

---

# Sur une méthode de décentrage de schémas d'éléments finis résolvant les équations de Navier-Stokes et de Saint-Venant

Azzeddine Soulaïmani\* — Nacer-Eddine Elkadri Elyamani\*\*

\* Ecole de technologie supérieure

Université du Québec, département de génie mécanique  
4750 Henri-Julien, Montréal, H2T 2C78, Canada

\*\* Université Laval, département de génie mécanique  
Ste-Foy, G1K-7P4, Canada

---

**RÉSUMÉ.** Une méthode d'éléments finis unifiée est présentée pour simuler les écoulements bidimensionnels de fluides compressibles visqueux et les écoulements à surface libre de faibles profondeurs. Les équations de Navier-Stokes (resp. de Saint-Venant) sont formulées en termes de variables dépendantes : la vitesse et le logarithme de la densité (resp. de la hauteur d'eau totale). Cela montre en particulier la nécessité d'utiliser une formulation variationnelle stable pour l'équation de continuité dans le cas d'écoulements rapides. Nous proposons une méthode désignée par l'acronyme SUFL (pour Stream-Line Upwinding Flux Limiting Method) qui permet de stabiliser la formulation classique de Galerkin. Celle-ci est basée sur la combinaison de deux méthodes : SUPG (Stream-line Upwinding Petrov-Galerkin Method) et les techniques qui utilisent la notion de limiteur de flux. Des simulations numériques d'écoulements transsoniques et transcritiques autour d'un profil NACA-0012 sont présentées qui montrent la possibilité d'atteindre avec la méthode SUFL des nombres de Reynolds relativement élevés.

**ABSTRACT.** A unified finite element method for the computation of two dimensional compressible viscous and free surface flows is presented. The Navier-Stokes (resp. Shallow-Water) equations are solved in terms of the dependent variables velocity and  $\sigma$  which is the logarithm of the density (resp. of the head water). It is particularly shown that it is necessary to use stable variational formulation at least for the continuity equation to avoid any oscillations in case of rapid flows. The method proposed herein combines the ideas behind Stream-Line Upwinding Petrov Galerkin Method and Flux limiting methods in order to introduce a stabilisation mechanism only where it is required. Numerical computations of relatively high Reynolds number (2000 - 10000) two-dimensional transonic and transcritical flows around a NACA-0012 airfoil exhibit a progression from a steady to periodic vortex shedding flows.

**MOTS-CLÉS :** éléments finis, Navier-Stokes, Saint-Venant, « stream-line Upwinding Petrov Galerkin method » (SUPG), limiteurs de flux.

*KEY WORDS : finite elements, Navier-Stokes, Shallow-Water equations, "Streamline Upwinding Petrov Galerkin method" (SUPG), Flux limiting methods.*

---

## 1. Introduction

Dans cet article, nous présentons quelques résultats de la simulation bidimensionnelle des écoulements compressibles visqueux et des écoulements possédant une surface libre.

L'exposé est principalement centré sur le développement de formulations variationnelles stables.

Notre objectif est de développer une méthode unifiée d'éléments finis applicable pour les écoulements compressibles visqueux et les écoulements à surface libre, en profitant de l'analogie mathématique qui existe entre les deux types d'écoulements. Nous discuterons du choix du type d'éléments, du type des variables dépendantes utilisées ainsi que des méthodes de stabilisation introduites pour traiter des écoulements à nombres de Reynolds et de Mach ou de Froude élevés. Notre apport sera le développement d'une méthode de stabilisation appelée S.U.F.L, en combinant les techniques des limiteurs de flux avec la méthode de décentrage SUPG de Hughes et Mallet [1].

## 2. Formulation du problème

Les équations générales de la mécanique des fluides traduisent les principes fondamentaux de la mécanique et de la thermodynamique, à savoir la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Dans le cas d'un fluide Newtonien, ces lois de conservation sont traduites par les équations de Navier-Stokes; rappelons ici que l'application de ces équations à un fluide incompressible et à un écoulement à surface libre de faible profondeur donne les équations de Saint-Venant.

Soit  $\Omega$ , un borné de  $\mathbb{R}^2$  où  $\mathbb{R}^3$ , le domaine considéré et soit  $\Gamma = \partial\Omega$  sa frontière. Les équations de Navier-Stokes sous la forme non conservative et adimensionnelle que nous utiliserons, sont données par:

$$(2.1a) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \rho + \rho \text{div } \underline{u} = 0 ,$$

$$(2.1b) \quad \rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{u} \right) - \text{div } \underline{\tau} + \underline{\text{grad}} p = \underline{f} ,$$

$$(2.1c) \quad \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} T \right) - \frac{\gamma}{R_e Pr} \Delta T - p \text{div } \underline{u} = \Phi ,$$

où  $\rho$  est la densité,  $\underline{u}$  la vitesse,  $p$  la pression,  $\underline{f}$  les forces externes,  $T$  la température,  $R_e$  le nombre de Reynolds,  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques,  $Pr$  le nombre de Prandtl et  $\Phi$  la fonction de dissipation visqueuse. Le tenseur des contraintes visqueuses  $\underline{\tau}$  s'exprime comme suit:

$$(2.2) \quad \underline{\tau} = \frac{1}{R_e} (\underline{\text{grad}} \underline{u} + (\underline{\text{grad}} \underline{u})^t) - \frac{2}{3} (\text{div } \underline{u}) \underline{\delta}$$

où  $\underline{\delta}$  est le delta de Kronecher.

Afin d'obtenir une formulation complète du point de vue mathématique, il faut ajouter à ce système d'équations (2.1)-(2.2) les conditions aux limites et les conditions initiales.

A ces équations de base de la mécanique des fluides s'ajoute une équation d'état thermodynamique décrivant le fluide et offrant une fermeture au système d'équations (2.1). Dans le cas des écoulements compressibles, cette équation donne une relation entre les variables d'état  $p$ ,  $\rho$  et  $T$  qui représentent respectivement la pression, la masse volumique et la température. Cette équation s'exprime ainsi:

$$(2.3) \quad F(p, \rho, T) = 0 .$$

Dans le cas limite des écoulements incompressibles, cette équation d'état correspond à  $\rho = \text{constante}$ ; soit d'après l'équation (2.1a)  $\text{div } \underline{u} = 0$ .

D'autre part, une identification correcte des variables d'états  $p$ ,  $\rho$  et  $T$ , permet au système d'équations (2.1) de décrire aussi bien les écoulements à surface libre dans le cas bidimensionnel. Ainsi,  $\rho$  n'est nul autre que la hauteur d'eau totale,  $p$  est assimilé à la pression induite par la colonne d'eau et  $T$  représente la température ou toute autre propriété physique ou matérielle intégrée sur la profondeur (i.e. salinité, concentration de sédiments, etc). En effet, en utilisant la notation  $H$  pour la profondeur du fond au dessous d'un plan de référence et  $\eta$  pour le niveau de la surface libre au dessus du plan de référence, nous obtenons les relations:

$$\rho = (H + \eta)$$

et

$$p = g \frac{(H + \eta)^2}{2}$$

où  $g$  est l'accélération de la gravité.

L'équation d'état (2.3) serait, dans le cas des écoulements à surface libre, définie par:

$$p = g \frac{\rho^2}{2}$$

Les équations de Saint-Venant sont alors:

$$(2.4a) \quad \frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} (H + \eta) + (H + \eta) \text{div } \underline{u} = 0 ,$$

$$(2.4b) \quad (H + \eta) \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{u} \right) - \text{div } \underline{\tau} + \underline{\text{grad}} p = \underline{f} - g \frac{\underline{u} \|\underline{u}\|}{c^2} ,$$

$$(2.4c) \quad (H + \eta) \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} T \right) - \frac{\gamma}{R_e P_r} \Delta T = \Phi ,$$

où  $c$  est le coefficient de Chezy représentant les frottements du fond.

De cette présentation générale des équations de la quantité de mouvement et de continuité, nous concluons que toute méthode numérique permettant de résoudre les écoulements compressibles est aussi appropriée pour les écoulements à surface libre (toujours dans le cas bidimensionnel). L'existence d'une analogie entre les fluides compressibles et à surface libre, certes bien connue, n'a pas été exploitée suffisamment dans le contexte du calcul numérique. Il est reconnu que les caractéristiques particulières des écoulements de gaz tels les couches limites et les chocs sont généralement négligés en hydraulique (comme pour les rivières ou pour les lacs...). Cependant, en pratique, il arrive de rencontrer des écoulements naturels fortement variés et rapides, du moins dans des régions localisées et donc très similaires aux écoulements rapides des gaz et qui nécessitent alors des méthodes numériques bien adaptées.

Sur les méthodes d'éléments finis classiques résolvant les équations de Saint-Venant, nous faisons référence à Dhatt et al. [2].

### Remarque 2.1

Si  $V$  représente le vecteur des variables dépendantes, c'est-à-dire  $V = (\underline{u}, \rho, T)^t$  (ou encore  $V = (\underline{u}, (H + \eta), T)^t$ ), la forme matricielle du système d'équations (2.1) (ou encore (2.4)) s'écrit:

$$(2.5) \quad \boxed{V_{,i} + A_i V_{,i} = (K_{ij} V_{,j})_{,i} + F}$$

avec:  $A_i$  les matrices jacobiniennes des flux de convection;  
 $K_{ij}$  les matrices de diffusion;  
 $F$  le vecteur source.

Cette forme de présentation du problème sera utilisée, à quelques reprises, afin d'alléger les notations. ■

Le point de départ de notre méthode de résolution des équations de Navier-Stokes pour les fluides compressibles visqueux et des équations de Saint-Venant consiste en l'utilisation du changement

de variables:  $\sigma = \log \rho$  au lieu de  $\rho$  (ou encore par  $\sigma = \log(H + \eta)$  au lieu de  $(H + \eta)$ ).

En divisant les termes de l'équation (2.1a) (ou encore (2.4a)) par  $\rho$  (ou encore par  $(H + \eta)$ ), qui est supposée strictement positive, et en utilisant le changement de variables, nous obtenons une forme intéressante de l'équation de continuité (2.1a) ou (2.4a); cette forme fait apparaître en particulier un terme de convection en  $\sigma$  (Bristeau et al [3]);

$$(2.6) \quad \operatorname{div} \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 .$$

Il est clair d'après l'équation (2.6) qu'il n'existe aucun processus de diffusion qui contrôlerait le transport de  $\sigma$ , spécialement au niveau des zones de forts gradients comme les zones de chocs. En terme de variables  $\underline{u}$ ,  $p$ ,  $\sigma$  et  $T$ , le système d'équations (2.1) (ou encore (2.4)) devient:

$$(2.7a) \quad -\operatorname{div} \underline{u} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \sigma,$$

$$(2.7b) \quad e^\sigma \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{u} \right) - \operatorname{div} \underline{\tau} + \underline{\operatorname{grad}} p = \underline{f},$$

$$(2.7c) \quad e^\sigma \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T \right) - \frac{\gamma}{R_e P_r} \Delta T - p \operatorname{div} \underline{u} - \Phi = 0.$$

alors que l'équation d'état qui relie maintenant  $\sigma$ ,  $p$  et  $T$  s'écrit:

$$(2.8) \quad \sigma = F(p, T) .$$

Par exemple, dans le cas d'un gaz parfait l'équation (2.8) s'écrit:

$$\sigma = \log \frac{p}{(\gamma - 1)T}$$

et dans le cas des écoulements à surface libre on a :

$$\sigma = \frac{1}{2} \log \left( \frac{2p}{g} \right)$$

Comme nous sommes intéressés à développer une méthode d'éléments finis unique approchant les solutions des systèmes (2.1) et (2.4), nous considérons le problème variationnel suivant: trouver  $\underline{u}$ ,  $\sigma$ ,  $p$  et  $T$  appartenant à des espaces appropriés et satisfaisant

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -b(\underline{u}, q) + \left( q, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + d(q, \sigma) = 0 \\ \left( \underline{v}, e^\sigma \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right) + c(\underline{u}, \underline{u}, \underline{v} e^\sigma) + b(\underline{v}, p) + \frac{1}{R_e} a(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{f}, \underline{v}) \\ \left( \psi e^\sigma, \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} T \right) \\ + \frac{\gamma}{R_e P_r} (\underline{\text{grad}} \psi, \underline{\text{grad}} T) - (\psi, p \text{div } \underline{u} + \Phi) = 0 \end{array} \right.$$

pour toutes fonctions test admissibles  $\underline{v}$ ,  $q$  et  $\psi$ . Ici la notation  $(\cdot, \cdot)$  signifie le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ . Pour une décomposition en éléments,  $\Omega = \bigcup K$ , nous utiliserons  $(\cdot, \cdot)_K$  pour le produit scalaire  $L^2(K)$ . Les formes multilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  et  $c(\cdot, \cdot, \cdot)$  dans l'équation (2.9) sont définies par:

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} c(\underline{u}, \underline{u}, \underline{v}) = (\underline{v}, \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{u}), \\ b(\underline{v}, p) = -(p, \text{div } \underline{v}), \\ a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} \underline{v} : (\underline{\text{grad}} \underline{u} + (\underline{\text{grad}} \underline{u})^t - \frac{2}{3}(\text{div } \underline{u})\underline{\delta}) d\Omega . \end{array} \right.$$

La forme bilinéaire  $d(q, \sigma)$  sera écrite en plusieurs variantes dépendemment de la discrétisation de  $\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma$ , compte tenu de

l'approximation de  $\sigma$  et éventuellement de la méthode de décentrage utilisée.

Quand l'expression de  $d(\sigma, q)$  correspond à une approximation centrée de  $\underline{u} \cdot \text{grad } \sigma$ ; il est reconnu que des oscillations apparaissent pour des nombres de Reynolds et de Mach ou de Froude relativement faibles. Par exemple, en utilisant une formulation classique de Galerkin,  $d(\sigma, q)$  est simplement le produit scalaire  $(q, \underline{u} \cdot \text{grad } \sigma)$  qui génère un schéma centré. Afin d'éviter ces difficultés, nous allons utiliser des expressions modifiées de  $d(q, \sigma)$  contenant, d'une façon ou d'une autre, une diffusion numérique.

### Remarque 2.2

En utilisant maintenant la notation matricielle, le problème variationnel (2.9) s'écrit comme suit:

$$(2.11) \quad \int_{\Omega} [W \cdot (V_{,i} + A_i V_{,i} - F) + W_{,i} K_{ij} V_{,j}] dx - \int_{\Gamma} W \cdot F_i^d \cdot n_i d\gamma = 0$$

où  $W$  est le vecteur des fonctions de pondération et  $K_{ij} V_{,j} = F_i^d$  le flux de diffusion dans la direction  $i$ . ■

Nous nous intéressons maintenant à l'équation (2.6), qui est une équation de transport pur. Nous devons alors la discrétiser de manière à éviter les instabilités associées aux schémas centrés. Les termes de transport de quantité de mouvement et d'énergie sont traités dans la section 4.

Nous considérons cependant des éléments triangulaires pour lesquels les composantes de la vitesse sont approchées par des polynômes continus du second degré alors que la température et les variables  $p$  et  $\sigma$  le sont par des polynômes linéaires continus. Ce choix d'approximations polynômiales mixtes permet de vérifier la stabilité de l'élément (i.e. condition *inf-sup*) dans les zones de couches limites où l'écoulement est plutôt incompressible (Fortin et Soulaimani [4]). D'autres types d'approximations sont aussi plausibles (Soulaimani et al [5]).

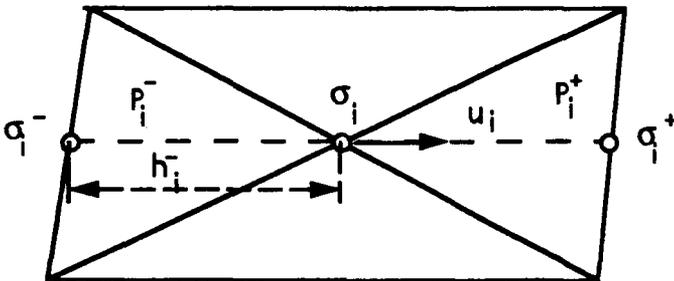
### 3. Discrétisation du terme $\underline{u} \cdot \text{grad } \sigma$

Cette section est consacrée à la présentation de deux méthodes de discrétisation du terme de transport en  $\sigma$ . La méthode classique de stabilisation des schémas pour une équation de transport est inspirée des différences finies décentrées dans la direction du courant (décentrage amont). Pour le cas unidimensionnel, cela est bien établi et revient à introduire une viscosité artificielle. Nous allons suivre cette voie pour aboutir à des méthodes de décentrage pour le cas multidimensionnel. La première méthode est basée sur la notion de dérivée directionnelle. Dans la seconde, nous allons "marier" la méthode de décentrage amont avec la méthode de limiteur de flux dans le but de contrôler la viscosité artificielle et ne l'introduire que là où elle est nécessaire.

#### 3.1 Méthode de dérivée directionnelle

Cette méthode est basée sur le simple fait que le terme de convection peut être interprété comme une dérivée directionnelle. Cette dérivée directionnelle sera calculée en chaque noeud par un schéma de différences finies décentré le long de la direction  $\underline{u}$ . Considérons d'abord les notations suivantes:

Soit  $\sigma_i$  la valeur de  $\sigma$  au noeud  $i$  et  $\|\underline{u}_i\|$  la norme euclidienne de la vitesse en ce noeud. Nous notons aussi la projection amont  $P_i^-$  (resp. aval  $P_i^+$ ) du noeud  $i$  sur la frontière  $\partial K$  où l'élément  $K$  fait partie des éléments ayant en commun ce noeud  $i$ , tandis que  $h_i^-$  (resp.  $h_i^+$ ) est la distance entre le noeud  $i$  et le point  $P_i^-$  (resp.  $P_i^+$ ), alors que  $\sigma_{i^-}$  (resp.  $\sigma_{i^+}$ ) est la valeur de  $\sigma$  au point  $P_i^-$  (resp.  $P_i^+$ ).



En utilisant ces définitions, le flux amont au noeud  $i$  est défini

par:

$$(3.1) \quad (\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma)_i^- = \|\underline{u}_i\| \frac{\sigma_i - \sigma_i^-}{h_i^-}$$

de façon similaire le flux aval est donné par:

$$(3.2) \quad (\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma)_i^+ = \|\underline{u}_i\| \frac{\sigma_i^+ - \sigma_i}{h_i^+}$$

A l'intérieur de l'élément  $K$ , une discrétisation du flux est exprimée par une simple combinaison linéaire des flux nodaux:

$$(3.3) \quad \int_K q(\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma)_h dx = \int_K \left( \sum_i q_i [\alpha (\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma)_i^- + (1 - \alpha) (\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma)_i^+] \right) dx$$

où la somme est étendue sur les sommets de  $K$ , avec  $q_i$  l'interpolation linéaire standard et le paramètre  $\alpha$  est choisi afin de contrôler la diffusion artificielle. Ainsi nous définissons la forme bilinéaire  $d(\cdot, \cdot)$  dans l'équation (2.9) par:

$$(3.4) \quad d(q, \sigma)_{DD} = \sum_K (q, (\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma)_h)_K.$$

Cette méthode n'est cependant précise qu'au premier ordre et elle est relativement diffusive. Il est possible de construire des schémas d'ordre supérieur en utilisant plus de points dans la direction amont (Tabata et Yaoi [6]).

### 3.2 Méthode de décentrage amont avec limiteur de flux (Streamline Upwinding Flux Limiter method) (S.U.F.L.)

La méthode de décentrage amont basée sur une formulation de Petrov-Galerkin (SUPG) (Hughes et Mallet [1]) est devenue très

populaire pour la résolution des équations de transport. Nous la considérerons d'abord sous sa forme la plus simple. Nous allons par la suite essayer de lui incorporer l'idée de limiteur de flux. L'idée essentielle est de n'introduire la diffusion que lorsqu'elle est vraiment nécessaire, puisque le décentrage modifie le problème original et affecte par conséquent la précision. Les méthodes de limiteur de flux ont été largement développées dans le contexte des méthodes de différences finies et des volumes finis (Sweby [7]). Leurs principes consistent à calculer un détecteur de zones de forts gradients, siège potentiel d'oscillations, qui indique qu'il faut ajouter une quantité de viscosité artificielle au schéma centré (qui lui est d'ordre supérieur). Dans une méthode SUPG, la forme bilinéaire  $d(q, \sigma)$  est définie par :

$$(3.5) \quad d(q, \sigma)_{SU} = \int_{\Omega} q \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma \, dx + \int_{\Omega} \beta(\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} q)(\text{div } \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t}) \, dx$$

Cette formulation est "consistante" dans le sens que le terme additionnel s'annule pour la solution exacte de l'équation (2.9). Dans l'équation (3.5), on prend habituellement le paramètre  $\beta = \frac{h}{2\|\underline{u}\|}$ , où  $h$  est une dimension caractéristique du maillage (une façon simple pour la déterminer consiste à la définir en chaque noeud par la distance minimale aux noeuds voisins). Le paramètre  $\beta$  sera plutôt défini par  $\beta = \frac{h}{2\|\underline{u}\|} \zeta(r)$  où  $r$  est le paramètre détecteur d'oscillations défini pour chaque noeud  $i$ , en utilisant la notation de la section précédente, par:

$$(3.6) \quad r_i = \frac{(\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma)_i^-}{(\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \sigma)_i^+}.$$

Intuitivement, le détecteur (ou encore le senseur) prendrait des valeurs négatives aux zones qui risqueraient d'être affectées par les oscillations, indiquant ainsi qu'on peut ajouter le maximum possible de diffusion. A l'opposé, pour  $r \approx 1$ , cela indique une

zone de solution régulière. Ainsi, la fonction  $\zeta(r)$  prend sa valeur maximale pour  $r \leq 0$  et doit s'annuler pour  $r \geq 1$ . Pour  $0 \leq r \leq 1$ , plusieurs choix sont possibles a priori. Par exemple on peut adopter tout simplement  $\zeta(r) = 1 - r$ . Dans le cas de schémas de différences finies unidimensionnels, on peut montrer que la fonction  $\zeta(r)$  doit satisfaire certaines conditions afin de préserver l'ordre supérieur de convergence (Sweby[7]). Nous allons plutôt adopter la définition d'une fonction  $\zeta(r)$  doublement asymptotique :

$$(3.7) \quad \zeta(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 0 \\ 1 - \frac{2r}{1+r} & 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & r \geq 1 \end{cases}$$

### Remarque 3.1

En intégrant par parties  $d(q, \sigma)$ , comme défini dans l'équation (3.5), on peut facilement montrer que le problème correspondant à l'équation de continuité modifiée se réécrit :

$$\operatorname{div} \underline{u} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \sigma - \operatorname{div} (\beta \underline{u} (\operatorname{div} \underline{u} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \sigma)) = 0.$$

La méthode S.U.F.L est "résiduelle" de la même façon que la méthode originale SUPG. Ainsi, elle maintient l'ordre supérieur de convergence de la formulation de Galerkin (pour des solutions régulières) tout en améliorant la stabilité. De plus, la méthode S.U.F.L est intrinsèquement non linéaire i.e. que le processus de stabilisation agit comme dans une méthode de "capture de choc". Les zones de variations importantes de flux sont d'abord localisées, puis la diffusion est introduite pour lisser la solution. ■

### Remarque 3.2

Plusieurs choix du détecteur et de la fonction de diffusion  $\zeta(r)$  sont possibles, uniquement l'expérience numérique peut vraiment

montrer leur performance relative. Ce choix doit cependant respecter le critère suivant: le détecteur et la fonction de diffusion doivent être réguliers. ■

#### 4. Généralisation de la méthode S.U.F.L.

Jusqu'à présent, nous avons discuté de méthodes de décentrage et nous avons montré leur application pour l'équation de continuité. Ces méthodes définissent le gradient de densité dans la formulation variationnelle afin d'éviter les instabilités. En effet, ces procédures sont efficaces pour contrôler les forts gradients de densité pour les écoulements à haut nombre de Mach ou de Froude mais il est aussi nécessaire de stabiliser les composantes de la vitesse et la température pour des nombres de Reynolds relativement élevés. Dans cette section nous allons nous intéresser particulièrement à généraliser la méthode S.U.F.L. pour l'appliquer au système d'équations (2.1) ou (2.4). Le problème variationnel correspondant s'écrit comme suit:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \underline{v}, e^\sigma \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right) + c(\underline{u}, \underline{u}, \underline{v} e^\sigma) \\ + b(\underline{v}, p) + \frac{1}{R_e} a(\underline{u}, \underline{v}) + e(\underline{v}, \underline{u}) = (\underline{f}, \underline{v}) \\ - b(\underline{u}, q) + \left( q, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) + d(q, \sigma) = 0 \\ \left( \psi e^\sigma, \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} T \right) \\ + \frac{\gamma}{R_e P_r} (\underline{\text{grad}} \psi, \underline{\text{grad}} T) - (\psi, p \text{div } \underline{u} + \Phi) + h(\psi, T) = 0 \end{array} \right.$$

où

$$(4.2) \quad e(\underline{v}, \underline{u}) = \sum_K \int_K \left( (\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{v}) \underline{\Delta} (e^\sigma \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{u} \right) - \text{div } \underline{\tau} + \underline{\text{grad}} p - \underline{f}) \right) dx.$$

De la même façon, nous posons:

$$(4.3) \quad h(\psi, T) = \sum_K \int_K \left( (\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \psi) \Lambda_T \left( e^\sigma \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} T \right) - \frac{\gamma}{R_e P_r} \Delta T - p \text{div } \underline{u} - \Phi \right) \right) dx.$$

Dans les équations (4.2) et (4.3), nous avons:

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ \frac{h}{2 \|\underline{u}\|} \zeta(r(u_i)) & \text{pour } i = j. \end{cases}$$

et

$$\Lambda_T = \frac{h}{2 \|\underline{u}\|} \zeta(r(T))$$

Dans cette formulation, les termes de dérivée seconde sont calculés à l'intérieur des éléments. Ainsi, nous rencontrons le dilemme suivant: pour les approximations linéaires, ces termes disparaissent et c'est un signe de faible précision de la méthode. D'autre part, pour les éléments d'ordre supérieur, l'implantation de la méthode est relativement lourde. Afin de contourner ce problème, nous proposons de modifier légèrement la formulation ci-dessus. Pour ce faire, la divergence des flux de diffusion sera approchée par sa projection sur les polynômes  $P_1$  continus.

Les termes additionnels à la formulation variationnelle (4.1) s'écrivent en notation matricielle sous la forme:

$$(4.4) \quad \dots + \sum_K \int_K (\tilde{A}_i W_{,i}) \tau (V_{,t} + A_i V_{,i} - (K_{ij} V_{,j}) - F) dx = 0$$

où  $\tilde{A}_i$  est définie ci-dessus comme étant la partie symétrique de  $A_i$  et  $\tau$  étant une matrice de dimension  $md * md$  (avec  $md = 4$ ), réduite dans le cas présent à une matrice diagonale définie par:

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \Lambda_{ij} & \text{pour } 1 \leq i, j \leq 3 \\ \tau_{ij} = 0 & \text{pour } i \text{ ou } j = 4 \\ \tau_{44} = \Lambda_T \end{cases}$$

Ces termes additionnels comportent l'opérateur:

$$\sum_K \int_K W_{,i}(\tilde{A}_i^t \tau \tilde{A}_j) V_{,j} dx$$

qui ajoute de la dissipation numérique pour chaque variable dans le sens du courant.

## 5. méthode de résolution

Le problème (2.9) comporte plusieurs types de non-linéarités. Certains sont dus aux termes de convection, d'autres sont reliés à la compressibilité du fluide ou du domaine par le biais de l'équation d'état, alors que d'autres types de non-linéarités additionnels sont introduits par les méthodes de décentrage utilisées. Compte tenu de ses propriétés de convergence, l'algorithme de Newton-Raphson couplé à un schéma temporel implicite pourrait être efficace pour résoudre ce problème. Cependant, dans le cas présent, l'implantation n'est pas évidente en pratique, si bien que nous sommes amenés à utiliser d'autres variantes plus maniables. Pour ce faire, une méthode quasi-Newton, en se basant sur l'algorithme GMRES de Saad et Schultz [8] (Generalised Minimum RESidual Method), est développée (voir aussi Zdenek et al [9]). En effet, la mise en oeuvre de la méthode de Newton-Raphson nécessite le calcul des premières variations de toutes les fonctionnelles présentes dans la formulation dont les expressions analytiques exactes sont ardues à obtenir, spécialement en présence d'une méthode de décentrage. D'autre part, la résolution directe du système (4.1) nécessite un stockage de matrices de grandes dimensions surtout pour les applications industrielles. La méthode GMRES permet d'éviter ces difficultés; elle ne nécessite que le calcul de vecteurs résidus successifs et des produits scalaires. Nous ne présentons pas plus de

détails étant donné que cet aspect n'est pas vraiment une contribution originale de cet article.

## 6. Résultats numériques

Nous nous intéressons à l'étude du comportement numérique de la méthode de stabilisation S.U.F.L; celle-ci devra permettre la simulation d'écoulements compressibles visqueux et d'écoulements à surface libre dans une large gamme de nombres de Mach ou de Froude caractérisant les écoulements transsoniques ou transcritiques, et éventuellement elle pourra s'étendre jusqu'à la frontière supersonique ou supercritique.

Les essais portent sur des écoulements externes autour d'un profil *NACA-0012*. Le maillage utilisé comporte 8150 éléments, ce qui nous a permis de bien capter le choc, aussi bien que la couche limite et le sillage. Le même domaine sert pour traiter le problème analogue d'écoulement isotherme à surface libre et à profondeur constante autour d'une pile de pont présentant un profil aérodynamique; dans ce cas, nous négligeons les frottements du fond ( $c \rightarrow \infty$ ).

Les conditions aux limites utilisées sont les suivantes:

sur la partie amont de la frontière  $\Gamma_{\infty}^-$ :

$$\underline{u} = \underline{u}_{\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

écoulements compressibles-visqueux,

$$\rho = \rho_{\infty} = 1$$

$$T = T_{\infty} = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} \frac{1}{M_{\infty}^2}$$

écoulements à surface libre,

$$\rho = \rho_{\infty} = \frac{u_{\infty}^2}{gFr^2}$$

sur la partie aval de la frontière  $\Gamma_{\infty}^-$ :

$$\underline{\tau} \cdot n = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

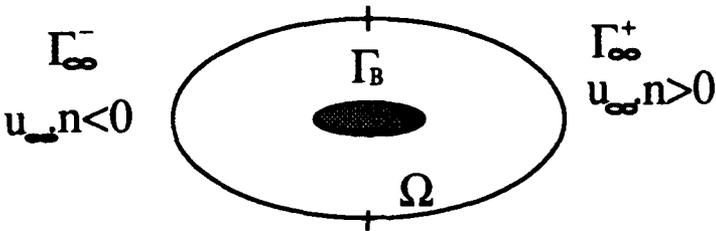
sur la paroi  $\Gamma_B$ :

$$\underline{u} = 0, \text{ (condition d'adhérence)}$$

pour les écoulements compressibles visqueux

$$T = T_B = T_{\infty} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \right)$$

Les portions de la frontière  $\Gamma$  sur lesquelles s'appliquent ces conditions aux limites sont présentées à la figure suivante.



Nous avons effectué une simulation des écoulements compressibles visqueux et à surface libre à un nombre de Reynolds 500 et à un nombre de Mach ou Froude 0.85 dans le but de mettre à l'épreuve une première fois le comportement de la formulation. Ces écoulements sont transsoniques; toutefois, étant donné le faible nombre de Reynolds, et donc l'influence importante des contraintes visqueuses, il n'y a pas de formation d'onde de choc. En augmentant le nombre de Reynolds, on observe le développement d'une onde de choc (*figures 1 et 2*). La *figure 3* montre une comparaison des résultats des coefficients de pression avec ceux de Cambier[10] et de Boivin[11] pour  $Re = 2000$ . A partir d'un nombre de Reynolds  $Re = 2000$ , l'écoulement à surface

libre présente un sillage instationnaire, l'onde de choc est relativement mince et subit une pulsation latérale (*figures 4 et 5*). Pour l'écoulement compressible visqueux, le phénomène de sillage instationnaire se produit à un nombre de Reynolds  $R_e = 2500$ . Ces phénomènes sont plus apparents pour un nombre de Reynolds  $R_e = 10000$  comme le montrent les *figures 7 à 10*. La *figure 9* montre la répartition des coefficients de pression respectivement sur l'intrados et l'extrados. Des champs de vitesse à deux instants différents sont présentés aux *figures 8 et 11*, qui montrent le décrochement de tourbillons alternés au sillage. On remarque en particulier aux *figures 7 et 10* l'effet de pulsation latérale de l'onde de choc et l'extrême minceur de la couche limite. Remarquons aussi la présence de poches supersoniques et supercritiques dans le sillage.

### Remarque 6.1

Dans l'ensemble des figures, une isoligne plus foncée et brisée par endroit marque l'isovaleur unité.

Bien que les phénomènes de choc et de sillage sont similaires en écoulements à surface libre et compressibles ils ne sont pas pour autant parfaitement identiques, ceci s'explique par le fait que les équations d'état respectives sont différentes. ■

## 7. Conclusions

Nous avons développé une formulation d'éléments finis unifiée pour résoudre les équations de Navier-Stokes et de Saint-Venant. Ces équations utilisent les variables  $(\underline{u}, \sigma, T)$  au lieu des variables primitives classiques. La discrétisation doit toutefois utiliser des approximations polynômiales respectant la condition *inf - sup*. La méthode de stabilisation S.U.F.L est basée sur l'idée du décentrage amont combiné avec une technique de limiteur de flux. Elle n'introduit la diffusion numérique que lorsque celle-ci est vraiment nécessaire. La version actuelle de la méthode S.U.F.L nous a permis de simuler des écoulements transsoniques ou transcritiques instationnaires à des nombres de Reynolds élevés. Les résultats

numériques obtenus démontrent la finesse de la méthode de stabilisation S.U.F.L. et la possibilité d'exploiter l'analogie qui existe entre les écoulements compressibles visqueux et les écoulements à surface libre. Les travaux sont en cours pour améliorer la robustesse de la méthode et pour tester d'autres types de détecteur et de fonction de diffusion.

## 9. Références

- [1] T.J.R. Hughes and M. Mallet., "A new finite element method for computational fluid dynamics III.", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58 (1986).
- [2] G. Dhatt., A. Soulaïmani., Y. Ouellet and M. Fortin., "Development of New Triangular Elements for Free Surface Flows.", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 6, pp. 895-911, (1986).
- [3] M.O. Bristeau., R. Glowinski., B. Mantel., J. Périaux., G. Rogé., "Acceleration of compressible Navier-Stokes calculations, Numerical Methods For Fluid Dynamics III.", Clarendon Press Oxford (1988).
- [4] M. Fortin., A. Soulaïmani., "Finite element approximation of compressible viscous flows", in *Proc. of the Int. Conf. in Computational Methods in Flow Analysis, Okayama*, (1988).
- [5] A. Soulaïmani., M. Fortin., G. Dhatt., Y. Ouellet., and F. Bertrand., "Simple Continuous Elements For Two and Three Dimensional Incompressible Flows.", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 62, pp. 47-69, (1987).
- [6] M. Tabata and M. Yaoi., "Upwind Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equation and its Application to a Free surface problem.", in *Proc. of the Int. Conf. in Computational Method in Flow Analysis, Okayama*, (1988).

- [7] P.K. Sweby., "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws," *SIAM J. Num. Anal.*, 21, pp 995-1011 (1984).
- [8] Y. Saad and M. H. Schultz., "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 7 (1986).
- [9] J. Zdenek., T.J.R. Hughes and S. Farzin., "A Globally Convergent Matrix-Free Algorithm for Implicit Time-Marching Schemes Arising in Finite Element Analysis in Fluids.", To appear in: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [10] L. Cambier., "Computation of Viscous Transonic Flows Using and Unsteady Type Method and a Zonal Grid Refinement Technique.", O.N.E.R.A, France, 1985.
- [11] S. Boivin., "Simulation d'écoulements compressibles à nombre de Reynolds élevé.", Thèse de doctorat, Université Laval, 1990.

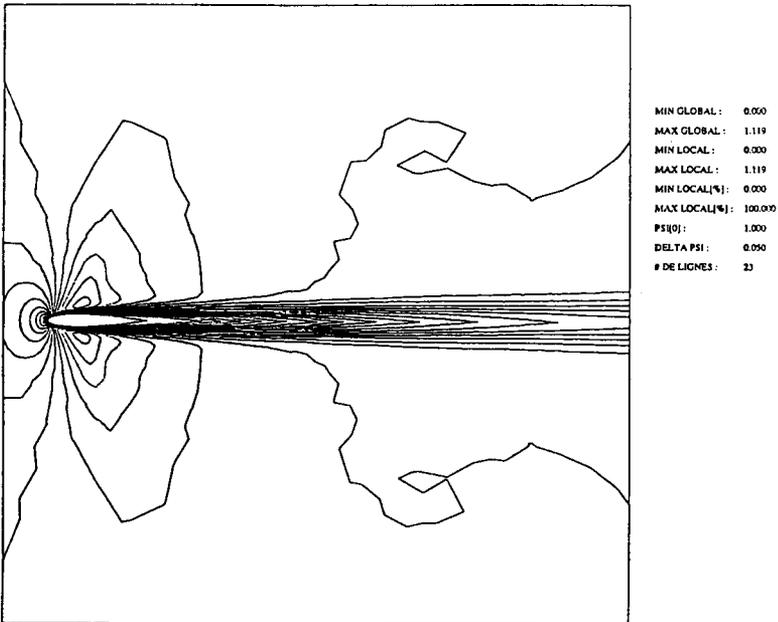
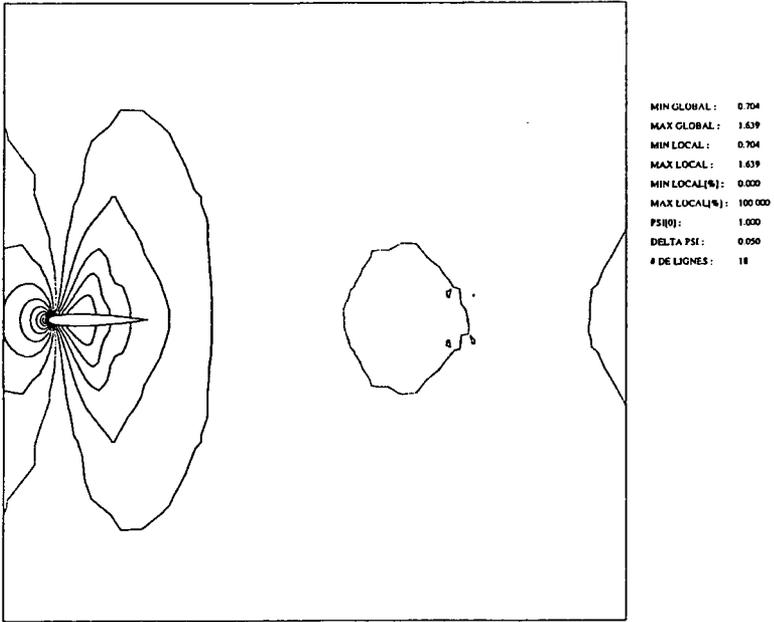


Figure 1: Ecoulements compressibles-visqueux  
 a) iso-bares, b) iso-Mach,  $Re=2000$ ,  $Ma=0.85$

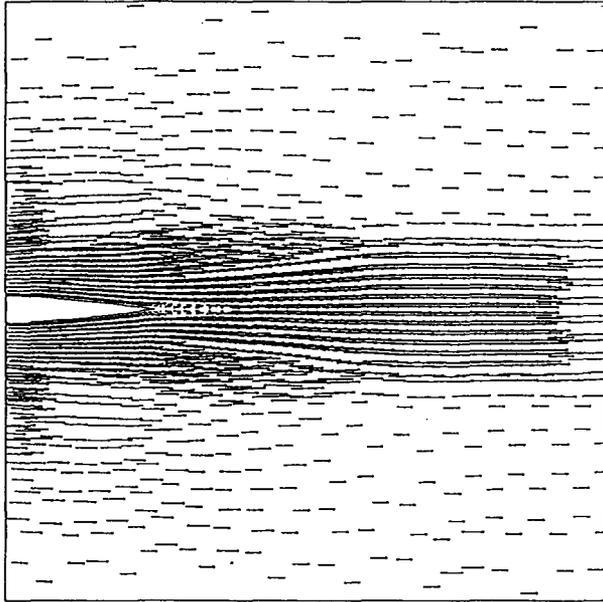


Figure 2: Ecoulements compressibles-visqueux  
Vitesse,  $R_e=2000$ ,  $Ma=0.85$

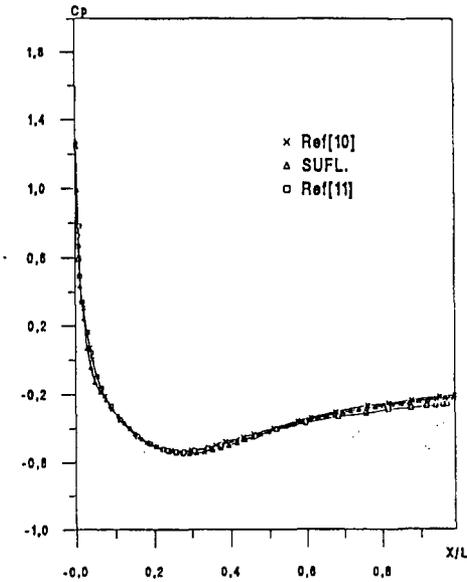


Figure 3: Ecoulements compressibles visqueux  
 $C_p$ ,  $R_e=2000$ ,  $Ma=0.85$

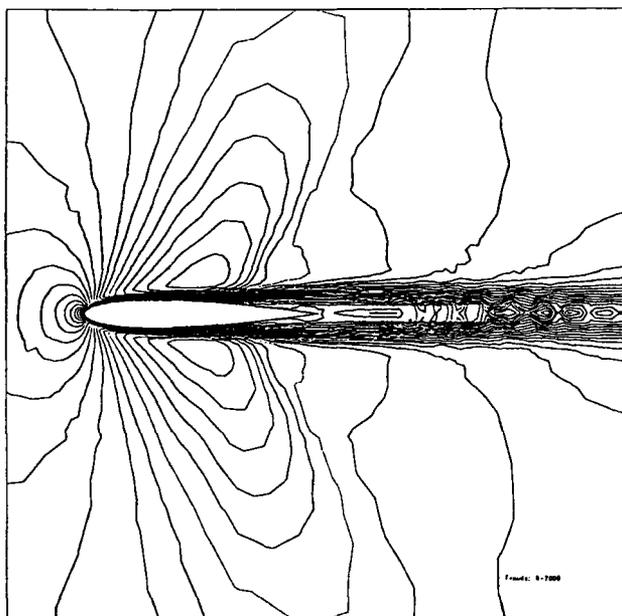
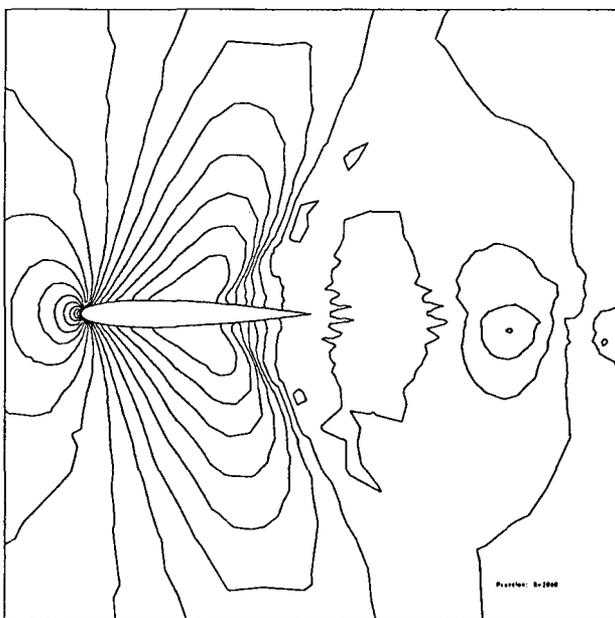


Figure 4: Ecoulements à surface libre  
 a) iso-bares, b) iso-Froude,  $Re=2000$ ,  $Fr=0.85$

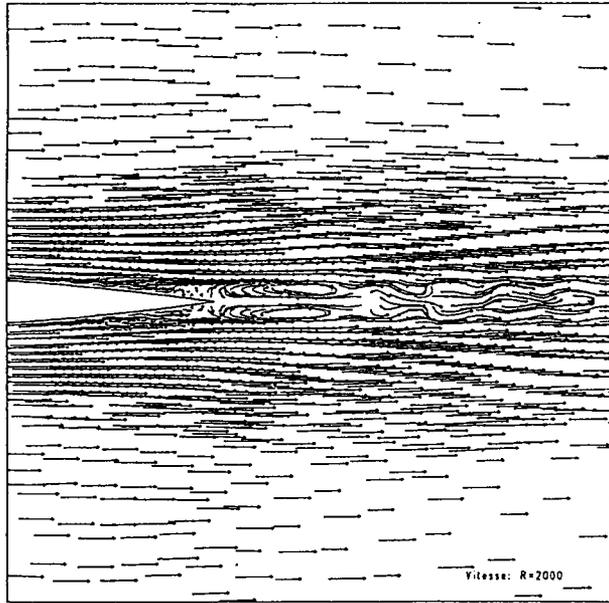


Figure 5: Ecoulements à surface libre  
Vitesse,  $R_e=2000$ ,  $Fr=0.85$

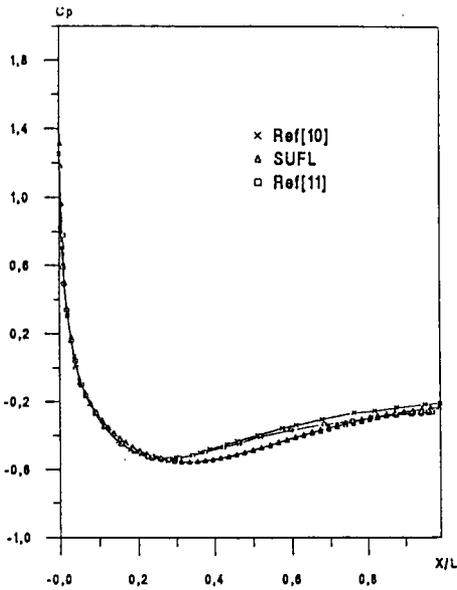


Figure 6: Ecoulements à surface libre  
 $C_p$ ,  $R_e=2000$ ,  $Fr=0.85$

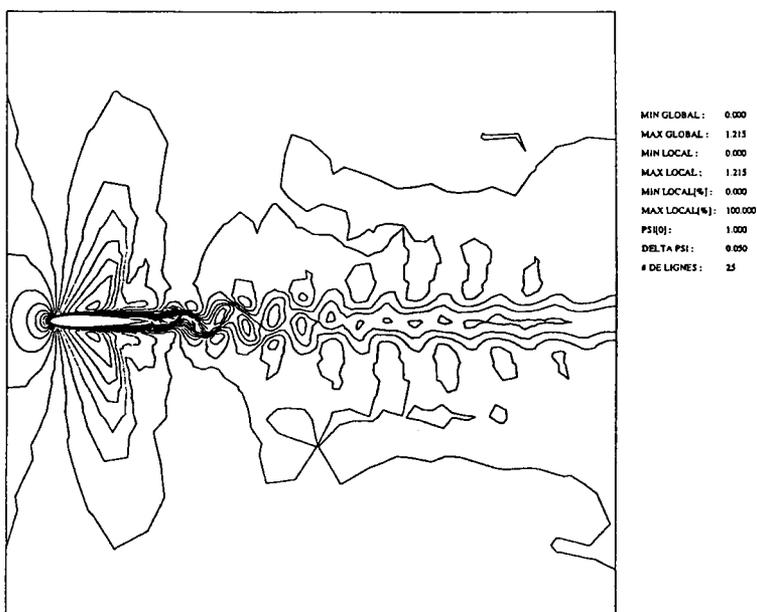
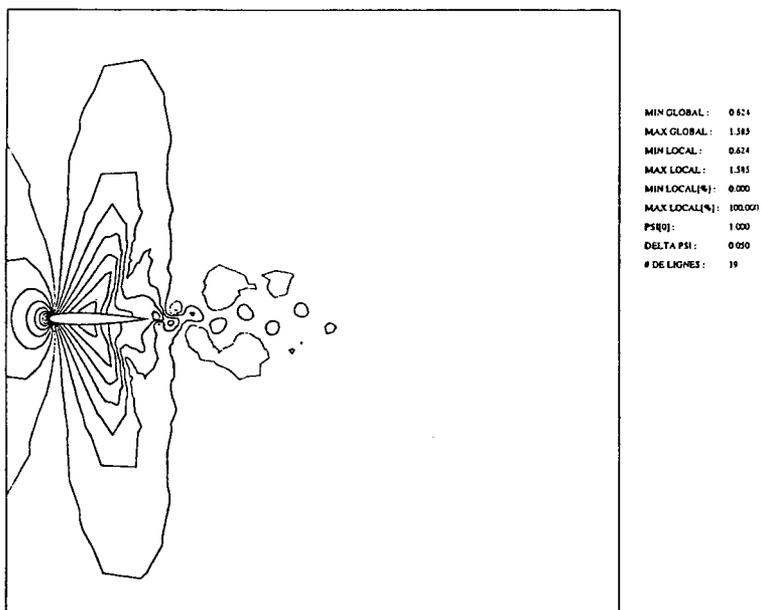


Figure 7: Ecoulements compressibles-visqueux  
 a) iso-bares, b) iso-Mach,  $R_e=10000$ ,  $Ma=0.85$

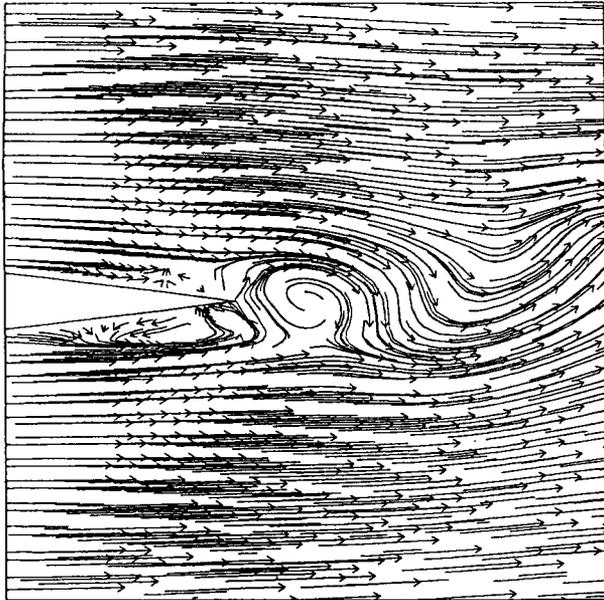
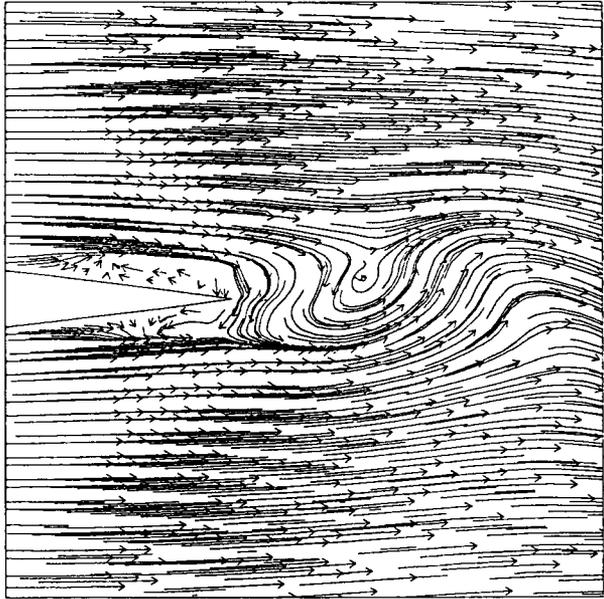


Figure 8: Ecoulements compressibles-visqueux  
Vitesse à deux instants différents  
a) et b),  $R_e=10000$ ,  $Ma=0.85$

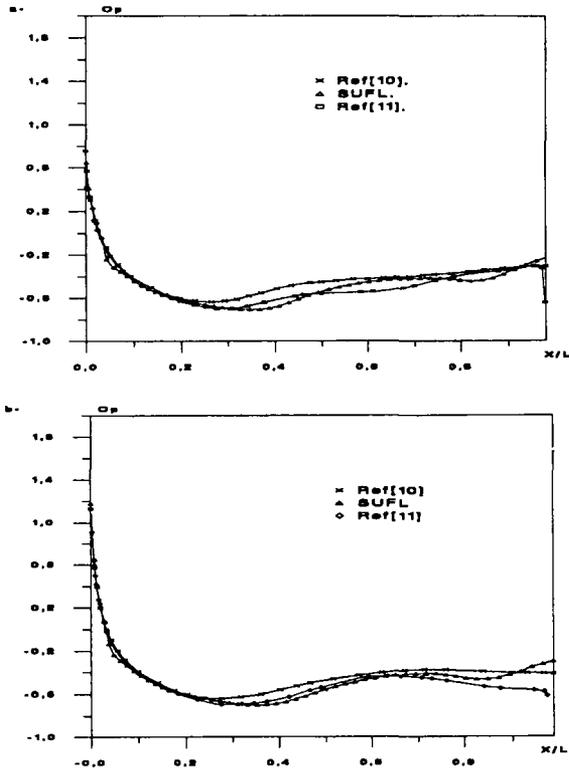
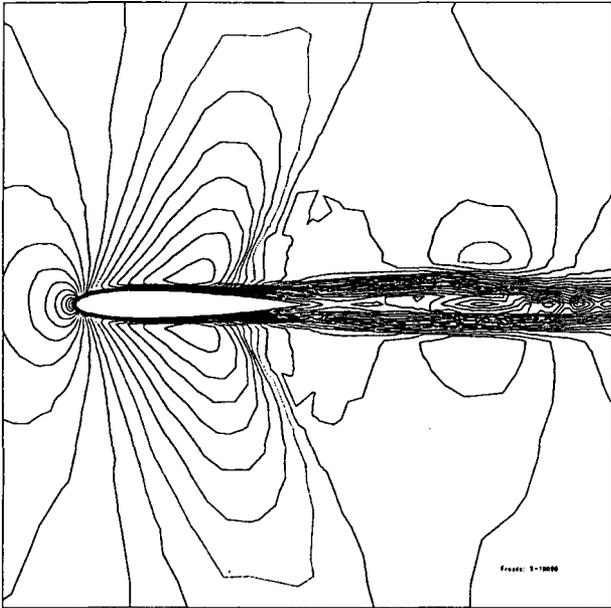
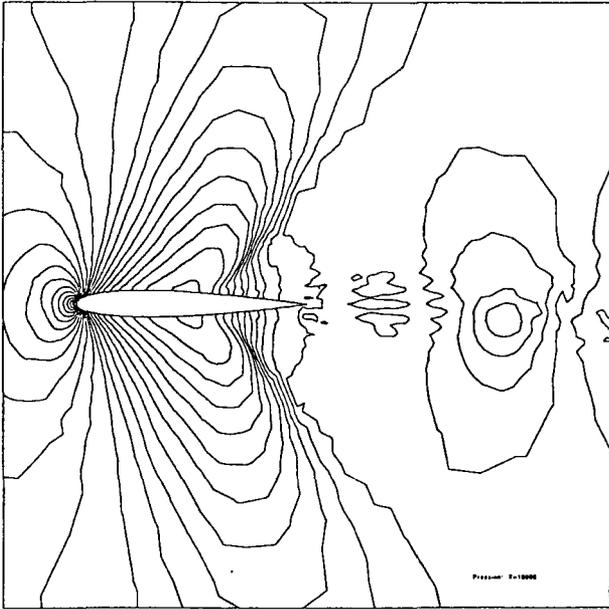


Figure 9: Ecoulements compressibles-visqueux  
 $C_p$ ,  $R_e=10000$ ,  $Ma=0.85$



MIN GLOBAL: 0.000  
MAX GLOBAL: 1.366  
MIN LOCAL: 0.000  
MAX LOCAL: 1.366  
MIN LOCAL(%): 0.000  
MAX LOCAL(%): 100.000  
PSI(1): 1.000  
DELTA PSI: 0.055  
# DE LIGNES: 25

Figure 10: Ecoulements à surface libre  
a) iso-bares, b) iso-Froude,  $R_e=10000$ ,  $Fr=0.85$

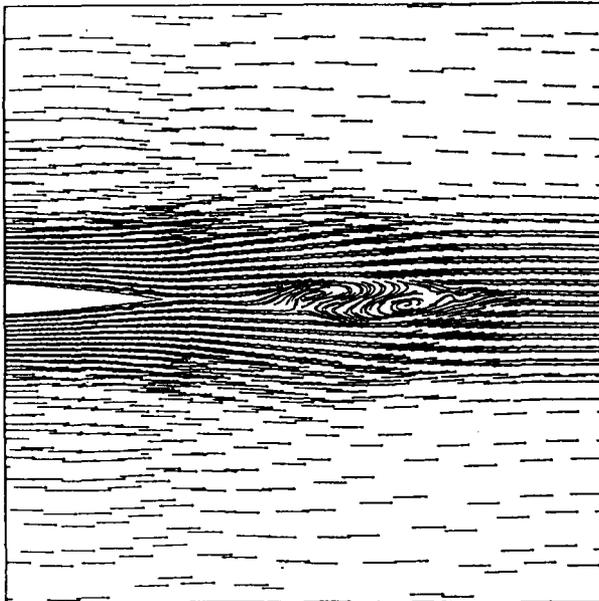
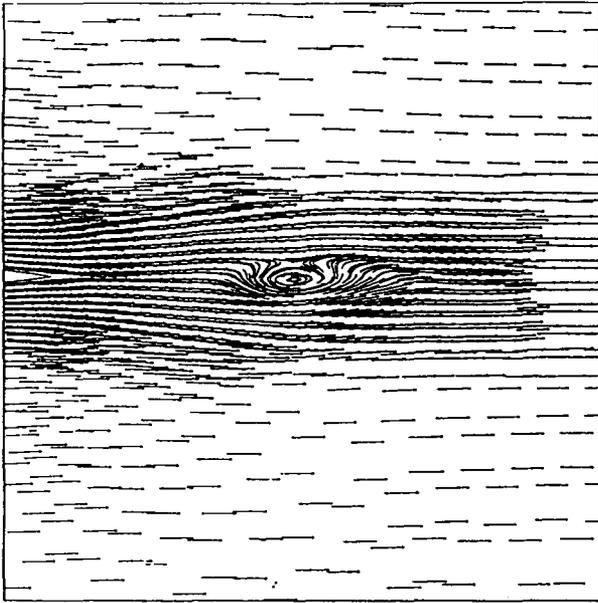


Figure 11: Ecoulements à surface libre  
Vitesse à deux instants différents,  $R_e=10000$ ,  $Fr=0.85$