

---

# Analyses bi- et tridimensionnelle de problèmes de contact avec frottement par une méthode mixte des éléments finis

Zhi-Qiang Feng — Gilbert Touzot

LG2mS, URA 1505

Département de Génie mécanique, université de technologie de Compiègne  
BP 649, 60206 Compiègne, FRANCE

---

**RÉSUMÉ.** Cet article est consacré aux analyses bi- et tridimensionnelle de problèmes de contact avec frottement entre solides déformables. Une méthode mixte des éléments finis est développée. Cette méthode utilise la matrice condensée de flexibilité obtenue par élimination des nœuds qui ne sont pas candidats au contact. Une procédure itérative incrémentale est utilisée pour la résolution. Divers cas ont été étudiés : rigide-déformable 2D, déformable-déformable 2D et déformable-déformable 3D. L'influence du frottement sur les contraintes locales et les réactions de contact à la surface en contact est montrée. Les résultats numériques prouvent que cette méthode est en accord avec des solutions connues ; de plus, le nombre d'itérations et le temps CPU sont très petits, comparé aux autres méthodes.

**ABSTRACT.** This paper is devoted to the analysis of the two and three dimensional frictional contact problems between deformable bodies. A mixed finite element method is developed. The method uses the condensed flexibility matrix obtained by eliminating all the nodes except those where contact likely occurs. An incremental iterative procedure is used to solve this problem. Numerical examples are carried out in three cases : 2D rigid-deformable, 2D deformable-deformable and 3D deformable-deformable. The influence of friction effects on the local stress and contact pressure along the contact surface is shown. The numerical results prove that this approach is in very good agreement with known solutions and the number of iterations and the CPU time required are very small, compared to other available methods.

**KEY-WORDS :** contact with friction, iterative procedure, finite element method, flexibility matrix.

**MOTS-CLÉS :** contact avec frottement, procédure itérative, méthode des éléments finis, matrice de flexibilité.

---

## 1. Introduction

L'analyse des problèmes de contact avec frottement a une grande importance dans beaucoup d'applications du génie civil et de la mécanique. Les processus de formage, de laminage, d'extrusion, de coupe de métaux ou de pénétration constituent quelques exemples dans lesquels le contact entre le solide déformable (métal, sol) et le contacteur (outil, pieu) joue un rôle prédominant. Le contact entre deux (ou plusieurs) solides déformables peut se produire dans beaucoup de problèmes mécaniques. Même si la loi est élastique linéaire, le problème de contact est non linéaire. En effet, les phénomènes de contact et de frottement sont représentés par des inéquations non linéaires qui font intervenir les déplacements (ou vitesses de déplacement) d'une partie de la frontière, et les réactions de contact. Ces réactions et les surfaces en contact sont a priori inconnues et elles changent progressivement lorsqu'on applique le chargement externe. Dans la littérature, beaucoup de méthodes ont été proposées pour résoudre de tels problèmes en utilisant la méthode des éléments finis, la méthode de programmation mathématique [NGU 80] [KLA 88] [ZHO 89] [FEN 90], la méthode de pénalisation [CHA 71] [TSU 73] [CHE 78] [KIK 84] [SAX 92], la méthode des multiplicateurs de Lagrange [WRI 85] [SIM 85] [CUR 88] [ALA 88] [SHY 89] [ALA 92]. L'application de ces méthodes concerne surtout jusqu'à présent des problèmes bidimensionnels, sauf [KLA 88].

L'objectif de cet article est de présenter une méthode mixte d'éléments finis qui est très simple et s'adapte bien à la résolution de ce problème localement non linéaire. Cette méthode a été proposée par Francavilla et Zienkiewicz [FRA 75] pour le contact sans frottement. On l'a modifiée pour prendre en compte le frottement en introduisant une relation linéaire entre les réactions de contact et de frottement. Cette méthode peut être appliquée à la résolution de problèmes de contact et de frottement entre deux solides déformables ou bien entre un solide déformable et une fondation rigide, dans le cas bi- ou tridimensionnel. Ici, dans l'hypothèse des petites déformations, le principe de cette méthode est le suivant : une matrice de flexibilité, qui concerne seulement les nœuds candidats au contact, est calculée à l'aide de la matrice de rigidité. Notons que la matrice de flexibilité peut être calculée par l'une des trois méthodes suivantes : la méthode de condensation de Guyan par élimination [GUY 65], la méthode frontale [HIN 77] ou la méthode de la force unitaire [FEN 91]. Ensuite, les forces de contact sont calculées itérativement, en vérifiant les conditions de contact. Finalement, les états de chaque paire de nœuds de contact étant déterminés, le champ de déplacements peut être calculé dans toute la structure, en considérant les forces de contact comme un chargement externe.

L'avantage majeur de la méthode mixte est que, au lieu de modifier la matrice de rigidité comme dans la méthode de pénalisation, seule la matrice de flexibilité est modifiée à chaque itération. Comme la matrice de flexibilité a souvent une dimension beaucoup plus petite que la matrice de rigidité, on résout un système réduit, et le temps de calcul est donc largement diminué. De plus, comparée avec d'autres méthodes : la méthode du lagrangien augmenté [JEA 88] [FRA 89] [SAX 90] [SAX 91] [FEN 92], la méthode de pénalisation [FEN 89a] [SAX 92], la méthode des relations linéaires [FEN 89b] et la méthode de LCP [FEN 90]

[ALF 90], la méthode mixte satisfait exactement les conditions de contact et évite la programmation mathématique plus compliquée et une procédure itérative plus coûteuse. Toutefois, cette méthode est moins stable que la méthode du lagrangien augmenté quand le coefficient de frottement est trop élevé.

## 2. Principe de la méthode mixte

Considérons deux solides  $V_1$  et  $V_2$  qui sont en contact (figure 1), soumis à des tractions  $P$  et à des déplacements imposés  $\bar{U}$ .

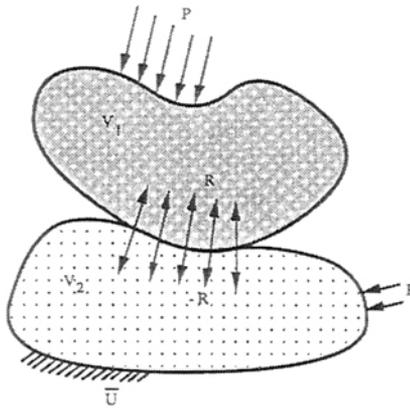


Figure 1. Structure en contact

Quand le contact intervient, chaque paire de nœuds de contact peut être dans un des trois états : contact avec adhérence, contact avec glissement et non-contact. Dans ces trois cas, les conditions de contact sont données dans l'annexe 1 et les équations d'équilibre des forces de contact dans l'annexe 2. Dans le contexte des éléments finis, l'équation d'équilibre de deux solides s'écrit directement :

$$[K] \{U\} = \{P\} + \{R\} \quad [1]$$

où

- $[K]$  : matrice de rigidité de la structure,
- $\{U\}$  : vecteur de déplacement de la structure,
- $\{P\}$  : vecteur de chargement externe,
- $\{R\}$  : vecteur de réaction de contact.

Comme  $\{U\}$  et  $\{R\}$  sont inconnus, l'équation [1] ne peut pas être résolue directement. Le vecteur  $\{R\}$  est d'abord localement déterminé par la méthode des

forces. Ensuite, le vecteur  $\{U\}$  est globalement calculé par la méthode des déplacements. Cette méthode est donc appelée "méthode mixte".

L'équation [1] peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{rc} \\ K_{rc}^T & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ U^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_r \\ P_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ R^* \end{Bmatrix} \quad [2]$$

où  $\{U^*\}$  concerne les nœuds de contact,  $\{U_r\}$  le reste de la structure.  $\{R^*\}$  est le vecteur de réaction concernant les nœuds de contact.

Par élimination de  $\{U_r\}$ , l'équation [2] devient :

$$[K_{cc}^*] \{U^*\} = \{P_c^*\} + \{R^*\} \quad [3]$$

où  $[K_{cc}^*] = [K_{cc}] - [K_{rc}]^T [K_{rr}]^{-1} [K_{rc}] \quad [4]$

$$\{P_c^*\} = \{P_c\} - [K_{rc}]^T [K_{rr}]^{-1} \{P_r\} \quad [5]$$

D'après l'équation [3], on peut obtenir :

$$\{U^*\} = [F_c^*] \{R^*\} + \{U_p^*\} \quad [6]$$

où

$[F_c^*] = [K_{cc}^*]^{-1}$  : matrice de flexibilité, restreint aux nœuds de contact,  
 $\{U_p^*\} = [F_c^*] \{P_c^*\}$  : vecteur de déplacements dus au chargement externe.

**2.1. Equation des écarts entre les paires de nœuds de contact**

On construit les écarts entre les paires de nœuds de contact à partir des déplacements de nœuds de contact et des écarts initiaux  $\{X_0^*\}$  entre deux solides  $V_1$  et  $V_2$  par :

$$\{X^*\} = \{U_1^*\} - \{U_2^*\} + \{X_0^*\} \quad [7]$$

En combinant les équations [2] et [4], on en déduit :

$$\{X^*\} = [F^*] \{R^*\} + \{U_p^*\} + \{X_0^*\} \quad [8]$$

où

$\{U_p^*\}$  : vecteur des écarts dus au chargement externe,  
 $[F^*] = [F_{c1}^*] - [F_{c2}^*]$  : matrice de flexibilité.

## 2.2. Relation dans le repère local

Afin de satisfaire les conditions de contact et d'établir les équations d'équilibre de contact, on doit transformer l'équation [8] dans le repère local  $n-t$ , où  $n$  est la direction normale à la surface de contact et  $t$  est la direction tangentielle à la surface de contact. Supposant que  $\{x\}$  et  $\{r\}$  sont respectivement le vecteur des écarts et le vecteur des forces de contact dans le repère local, on a :

$$\{x\} = [T] \{X^*\} \quad [9]$$

$$\{r\} = [T]^T \{R^*\} \quad [10]$$

où  $[T]$  est la matrice de rotation correspondant à la transformation de coordonnées entre le repère local et le repère global.

Portons les expressions [9] et [10] dans l'équation [8], on obtient l'équation des écarts entre les paires de nœuds de contact dans le repère local:

$$\{x\} = [f] \{r\} + \{u_p\} + \{x_0\} \quad [11]$$

où

$$[f] = [T][F^*][T]^T, \quad \{u_p\} = [T]\{U_p^*\}, \quad \{x_0\} = [T]\{X_0^*\}$$

## 2.3. Forme incrémentale de l'équation des écarts

Dans les problèmes de contact, le frottement résulte de l'interaction entre deux corps au niveau de leurs surfaces de contact. Sous l'effet du chargement les deux corps peuvent avoir un mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. On sait que ce mouvement dépend des réactions normales et tangentielles qui s'exercent sur la surface de contact. Il apparaît à partir d'un certain seuil. Au-delà de ce seuil se produit le glissement, de nature irréversible. Là encore, les effets de frottement dépendent de l'histoire de chargement. Donc, une approche de type incrémentale est nécessaire afin de suivre au plus près l'évolution du glissement. La procédure pas-à-pas suivante est appliquée.

On introduit le symbole " $\Delta$ " pour décrire les variables incrémentales. Au pas (i), l'équation [11] devient :

$$\{x_i\} = [f] \{r_i\} + \{u_{pi}\} + \{x_0\} \quad [12]$$

où

$$\{r_i\} = \{r_{i-1}\} + \{\Delta r_i\}, \quad \{u_{pi}\} = \{u_{pi-1}\} + \{\Delta u_{pi}\} \quad [13]$$

En portant [13] dans [12], on a :

$$\{x_i\} = [f] \{\Delta r_i\} + \{\Delta u_{pi}\} + [f] \{r_{i-1}\} + \{u_{pi-1}\} + \{x_0\} \quad [14]$$

de plus : 
$$\{x_{i-1}\} = [f] \{r_{i-1}\} + \{u_{pi-1}\} + \{x_0\} \tag{15}$$

On obtient donc la forme incrémentale de l'équation [11] :

$$\{x_i\} = [f] \{\Delta r_i\} + \{\Delta u_{pi}\} + \{x_{i-1}\} \tag{16}$$

A la fin du pas (i-1),  $\{x_{i-1}\}$  est connu. Au pas (i), l'incrément du chargement externe  $\{\Delta P_i\}$  est donné,  $\{\Delta u_{pi}\}$  peut être calculé en résolvant le système linéaire :  $[K] \{\Delta u_{pi}\} = \{\Delta P_i\}$ .

**2.4. Equation d'adhérence**

Initialement, on suppose que tous les nœuds de contact sont dans l'état d'adhérence, autrement dit que les écarts sont nuls :

$$\{x_i\} = 0 \tag{17}$$

L'équation d'adhérence est donc :

$$[f] \{r_i\} = \{b\} \tag{18}$$

où

$$\{b\} = - \{\Delta u_{pi}\} - \{x_{i-1}\}$$

**2.5. Modification de la matrice de flexibilité et du second membre**

Dans le cas du contact d'adhérence, on résout directement l'équation [18] sans modifications. L'équation [18] reste toujours valable pour les nœuds dans l'état de glissement ou de non-contact, mais dans ces deux cas, [f] et [b] doivent être modifiés.

**2.5.1. Contact avec glissement**

La réaction normale  $r_n$  étant inconnue, l'équation correspondant à ce terme n'a pas à être modifiée. Dans la direction tangentielle, la loi de Coulomb doit être satisfaite en chaque nœud de contact :

$$r_t^i = s \mu r_n^i \tag{19}$$

où s est lié à la direction de glissement et  $\mu$  est le coefficient de frottement. En portant [13] dans [19], on a :

$$\Delta r_t^i - s \mu \Delta r_n^i = s \mu \Delta r_n^{i-1} - r_t^{i-1} \tag{20}$$

On remarque que la résolution du système [18] sous contrainte de l'égalité [20] consiste à imposer une relation linéaire entre  $\Delta r_t^i$  et  $\Delta r_n^i$ .

### 2.5.2. Non-contact

Selon les équations d'équilibre de contact indiquées en annexe 2, on a

$$r_n^i = 0 \quad \text{et} \quad r_t^i = 0 \quad [21]$$

En combinant l'équation [13] et l'équation [21], on obtient

$$\Delta r_n^i = -\Delta r_n^{i-1} \quad \text{et} \quad \Delta r_t^i = -r_t^{i-1} \quad [22]$$

## 2.6. Contact tridimensionnel

Les équations de base du problème de contact tridimensionnel sont les mêmes que celles développées précédemment. Toutefois dans le cas tridimensionnel la plus grande difficulté est due à la modélisation du frottement.

A deux dimensions, le glissement est dirigé soit vers la gauche, soit vers la droite. Il est donc relativement facile de déterminer sa direction  $\mathbf{D}$ . Mais à trois dimensions, une des difficultés est justement de trouver la direction de glissement. On remarque que s'il y a glissement,  $\mathbf{D}$  est de norme unitaire et représente la direction de glissement. On peut envisager deux méthodes.

### 2.6.1. Méthode de projection [BEN 90]

Pour passer à une formulation incrémentale, on remplace la vitesse de glissement par l'accroissement du déplacement tangentiel relatif  $\Delta \mathbf{u}_t$ , car le facteur  $\Delta t$  se simplifie dans les relations. On choisit donc une approche quasi statique du frottement. La direction  $\mathbf{D}$  est déterminée par une projection en s'appuyant sur la formule :

$$\mathbf{D} = \text{Proj}_{\mathbf{B}(0;1)} (\mathbf{D} + \rho \Delta \mathbf{u}_t), \quad \forall \rho \geq 0 \quad [23]$$

où  $\mathbf{B}(0 ; 1)$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^2$ .

Une difficulté numérique est le choix du paramètre  $\rho$ . Si on prend pour  $\rho$  une valeur trop petite, les directions de glissement ne changent pas beaucoup d'une itération à l'autre, et l'algorithme sera très lent à converger. Inversement, si la valeur de  $\rho$  est trop grande, l'algorithme risque d'avoir des oscillations et de ne plus converger. En fait la meilleure valeur est liée aux valeurs propres de la matrice de flexibilité.

### 2.6.2. Méthode explicite

Cette méthode détermine la direction **D** de façon explicite : selon les réactions tangentielles de contact du pas précédent, on calcule la direction du vecteur de la force de frottement par :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{r_{11}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2}} \\ \sin \theta = \frac{r_{12}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2}} \end{cases} \quad [24]$$

On impose alors que la direction de glissement soit opposée à la direction obtenue ( $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ ).

### 3. Procédure itérative et algorithme

Après la modification de  $\{f\}$  et  $\{b\}$ ,  $\{\Delta r_i\}$  est obtenu en résolvant l'équation [18] et  $\{r_i\}$  est actualisé par l'équation [13]. En mettant  $\{\Delta r_i\}$  dans l'équation [16], on obtient  $\{x_i\}$ .

---

```

entrée des données
calcul de [K] et {P}
imposition des conditions aux limites
triangularisation de [K]
si traitement du problème de contact alors
  calcul de {f}
  pour i = 1 à imax répéter (* boucle de pas de chargement *)
    calcul de {b}
    répéter (* boucle d'itération de contact *)
      modification de [f] et {b}
      résolution du système [f] {Δr} = {b}
      calcul de {r} et {x}
    jusqu'à non-changement des états de contact
  jusqu'à la fin de tous les pas de chargement
  résolution du système [K] {U} = {P} + {R}
sinon
  résolution du système [K] {U} = {P}
post-traitement

```

---

Tableau 1. Algorithme

Si  $\{x_i\}$  et  $\{r_i\}$  ne satisfont pas les conditions de contact (annexe 1),  $[f]$  et  $\{b\}$  sont modifiés de nouveau. Cette procédure itérative est appliquée jusqu'au moment où les conditions de contact sont satisfaites pour tous les nœuds de contact. Ensuite, on passe au pas suivant.

Dès que l'on a appliqué tous les pas de chargement, on obtient les forces de contact  $\{R\}$ . En les reportant dans l'équation [1], on peut obtenir le champ de déplacements pour toute la structure.

Dans ce paragraphe nous donnons la séquence de calcul à exécuter (tableau 1) pour traiter un problème de contact avec frottement entre deux solides élastiques linéaires ou entre un solide élastique linéaire et une fondation rigide. Dans le cas où les solides ont des comportements non linéaires, il suffit d'imbriquer ce schéma dans une itération d'équilibre. Dans ce cas, la matrice de flexibilité est obtenue à partir de la matrice de rigidité tangente, et les réactions de contact obtenues sont ajoutées dans le vecteur de résidus.

#### 4. Exemples numériques

##### 4.1. Contact entre un bloc élastique et un plan rigide

Le premier problème traité est très simple. Le but est de valider par comparaisons les méthodes proposées. On considère le contact avec frottement entre un bloc

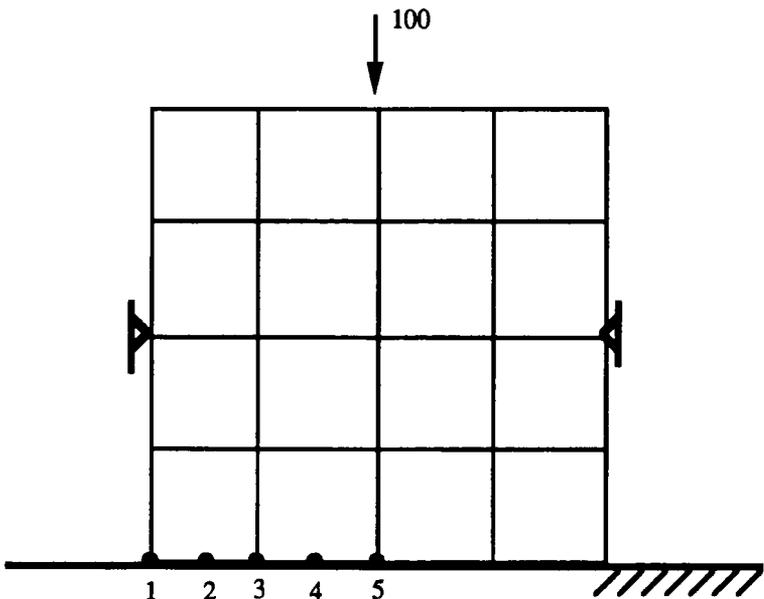


Figure 2. Géométrie, conditions aux limites et maillage

élastique et un plan rigide. Le bloc a une dimension de  $2 \times 2$  mm. La géométrie, les conditions aux limites et le maillage (73 nœuds et 16 éléments quadrilatéraux à 8 nœuds) sont montrés sur la figure 2.

Les caractéristiques du problème sont :

- état plan de contrainte
- module de Young  $10\,000 \text{ N/cm}^2$
- coefficient de Poisson 0,3
- coefficient de frottement 0,1

Le tableau 2 présente les résultats (réactions de contact, glissements, nombre d'itérations et le temps CPU (s) sur VAX 8600) pour les points 1, 2, 3, 4 et 5.

Méthode	Point	$R_n$	$R_t$	$X_t$	Itération	CPU
[JEA 88]	1	2,6157	0,2616	0,1370E-4	79	2,1
	2	11,244	1,1244	0,1312E-4		
	3	5,9586	0,5959	0,1155E-4		
	4	13,593	1,3593	0,4253E-5		
	5	7,7897	0,0	0,0		
[SAX 91]	1	2,6155	0,2616	0,1370E-4	40	1,1
	2	11,249	1,1249	0,1312E-4		
	3	5,9613	0,5961	0,1156E-4		
	4	13,597	1,3600	0,4259E-5		
	5	7,7985	0,0	0,0		
Mixte	1	2,6089	0,2609	0,1358E-4	6	0,3
	2	11,293	1,1293	0,1307E-4		
	3	5,8557	0,5956	0,1149E-4		
	4	13,748	1,3748	0,4194E-5		
	5	7,6421	0,0	0,0		

Tableau 2. Comparaison de résultats

On remarque une très bonne cohérence entre les résultats obtenus par les trois méthodes, ce qui nous montre que les méthodes que l'on a développé sont bien valables. La méthode mixte est plus rapide parce que son critère de convergence est basé sur les statuts de contact et non sur les réactions de contact. Ce type de critère pose quelquefois des problèmes d'instabilité.

#### 4.2. Contact entre deux solides déformables

On considère le contact avec frottement entre un poinçon V1 carré de côté égal à 10 mm et une pièce rectangulaire V2 de 20 mm de large et 24 mm de haut. On

impose un déplacement vertical constant (-0,5 mm) sur la face supérieure du poinçon, les deux pièces étant initialement en contact. A cause de la symétrie, on ne considère que la moitié de la structure. L'influence du coefficient de frottement a été étudiée dans cet exemple.

Les caractéristiques du problème sont :

- état plan de contrainte
- module de Young 10 000 N/cm<sup>2</sup>
- coefficient de Poisson 0,3
- coefficient de frottement 0,1 ou 0,2

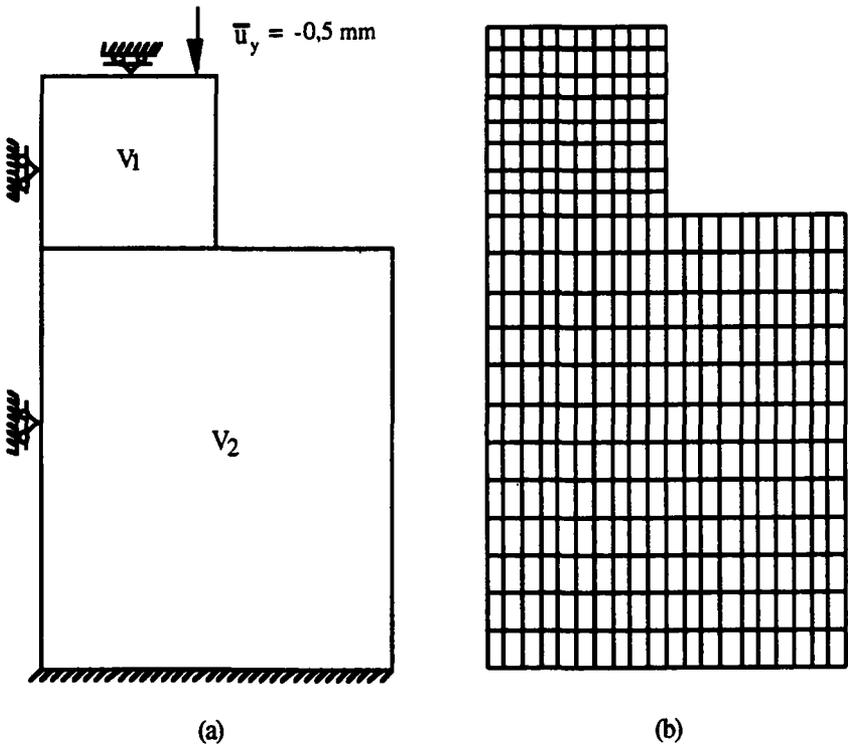


Figure 3. Géométrie, conditions aux limites et maillage

La géométrie, les conditions aux limites sont représentées dans la figure 3(a) et le maillage (1062 nœuds et 320 éléments quadrilatéraux à 8 nœuds et 9 points d'intégration) est montré sur la figure 3(b). Ce problème est traité par la méthode mixte et la méthode MSI (Matériau standard implicite [SAX 91]). Le tableau 3 montre le temps CPU (s) sur Micro-VAX II et sur VAX 8600.

	Micro-VAX II	VAX 8600
Méthode mixte	597	126
Méthode MSI	1922	436

Tableau 3. Comparaison du temps CPU

Le maillage déformé (facteur multiplicatif des déplacements égal à 4) est montré sur la figure 4. Les isovaleurs de la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  sont montrées sur la figure 5. Sur la figure 6, la distribution de la pression de contact comporte une singularité à l'extrémité droite correspondant à l'angle rentrant de 90° formé par le poinçon et la pièce en contact. La présence de cette singularité peut être démontrée par la théorie de l'élasticité ; la singularité est d'un type similaire à celle rencontrée à la pointe d'une fissure. Sur la figure 7, on observe une discontinuité de la pente de la distribution de force tangentielle de contact, correspondant à la frontière entre la zone d'adhérence et celle de glissement.

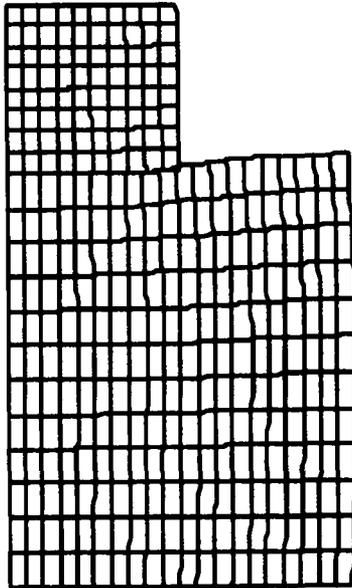


Figure 4. Maillage déformé

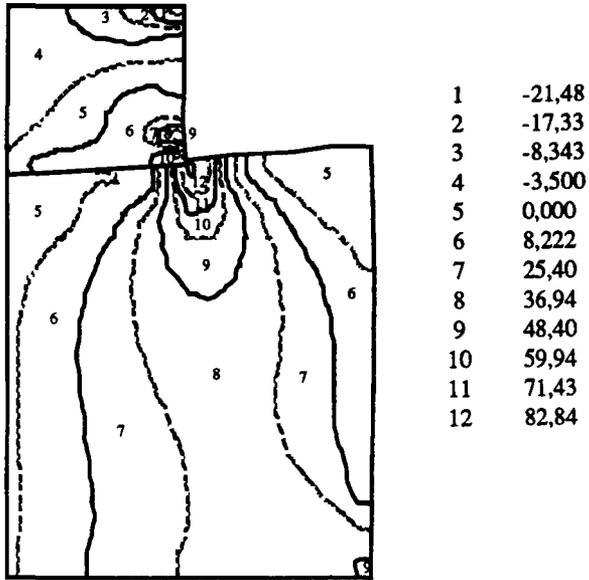


Figure 5. Distribution de la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$

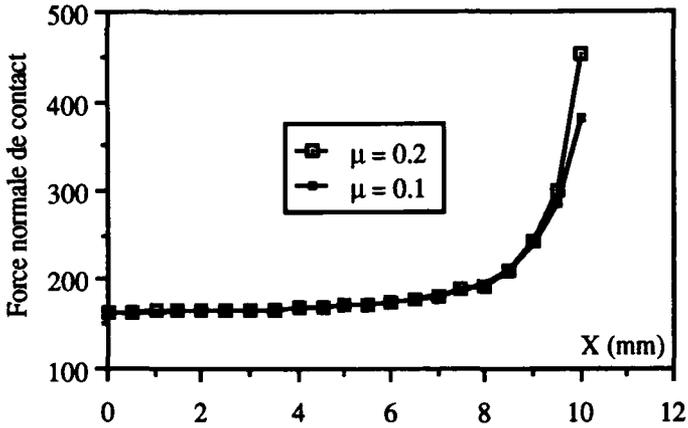


Figure 6. Distribution de la force normale de contact

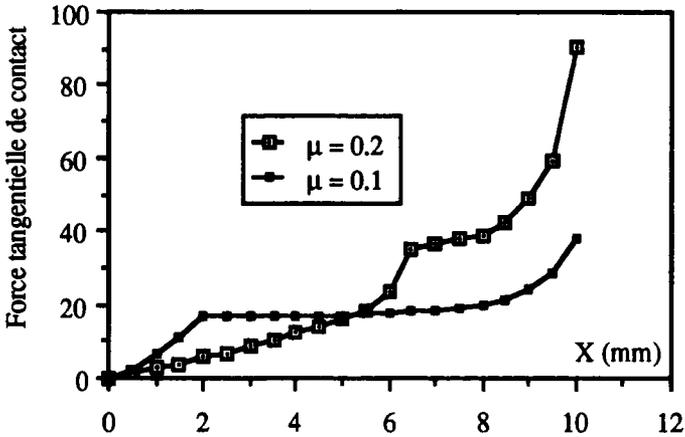


Figure 7. Distribution de la force tangentielle de contact

### 4.3. Contact 3D entre une plaque épaisse et un poinçon

Une plaque épaisse carrée et simplement appuyée sur la face inférieure vient en contact en son centre avec un poinçon parallélépipédique. Les deux solides sont déformables. La géométrie est montrée sur la figure 8. On impose un déplacement vertical constant (-0,2 mm) sur la face supérieure du poinçon, les deux pièces étant initialement en contact. A cause de la symétrie, on ne considère que le quart de la structure. Les caractéristiques du problème sont :

- problème 3D
- module de Young  $10\,000\text{ N/cm}^2$
- coefficient de Poisson 0,3
- coefficient de frottement 0,1

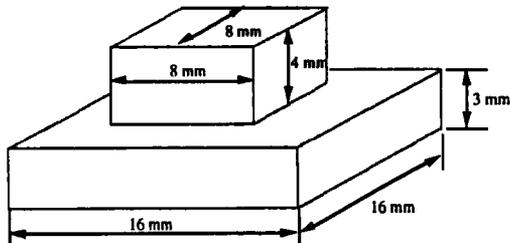


Figure 8. Géométrie de la structure en contact 3D

Le maillage (449 nœuds et 256 éléments hexaédriques à 8 nœuds et 8 points d'intégration) est montré sur la figure 9. Le maillage déformé (déplacements multipliés par 6) est montré sur la figure 10, et les isovaleurs de la contrainte de Von-Mises  $\sigma_{\text{mis}}$  sont montrés sur la figure 11. Le temps CPU sur VAX 8600 est de 748 secondes pour la résolution de ce problème. On remarque une concentration de contraintes et un glissement relatif maximal au coin inférieur du poinçon. Les isovaleurs de réactions normales sont montrées sur la figure 12. On remarque une concentration de réactions aux bords et surtout au coin de la surface de contact.

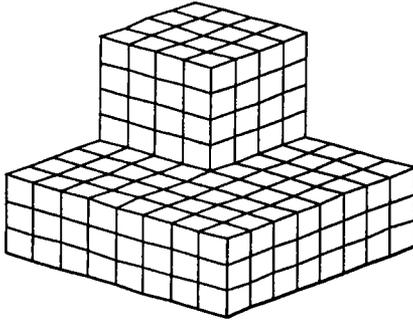


Figure 9. *Maillage 3D*

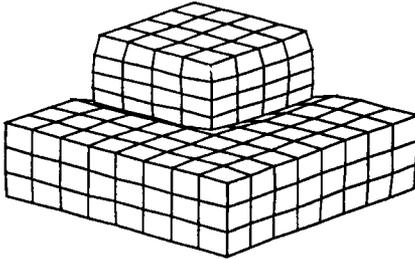


Figure 10. *Déformées du maillage*

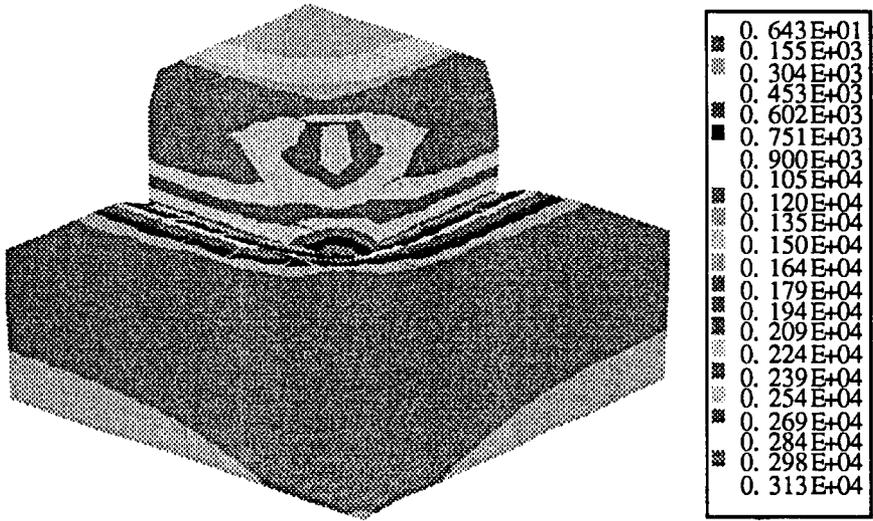


Figure 11. Distribution de la contrainte de Von-Mises

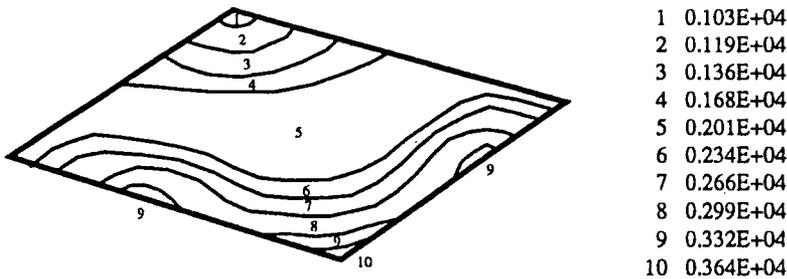


Figure 12. Distribution de réactions normales de contact

### 5. Conclusions

Une méthode mixte de résolution du problème de contact et de frottement a été développée. C'est une méthode itérative, qui consiste à résoudre l'équation d'équilibre restreinte aux variables locales accompagnée des relations de contact et de frottement. Les problèmes difficiles comme ceux du contact 3D ont également été traités dans cet article. Cette méthode est très efficace pour traiter les problèmes de contact et de frottement entre deux solides car le système est réduit aux seules variables locales, problème dont le nombre de degrés de liberté est largement inférieur au nombre total

de degrés de liberté. Les résultats obtenus sont satisfaisants. Mais il faut dire que cette méthode est moins performante pour certaines applications comme celle de l'emboutissage où le nombre de variables locales est très important.

## 6. Références

- [ALA 88] Alart P., "Multiplificateurs augmentés et méthode de Newton généralisée pour contact avec frottement", rapport, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 1988.
- [ALA 92] Alart P. and Curnier A., "A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like methods", to be published in *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1992.
- [ALF 90] Al-Fahed A. M., Stavroulakis G. E. and Panagiotopoulos P.D., *Form and force closure grasping problems via linear complementarity techniques*, Euromech 273, Contact unilateral and dry friction, Montpellier, France, May 1990.
- [BEN 90] Bendhia H. and Durville D., *Two-dimensional modeling of contact-friction phenomena in the blankholder area for the drawing process* Euromech 273, Unilateral contact and dry friction, Montpellier, France, May 1990.
- [CHA 71] Chan S.H. and Tuba I.S., "A finite element method for contact problems of solid bodies", *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 13, p.615-639, 1971.
- [CHE 78] Chen C.C. and Kobayashi S., "Rigid-plastic finite element analysis of ring compression", *AMD*, vol. 28, 1978.
- [CUR 88] Curnier A. and Alart P., "A generalized Newton method of contact problems with friction", *J. Mec. Th. et App.*, 1988.
- [FEN 89a] Feng Z.Q. et Touzot G., "Modélisation des grandes déformations rigide-plastiques en présence de contact et de fissuration", rapport interne, MNM/UTC, 1989.
- [FEN 89b] Feng Z.Q. , Breitkopf P. et Touzot G., "Aspects cinématiques du problème de contact : méthode des relations linéaires", rapport interne, MNM/UTC, 1989.
- [FEN 90] Feng Z.Q., "Résolution du problème de contact unilatéral par une méthode de programmation mathématique : LCP - Linear Complementarity Problem", rapport interne, MNM/UTC, 1990.
- [FEN 91] Feng Z.Q., Contribution à la modélisation des problèmes non linéaires : contact, plasticité et endommagement, thèse de doctorat, UTC, France, 1991.
- [FEN 92] Feng Z. Q., De Saxcé G. and Touzot G., "Numerical implementation of the implicit standard material approach for 2D or 3D frictional contact problem", submitted to *Int. J. Mech. Sci.*, 1992.
- [FRA 75] Francavilla A. and Zienkiewicz O.C., "A note on numerical computation of elastic contact problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.* vol. 9, p.913-924, 1975.
- [FRA 89] Franchomme P., Ricard A., Oudin J. et Ravalard Y., *Simulation du contact 2D dans SYSTUS par la méthode du lagrangien augmenté*, STRUCOME, 1989.
- [GUY 65] Guyan R.J., "On the reduction of stiffness and mass matrices", *AIAA Journal*, vol. 3, p. 380, 1965.
- [HIN 77] Hinton E. and Owen D.R.J., *Finite element programming*, Academic press, London, 1977.
- [JEA 88] Jean M. and Touzot G., "Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformation problems", *J. Theo. Appl. Mech.*, vol. 7, p.145-160, 1988.
- [KIK 84] Kikuchi N. and Oden J. T., *Contact problems in elastostatics, Finite Elements*, vol.5 (Edited by Oden J. T. and Carey G. F.), Prentice -Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

- [KLA 88] Klarbring A. and Björkman G., "A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface", *Computers & Structures*, vol. 30, p. 1185-1198, 1988.
- [NGU 80] Nguyen D. H. and De Saxcé G., "Frictionless contact of elastic bodies by finite element méthode and mathematical programming technique", *Computers & Structures*, vol. 11, p.55-67, 1980.
- [SAX 84] De Saxcé G. and Nguyen D.H., "Dual analysis of frictionless problems by displacement and equilibrium finite elements", *Eng. Struct.*, vol. 6, p.26-32, 1984.
- [SAX 90] De Saxcé G., Feng Z. Q. and Touzot G., *The implicit standard material approach for coupled contact problem*, Euromech 273, Unilateral contact and dry friction, Montpellier, France, May 1990.
- [SAX 91] De Saxcé G. and Feng Z. Q., "New inequality and functional for contact with friction: The implicit standard material approach", *Mech. of Struct. and Mach.*, vol. 19, n° 3, p.301-325, 1991.
- [SAX 92] De Saxcé G., Feng Z. Q. and Touzot G., "Rigid-plastic implicit schema for two and three dimensional analysis of metal forming by finite element méthode", to be published in *Engrg. Comp.*, 1992.
- [SHY 89] Shyu S.C., Chang T.Y. and Saleeb A.F., "Friction contact analysis using a mixed finite element method", *Computers & Structures*, vol. 32, p.223-242, 1989.
- [SIM 85] Simo J.C., Wriggers P. and Taylor R.L., "A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol.50, p.163-180, 1985.
- [TSU 73] Tsuta T. and Yamaji S., *Finite element analysis of contact problem*, Theory and practice in finite element structural analysis proceedings of the 1973 Tokyo seminar on element analysis, p.178-194, 1973.
- [WRI 85] Wriggers P. and Simo J.C., "A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems", *Comm. in Appl. Num. Meth.*, vol. 1, p.199-203, 1985.
- [ZHO 89] Zhong W.X. and Sun S.M., "A parametric quadratic programming approach to elastic contact problems with friction", *Computers & Structures*, vol. 32, p.37-43, 1989.

Conditions de contact		Critères
avant itération	après itération	
non-contact	non-contact	$\Delta x_n - u_{n2} + u_{n1} > 0$
	adhérence	$\Delta x_n - u_{n2} + u_{n1} \leq 0$
adhérence	adhérence	$r_{n1} \leq 0;  r_{t1}  \leq \mu  r_{n1} $
	glissement à droite	$r_{n1} \leq 0; r_{t1} > 0; r_{t1} \geq \mu  r_{n1} $
	glissement à gauche	$r_{n1} \leq 0; r_{t1} \leq 0; -r_{t1} \geq \mu  r_{n1} $
glissement	non-contact	$r_{n1} > 0$
	non-contact	$r_{n1} > 0$
	adhérence	$r_{n1} \leq 0; \Delta r_{t1} \cdot \Delta x_n > 0$
	glissement à droite	$r_{n1} \leq 0; r_{t1} > 0; \Delta r_{t1} \cdot \Delta x_n \leq 0$
	glissement à gauche	$r_{n1} \leq 0; r_{t1} \leq 0; \Delta r_{t1} \cdot \Delta x_n \leq 0$

*Annexe 1. Conditions de contact*

Conditions de contact	Equations
non-contact	$r_{n1} = r_{n2} = r_{t1} = r_{t2} = 0$
adhérence	$r_{n1} + r_{n2} = 0; r_{t1} + r_{t2} = 0$
glissement à droite	$r_{n1} + r_{n2} = 0; r_{t1} + r_{t2} = 0; r_{t1} + \mu r_{n1} = 0$
glissement à gauche	$r_{n1} + r_{n2} = 0; r_{t1} + r_{t2} = 0; r_{t1} - \mu r_{n1} = 0$

*Annexe 2. Equations consistantes de contact*