Lyon, 1987
- [FRE 1] Frey F. - L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique, thèse de doctorat, université de Liège, 1977 - 1978
- [GHA 1] Ghazlan G. - Modélisation non linéaire matérielle et géométrique des coques minces, thèse de doctorat, université Blaise Pascal, Clermont II, 1991
- [ILY 1] Ilyushin A. - *Plasticité*, Editions Eyrolles, Paris, 1965
- [JET 1] Jetteur P., Cescotto S., De Ville de Goyet V., Frey F. - "Improved nonlinear finite element for oriented bodies using an extension of Marguerre's theory", *Computers and Structures*, vol 17, 1983
- [JET 2] Jetteur P. - Nonlinear shell elements based on Marguerre theory, IREM Internal Report 85/5, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1985

- [KIK 1] Kikuchy F., Ando Y. – Application of simplified hybrid displacement method to large deflection analysis of elastic-plastic plates and shells, *J. of the Faculty of Engineering, the University of Tokyo*, vol 32, 1973
- [KRA 2] Krakeland B. – Large displacement analysis of shells considering elasto-plastic and elasto-viscoplastic materials, Report n° 77-6, Div. of Struct. Mech., The Norwegian institute of Technology, University of Trondheim, 1977
- [LAN 1] Landau L., Wrobel L.C., Ebecken N.F.F. – "Elastic-plastic analysis of shell structures", *Computers and Structures*, vol 9, 1978
- [LEM 2] Lemaire M. – Mécanique non linéaire des structures, Cours de mécanique des structures, Université Blaise Pascal, Clermont II, DEA "Matériaux, Structures, Fiabilité", 1991
- [NAY 1] Nayak J.C., Zienkiewicz O.C. – "Elasto-plastic stress analysis, a generalization for various constitutive relations including strain softening", *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, vol 5, 1972
- [OWE 1] Owen D.R.J., Hinton E. – *Finite elements in plasticity theory and practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980
- [ROB 1] Robinson M. – "A comparison of yield surfaces for thin shells", *Int. J. Mech. Sci.*, vol 13, 1971
- [SAB 1] Sabir A.B. and Lock A.C. – "The application of finite elements to the large deflection geometrically nonlinear behaviour of cylindrical shells", *Variational Methods in Engineering*, ed. Brebbia C.A. and Tottenham, Southampton, 1972
- [STO 2] Stolarski H., Belytschko T., Carpenter N., Kennedy J.M. – "A simple triangular curved shell element for collapse analysis", *Collaps Analysis of Structures*, Sobel & Thomas ed. ASME, 1984
- [SUR 3] Surana K.S. – "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, vol. 19, 1983
- [ZIE 1] Zienkiewicz O.C. – *The finite element method*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1977