
La maîtrise des modèles en mécanique des structures

Erreurs et améliorations adaptatives

Pierre Ladevèze

Laboratoire de mécanique et technologie
ENS Cachan, CNRS, université Paris 6
61 avenue du Président Wilson 94235 Cachan cedex

RESUME. La construction de modèles et leur simulation numérique sont plus que jamais des activités majeures en mécanique. Une préoccupation constante, tant au niveau industriel qu'à celui de la recherche, a été de maîtriser ces modèles qui peuvent aujourd'hui atteindre une très grande complexité. Le fait nouveau est que sont apparus, depuis une quinzaine d'années, des outils véritablement quantitatifs pour apprécier la qualité d'un modèle, la référence pouvant être expérimentale ou théorique. Deux thèmes ont été retenus pour illustrer ces nouvelles démarches : le contrôle adaptatif de modélisation éléments finis, c'est-à-dire la maîtrise du calcul proprement dit, et le contrôle-recalage de modèle à partir de résultats expérimentaux.

Après avoir présenté l'état de l'art et les problèmes de recherche, nous détaillons l'approche développée au L.M.T. de Cachan qui est fondée sur la notion d'erreur en relation de comportement et sur des techniques associées. Différents exemples illustrent les possibilités de ces nouveaux outils. Cet article a fait l'objet d'une conférence, à l'occasion du cinquantenaire du LMA-Marseille, en avril 1991.

ABSTRACT. Today, the construction and numerical simulation of models is, more than ever, a major activity in the field of mechanics. A constant concern in both industrial and research environments has been the control of these models, which can, nowadays, reach very high levels of complexity. A new factor during the past fifteen years has been the development of truly quantitative tools for testing the quality of a model either theoretically or with the help of experiments. The following two themes have been used to illustrate these new procedures : the adaptive control of finite element modeling (i.e. the control of the actual calculation), and the control and adjustment of models based on the results of experiments.

After presenting the state of the art and the difficulties involved in research, we explain in detail the approach developed at L.M.T. of Cachan, which is based on the concept of error in constitutive relations and associated techniques. Various examples illustrate the possibilities afforded by these new tools.

MOTS-CLES : mécanique, erreur a posteriori, adaptativité, corrélation modèle/essais, recalage, maillage, vibrations.

KEY WORDS : mechanics, a posteriori errors, adaptativity, model/test, correlation, ajustement technic, mesh, vibrations.

1. Introduction

En mécanique, comme en d'autres domaines, les nouvelles possibilités en matière de simulation expliquent l'exploitation, aujourd'hui banale et quotidienne, de modèles jugés très complexes il y a seulement 10 ans. Au niveau industriel, une modification profonde des méthodes de travail est perceptible, notamment dans les bureaux d'études. Cet engouement, qui ne fait que débiter, suit l'évolution extraordinaire de l'informatique tant au niveau des matériels que des logiciels. La confiance dans les calculs s'est accrue et la simulation joue un rôle de plus en plus fort au détriment des essais, beaucoup plus coûteux. Malgré tout, ces derniers resteront indispensables, ne serait-ce que pour valider et contrôler le modèle qui a été construit. Le dialogue calcul-expérience est en train de changer : une tendance est, semble-t-il, de faire moins d'essais, mais de les faire mieux, notamment en s'appuyant sur le calcul lui-même. Pour illustrer ce nouveau dialogue, nous traiterons du contrôle et de l'amélioration de modèles éléments finis des vibrations de structures complexes, à partir de résultats d'essais sur les premiers modes et fréquences propres.

Pour représenter un problème physique, il n'existe pas un modèle mais une cascade de modèles. Les impératifs d'ordre pratique et le souci d'exploiter certaines situations particulières conduisent souvent à l'introduction, dans un premier modèle (que l'on peut qualifier de référence), d'hypothèses simplificatrices supplémentaires, dites de condensation, qui définissent un nouveau modèle plus abordable. Il en est ainsi des hypothèses de passage d'un modèle continu, qui décrit un milieu soumis à un environnement donné, à un modèle éléments finis, où interviennent des paramètres comme taille et type des éléments, nombre des itérations, durée des incréments, ...

Une question importante est bien évidemment de ne pas dénaturer le modèle de référence et donc de contrôler les hypothèses simplificatrices supplémentaires. Vu l'immensité d'un tel sujet — sur lequel nous n'avons aujourd'hui que des réponses partielles —, cette présentation est volontairement tronquée ; le choix s'est porté sur la fiabilité et le contrôle de modèles éléments finis, c'est-à-dire sur la maîtrise du calcul proprement dit. Des progrès considérables ont été faits depuis une quinzaine d'années et on peut imaginer que dans un avenir proche — au moins pour les problèmes linéaires — le maillage et sa réalisation ne seront plus à la charge de l'utilisateur qui se bornera à afficher une valeur caractérisant la qualité demandée.

2. Contrôle de modèles E.F.

La situation est décrite en figure 1.

D'un côté, la structure réelle est modélisée ; la solution de référence est constituée par un champ de déplacement U et un champ de contrainte σ . U est cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifie les équations de liaison tandis que σ , statiquement admissible, vérifie les équations d'équilibre. De l'autre côté, la modélisation E.F. qui,

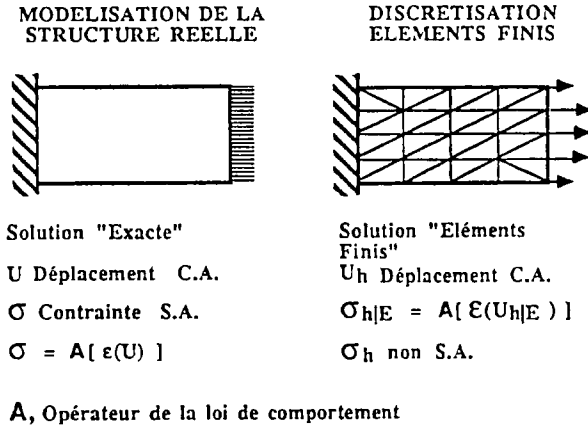


Figure 1. Présentation du contrôle de modèle E.F.

pour la version la plus utilisée, la méthode des déplacements, conduit à un déplacement U_h et une contrainte σ_h où U_h est C.A. Par contre, la contrainte σ_h ne vérifie pas les équations d'équilibre.

La première question, tout à fait légitime, est de savoir si la modélisation E.F. donne des résultats corrects, c'est-à-dire suffisamment proches de la solution de référence ; c'est le problème de l'évaluation de la qualité de la modélisation E.F. Dans la mesure où l'on sait répondre à cette question, on peut passer à un problème plus difficile : comment réaliser un maillage qui, tout en assurant la qualité demandée, minimise le coût des calculs.

2.1. Problème de base : définition et évaluation d'une mesure de l'erreur

Deux situations se présentent selon que l'erreur est évaluée avant ou après avoir effectué le calcul E.F.. Dans le premier cas, les erreurs sont qualifiées de *a priori* et on en a aujourd'hui des évaluations grossières. La seconde situation est plus favorable, car on peut utiliser une information supplémentaire, la solution E.F. U_h , σ_h . C'est le domaine des erreurs *a posteriori*. Les premières recherches sont apparues il y a une dizaine d'années et on peut dire que dans un avenir proche, au moins en linéaire, les codes de calcul industriels contiendront des outils d'évaluation d'erreur. Il y a, en schématisant, trois démarches :

- la première est basée sur la notion d'indicateur d'erreur associé à la vérification des équations d'équilibre (voir Babuska et Rheinboldt 1978, Babuska 1986, Zienkiewicz 1983-1986, Kelly 1983, Miller 1981, Szabo 1986) ;

- la seconde est fondée sur le concept d'erreur en relation de comportement et sur une technique associée de construction de contraintes S.A. (voir Ladevèze 1975,

1983, 1986, 1989 — Guézel 1981 — Bussy 1984 — Coffignal 1986 — Pelle 1985, 1988, 1989).

— la troisième est construite sur le défaut de régularité de la solution éléments finis (voir Zienkiewicz — Zhu 1987, Zhong — Beckers 1990).

Notion d'indicateur d'erreur. Le problème de référence, supposé linéaire, peut s'écrire formellement

$$L [U] = f$$

où f est la charge donnée, L l'opérateur intégral-différentiel et U ce que l'on cherche.

L'erreur $W = U - U_h$ est la solution de :

$$L [W] = f - L[U_h]$$

Le second membre est le résidu, dont la nullité entraîne celle de l'erreur W . Le problème est de définir une norme pour l'évaluer. Prenons l'exemple de l'élasticité :

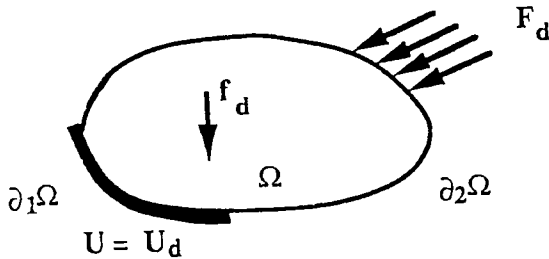


Figure 2. *Problème étudié*

La structure, de domaine Ω , est soumise à des forces volumiques f_d et à des forces surfaciques F_d sur la partie $\partial_2\Omega$ de la frontière. Sur la partie complémentaire, le déplacement U_d est imposé. Toutes les quantités indexées par "d" sont des données. L'erreur W est alors solution du problème :

$$\text{Trouver } W \in \mathbb{W} = \{W' \mid \text{nul sur } \partial_1\Omega + \text{Régularité}\}$$

$$\forall W^* \in \mathbb{W}$$

$$\int_{\Omega} \text{Tr} [\mathbb{K} \varepsilon (W) \varepsilon (W^*)] d\Omega = \int_{\Omega} f_d \cdot W^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} F_d \cdot W^* dS - \int_{\Omega} \text{Tr} [\sigma_h \varepsilon (W^*)] d\Omega$$

Le second membre, c'est-à-dire, le résidu est nul si la contrainte E.F. vérifie les

équations d'équilibre. L'indicateur d'erreur usuel est construit à partir d'un indicateur d'erreur local associé à l'élément noté E :

$$I_E^2 = \frac{a^2 \int_E [\operatorname{div} \sigma_h + f_d]^2 d\Omega + b^2 \int_{\partial E} [\sigma_h N - F]^2 dS}{[\sigma_h^*]^2}$$

où a, b : constantes

$$\sigma_h^{*2} = \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega} \int_{\Omega} \operatorname{Tr} [\mathbb{K}^{-1} \sigma_h \sigma_h] d\Omega$$

L'effort F est égal à la contrainte normale relative aux éléments adjacents. Si la partie de ∂E est dans $\partial_2 \Omega$, F est égal à l'effort donné F_d . Le résidu "frontière" est pris nul si la partie considérée de ∂E est dans $\partial_1 \Omega$. L'indicateur d'erreur global est alors :

$$I^2 = \sum_E I_E^2$$

et on a : $I = 0 \Rightarrow (U_h, \sigma_h) : \text{solution exacte}$

Le terme "indicateur d'erreur" vient du fait qu'un tel choix est quelque peu artificiel. Il n'y a pas de choix qui mécaniquement s'impose ! Les principales questions portent sur les liens entre l'indicateur d'erreur I et l'erreur classique en solution $\left(\frac{\|U - U_h\|}{\|U_h\|} \right)$. Egalement lié à ce problème, celui de la détermination des valeurs optimales des constantes a, b associées à une valeur quasi constante du rapport entre indicateur d'erreur et erreur en solution. Une réflexion est aussi menée sur la construction d'autres indicateurs d'erreur, plus performants que ceux que l'on connaît actuellement.

Notion d'erreur en relation de comportement. Le premier point est que l'on associe à la solution E.F. un couple déplacement-contrainte $(\hat{U}_h, \hat{\sigma}_h)$ qui vérifie exactement les deux premières équations. Il n'y a pas de difficulté pour l'équation de liaison car on prend :

$$\hat{U}_h = U_h$$

Par contre, le champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ est issu d'une technique générale de construction. Cette technique est explicite et met en jeu les données du problème ainsi que la contrainte E.F. σ_h ; on utilise notamment le fait que la contrainte E.F. vérifie en moyenne les équations d'équilibre. Cette technique est exploitée dans le calcul de charges limites par Maunder (1991).

Ainsi le doute est focalisé sur la vérification de la relation de comportement ; on pose

$$\mathbb{E}_h = \hat{\sigma}_h - \mathbb{K} \epsilon(\hat{U}_h)$$

Si l'erreur en relation de comportement \mathbb{E}_h est nulle sur Ω , il est clair que la solution E.F. coïncide avec la solution exacte. De plus, pour évaluer cette erreur, dont l'interprétation physique est particulièrement nette, il existe, contrairement au cas précédent, des mesures qui, sur le plan mécanique, s'imposent : les mesures énergétiques.

L'erreur globale en relation de comportement est alors :

$$\epsilon_h^2 = \frac{\|\mathbb{E}_h\|^2}{\|\hat{\sigma}_h + \mathbb{K} \epsilon(\hat{U}_h)\|^2} = \sum_E \epsilon_{Eh}^2$$

Une erreur locale peut être définie à partir des contributions des éléments :

$$\eta_h = \sup_E \left[\epsilon_{Eh} \left(\frac{\text{mes } \Omega}{\text{mes } E} \right)^{1/2} \right]$$

Le lien avec l'erreur classique en solution se traduit au niveau global par le théorème de Prager-Syngé 1947 :

$$\frac{\|\sigma - \sigma_h\|^2 + \|U - U_h\|^2}{\|\sigma_h^*\|^2} = 2 \epsilon_h^2$$

(avec $\sigma_h^* = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_h + \mathbb{K} \epsilon(\hat{U}_h))$) $\frac{\|\sigma - \sigma_h^*\|}{\|\sigma_h^*\|} = \epsilon_h$

Il existe également des liens entre les erreurs locales, mais il s'agit d'inégalités. En outre, il est à noter que le rapport des erreurs globales en relation de comportement et en solution est quasi constant ; l'expérimentation numérique conduit à une valeur qui oscille entre 1,2 et 1,5.

Si on compare les démarches, la première et la dernière sont indiscutablement les plus aisées à mettre en œuvre. La seconde est plus générale et s'étend simplement aux problèmes de dynamique, aux problèmes non linéaires (plasticité, viscoplasticité, ..., grandes transformations) et aux formulations mixtes. Le surcoût dû à l'évaluation de l'erreur est extrêmement faible, quelques pour-cent du coût total.

Pour montrer que la deuxième voie n'est pas limitée aux problèmes linéaires statiques, considérons pour commencer le cas de la dynamique linéaire. La notion de contrainte S.A. n'a plus de sens, les équations d'équilibre contenant un terme d'accélération, un terme en déplacement. Elle est remplacée par le concept de couple déplacement-contrainte admissible sur $[0, T]$ couple qui vérifie globalement les

équations d'équilibre et de liaison et les conditions initiales. L'erreur en relation de comportement s'écrit alors :

$$\mathcal{E}_{ht} = \frac{\sup_{\tau \leq t} \|\mathbb{E}_{h\tau}\|}{\sup_{\tau \leq t} \|\sigma_{h\tau}^*\|}$$

Si la plasticité ou la viscoplasticité est également introduite, le seul point à modifier concerne la mesure de l'erreur en relation de comportement. Les normes en énergie ne conviennent plus ; on leur substitue par exemple des mesures associées à l'inégalité de stabilité de Drucker, inégalité vérifiée par la quasi-totalité des modèles de plasticité et de viscoplasticité. Ce type d'erreur a été introduit par Ladevèze (1985) et utilisé dans l'optimisation de maillage en plasticité par Coffignal 1986 (voir aussi Ladevèze *et al.* 1986). D'une façon générale, la quantité $\|\mathbb{E}_{ht}\|^2$ s'écrit :

$$\|\mathbb{E}_{ht}\|^2 = \int_0^t dt \int_{\Omega} \text{Tr} [(\hat{\sigma}_h - \underline{\hat{\sigma}}_h) (\hat{\underline{\epsilon}}_h - \underline{\epsilon}(\hat{U}_h)] d\Omega$$

où $(\hat{\sigma}_h, \hat{\underline{\epsilon}}_h)$ sont associées sur $[0, T]$ à $(\underline{\epsilon}(\hat{U}_h), \hat{\sigma}_h)$ par la relation de comportement.

Notion d'indicateur d'erreur associé au défaut de régularité. L'indicateur d'erreur global est de la forme

$$I_h = \frac{\|\underline{\sigma}_h - \sigma_h\|}{\|(\sigma_h^*)\|}$$

$$\sigma_h^* = \frac{1}{2} (\underline{\sigma}_h + \sigma_h)$$

où $\underline{\sigma}_h$ est la projection sur les fonctions de base de la contrainte éléments finis σ_h .

En pratique, cette opération de projection est faite de façon approchée. Cet indicateur comme les premiers que nous avons présentés est très simple à calculer. Toutefois, il est peu "mécanique" ; il contredit le fait que la contrainte exacte n'est pas nécessairement régulière, ce qui est le cas pour une structure constituée de sous-structures faites de matériaux différents. Une autre difficulté concerne l'analyse de maillage grossier car, dans le cas limite où il y a un seul élément, l'indicateur d'erreur a pour valeur zéro.

REMARQUE. — Différents types d'erreur, d'indicateur d'erreur, d'estimateur d'erreur existent actuellement ; une question qui commence à être abordée est de préciser

leurs qualités et leurs limites respectives. Certes pour les situations banales, ils sont tous équivalents, mais il n'en est pas de même dans l'analyse de zones à fort gradient ou dans l'usage d'éléments aplatis ou encore en mécanique non-linéaire. Une première étude [Zhong 1991] portant sur la comparaison d'indicateurs du 1^{er} et 3^e type conclue à un certain avantage des premiers.

2.2. Génération de maillage

En application des méthodes d'évaluation d'erreur, il est intéressant de contrôler, de piloter les paramètres de la modélisation E.F., à commencer par ceux relatifs au maillage :

- nombre d'éléments, géométrie et taille,
- type d'élément (richesse en fonction de base).

Deux méthodes sont distinguées :

h - génération de maillage. Le type d'élément est fixé ; on joue sur la taille et la géométrie des éléments.

p - génération de maillage. Le maillage est fixé ; on enrichit localement et de façon itérative les fonctions de base pour obtenir la qualité souhaitée. La précision étant relativement médiocre, un nombre important d'itérations (d'une dizaine à plusieurs dizaines) est nécessaire. Le surcoût reste faible car on utilise des techniques itératives de résolution. A noter que ce type d'éléments est appelé *éléments hiérarchiques*.

Les développements qui vont suivre concerne la *h - génération de maillage*. Le problème est de construire un maillage (qualifié d'optimal) tel que $\epsilon_h = \epsilon_0$, (ϵ_0 étant la précision imposée) et que le nombre d'éléments soit minimum

Le schéma décrit en figure 3 présente la démarche.

Le point de départ est toujours un premier maillage, un premier calcul. L'analyse définitive est faite au dernier niveau. Ainsi, à partir des données de la solution E.F. pour le maillage grossier, on calcule la carte des erreurs locales associée à cette première analyse. Introduisant la précision imposée, on en déduit la carte des coefficients de modification de taille. Un générateur géométrique de maillage réalise effectivement le maillage en suivant ces instructions et l'analyse finale peut débiter.

Pour le calcul des coefficients de modification de taille, on s'appuie sur des résultats théoriques quant au comportement asymptotique de l'erreur locale. Le comportement de l'erreur locale est pris de la forme :

$$\epsilon = O(h^p)$$

où p dépend du type d'élément mais aussi du gradient de la solution. Dans la pratique, la valeur à utiliser est difficile à apprécier ; par contre, la valeur asymptotique ($h \rightarrow 0$) est généralement bien connue. Cette dépendance par rapport au

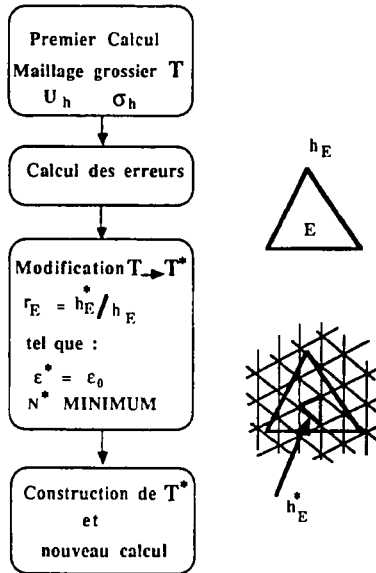


Figure 3. Schéma de la h -version de remaillage

gradient de la solution est essentielle dès qu'on utilise des éléments autres que P1 et Q1 [Coorevits - Ladevèze - Pelle 1992].

La figure 4 traite d'une structure relativement simple, maillée avec des éléments P2. L'erreur imposée ϵ_0 est de 2 %. La vérification conduit à une erreur globale très voisine et à une carte de coefficients de modification de taille où les valeurs restent proches de 1, la situation idéale. La figure 5 montre le cas d'une structure plus complexe. Le maillage optimal prévu par la théorie respecte bien les contraintes imposées ; un tel exemple est significatif des possibilités de ces méthodes. Une itération suffit généralement ; dans les cas exceptionnels où le premier maillage est trop grossier, une étape intermédiaire utilisant également un maillage grossier est mise en place. Tous les exemples présentés dans cette partie ont été traités dans [Rougeot 1989] et [Coorevits - Ladevèze - Pelle 1992].

Le gain apporté par les maillages optimisés est très important en linéaire et plus encore en non-linéaire. La figure 6, certes sur un exemple particulier, montre que pour une erreur de 2 %, le rapport des coûts calcul dépasse 100.

D'autres résultats concernant la comparaison des performances des éléments et, notamment, apportent une réponse au moins partielle à une vieille polémique : vaut-il mieux utiliser des éléments très rustiques en grand nombre que peu d'éléments sophistiqués. La figure 7 donne les courbes temps de calcul/erreur pour les éléments les plus courants, la technique de résolution étant la plus usuelle. Sur tous les exemples traités, les résultats sont identiques : il n'est pas efficace d'utiliser les éléments les plus simples. Que prendre ? Les courbes relatives aux éléments de plus

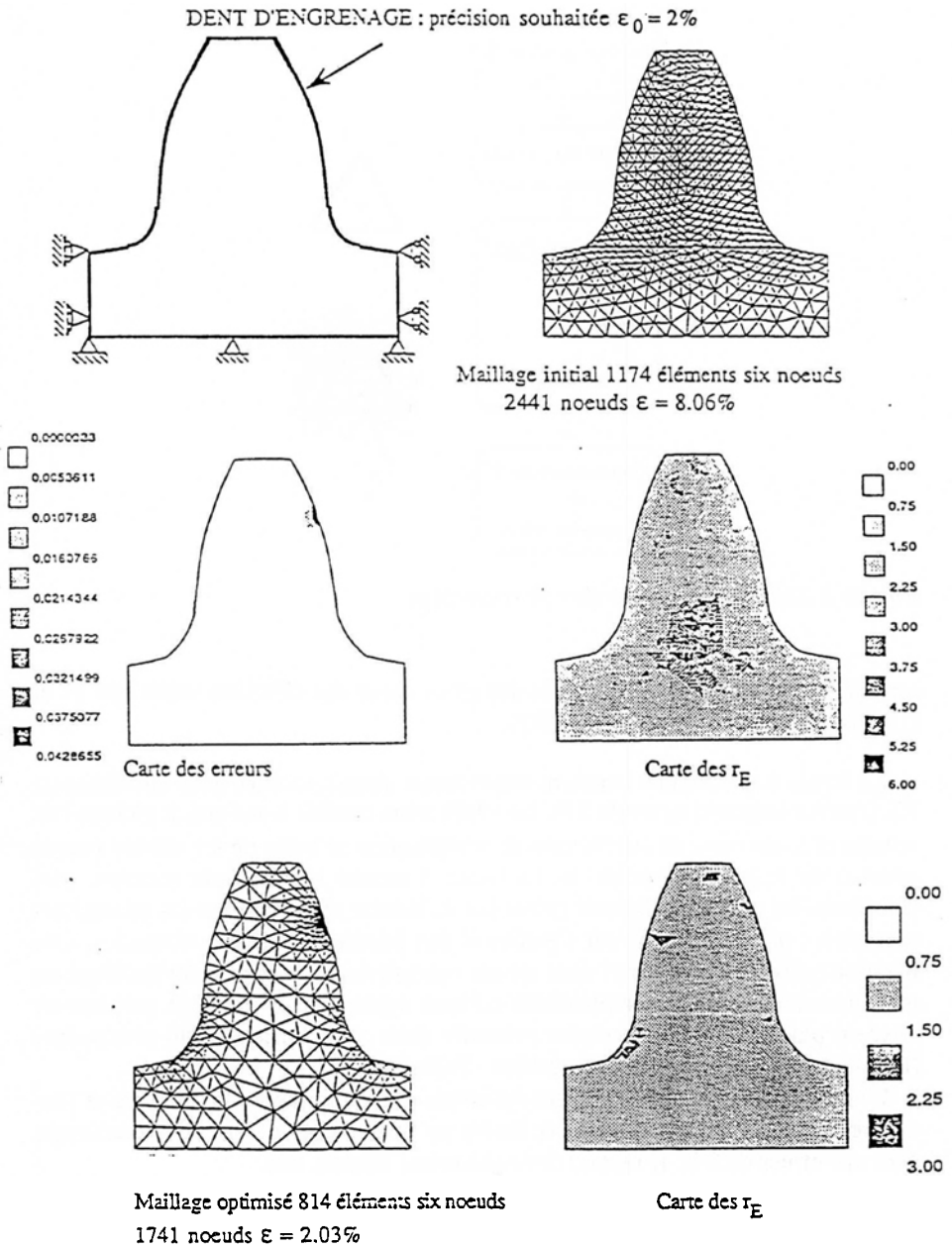


Figure 4. Analyse d'une dent d'engrenage (précision souhaitée 2%)

BARRAGE BI-MATERIAUX : précision souhaitée $\epsilon_0 = 4\%$

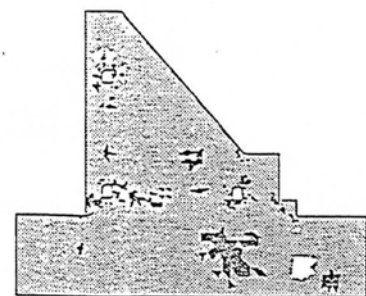
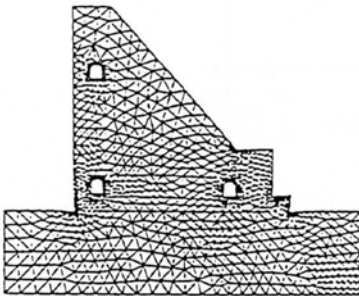
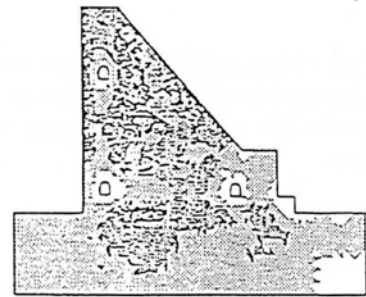
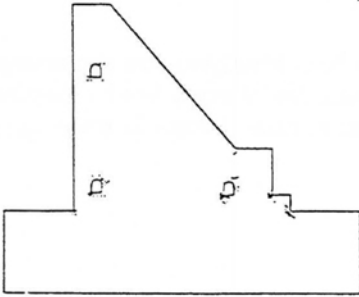
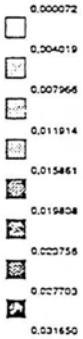
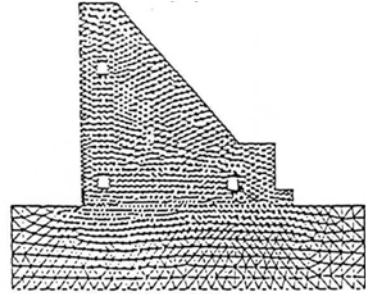
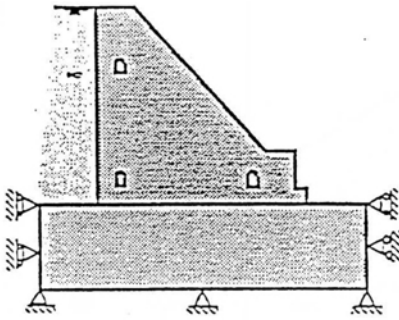


Figure 5. Analyse d'un barrage (précision souhaitée 4 %)

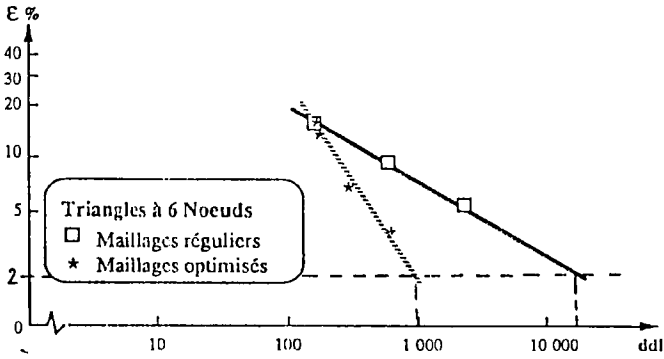


Figure 6. Erreur en fonction du nombre de ddl

en plus sophistiqués se situeraient sur la gauche et tendraient vers une asymptote. Certains prétendent qu'il est intéressant de prendre des éléments dont les fonctions de base sont des polynômes de degré dépassant 8, mais il s'agit là d'une question ouverte.

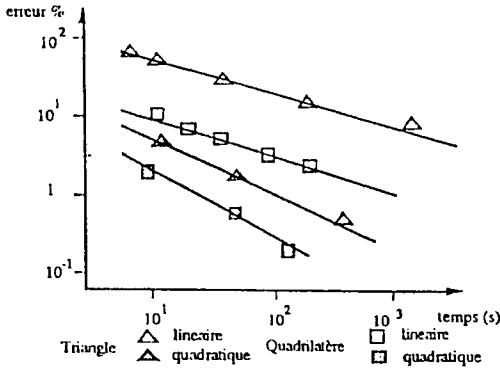


Figure 7. Erreur en fonction du temps de calcul pour différents éléments

Tous ceux qui construisent des maillages, et ils sont nombreux, évitent les éléments dégénérés c'est-à-dire extrêmement aplatis. Qu'en est-il exactement du point de vue de l'erreur ?

Le maillage décrit en figure 8 contient une zone constituée d'éléments aplatis (côté/hauteur : 100). Cette zone est positionnée par l'abscisse x et on effectue des analyses pour différentes valeurs de x . La courbe x -erreur montre que cette perturbation ne conduit à une dégradation du calcul que pour des valeurs de x où il y a interaction avec les zones à fort gradient. Ainsi de tels éléments aplatis peuvent être utilisés, mais sous certaines conditions ; par exemple dans les zones où le

gradient est élevé et quasi uniforme, le maillage devra suivre les courbes ou les surfaces orthogonales au gradient.

La figure 9 donne un exemple en plasticité où une première analyse a été faite en utilisant un maillage optimal en élasticité. La courbe supérieure donne pour ce maillage l'erreur en fonction du temps. Une procédure de construction de maillage optimal voisine de celle utilisée pour les problèmes linéaires a été mise au point par

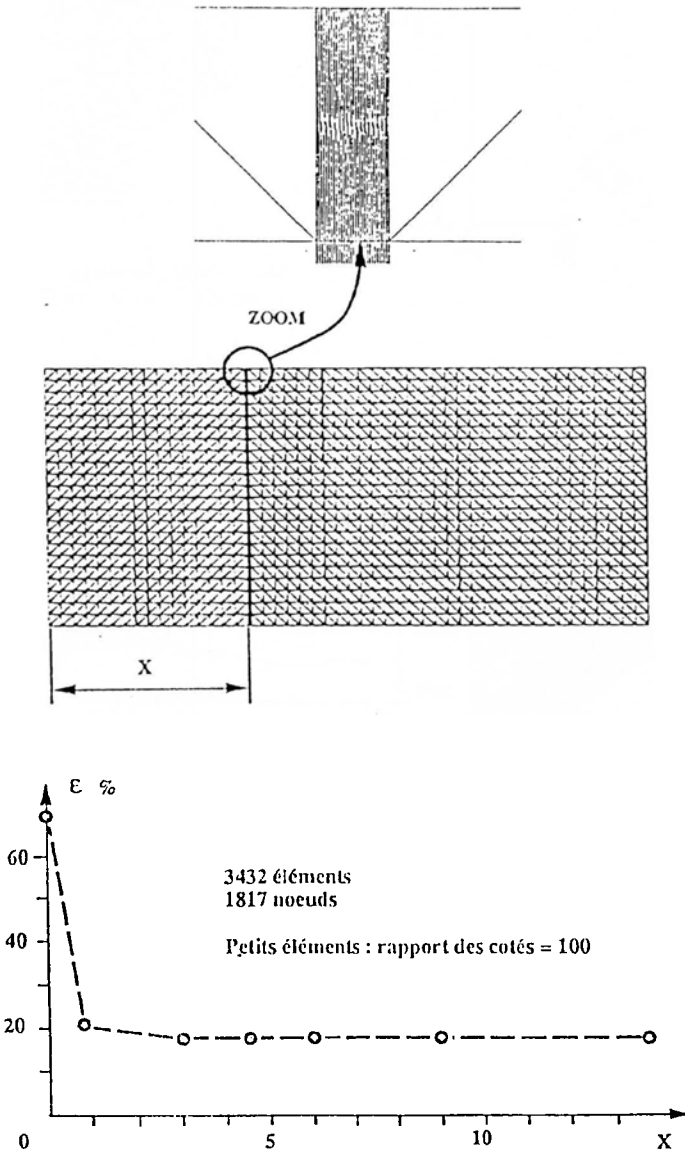
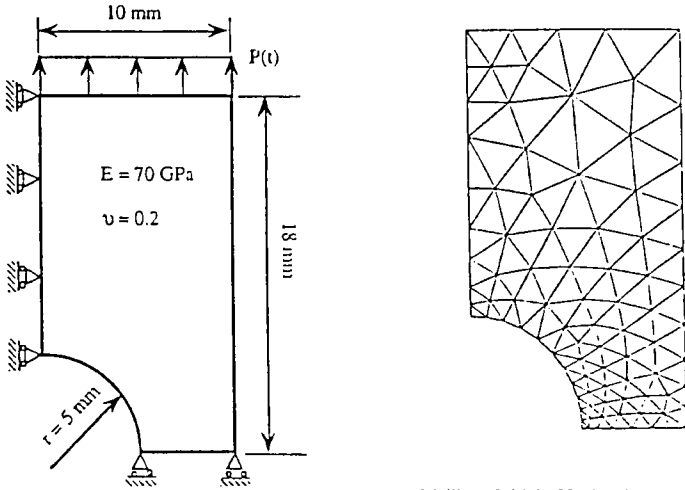
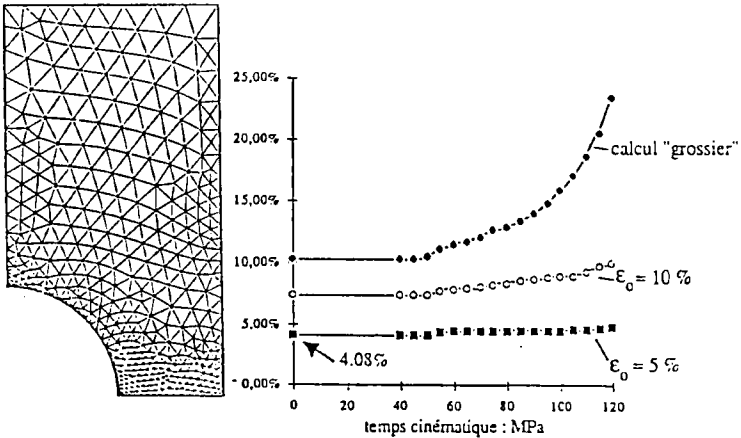


Figure 8. Analyse de l'erreur pour des maillages très déformés



Maillage Initial 139 triangles
91 noeuds $\epsilon = 24 \%$ à $t = 120$



Maillage optimisé pour $\epsilon_0 = 5 \%$
758 triangles 430 noeuds $\epsilon = 4.92 \%$

Evolution des erreurs

Figure 9. Analyse d'une structure élastoplastique

Coffignal (1986). Un premier maillage optimal sur l'intervalle $[0, T]$ a été construit pour une précision affichée de 10 % ; la figure 9 donne l'évolution de l'erreur pour le maillage optimal. Un calcul similaire a été fait pour une précision affichée de 5 % ; le maillage optimal est également présentée en figure 9.

Pour terminer cette partie, nous donnons un exemple industriel traité à

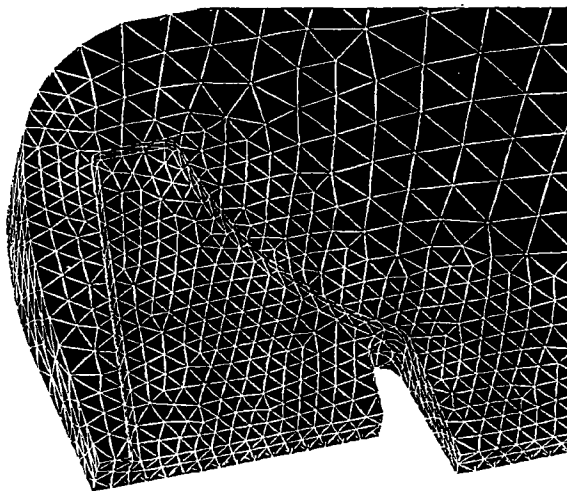
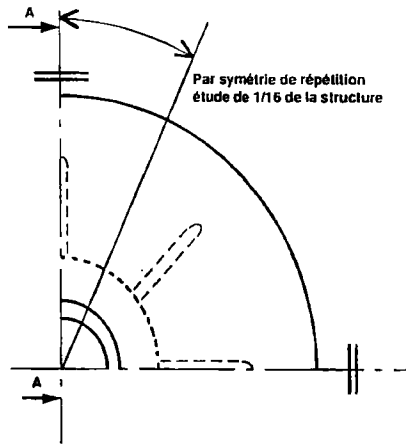
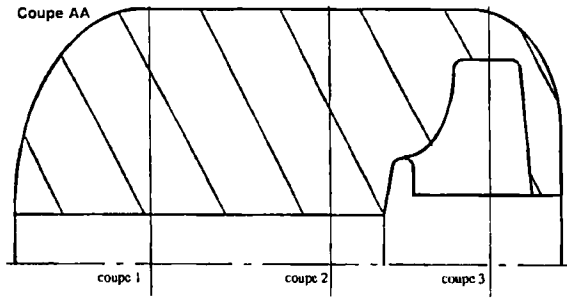


Figure 10. Analyse d'un bloc de propergol

l'Aérospatiale - Les Mureaux concernant l'analyse par éléments finis d'un bloc de propergol. Le problème est 3D et de géométrie complexe. Le matériau est quasi incompressible et une adaptation de notre méthode a donc été nécessaire [Gastine - Ladevèze - Marin - Pelle 1991]. La figure 10 précise la géométrie et le premier maillage qui comprend 17000 tétraèdres, soit environ 65000 ddls. L'erreur est 0,28.

2.3. *Quelques problèmes ouverts*

- automatisation de la réalisation de maillage en élasticité 2D et 3D,
- maillage adaptatif en dynamique (génération de maillage mobile anisotrope),
- génération de maillage pour les problèmes non-linéaires et les problèmes de vibration,
- extension aux formulations mixtes,
- couplage des outils de prévision de carte des tailles d'élément avec les outils de génération géométrique de maillage.

3. **Contrôle de modèle par l'expérience - recalage**

Les nouvelles possibilités de calcul modifient le dialogue calcul-expérience, dialogue qui bien évidemment existera toujours. Une tendance est, semble-t-il, de faire moins d'essais mais de les faire mieux, notamment en s'appuyant sur le calcul lui-même. Il est clair également que la confiance accordée aux modèles est devenue, pour certains problèmes, extrêmement forte.

Pour illustrer ce nouveau dialogue, considérons le problème de contrôle suivant : le modèle mathématique est celui des vibrations libres d'une structure complexe qui par éléments finis se résume en deux matrices, une matrice de rigidité et une matrice de masse. A côté de cette modélisation, des essais ont été effectués, les résultats portant généralement sur les premiers modes et fréquences propres. Des différences sensibles avec les prévisions du modèle peuvent apparaître ; elles sont dues aux défauts de modélisation inhérents à certaines parties difficilement modélisables, comme les assemblages, ou même à de simples erreurs dans la manipulation des données lors du calcul. Le problème est alors d'améliorer le modèle mathématique et de trouver les paramètres structuraux qui réalisent le minimum :

mini écart (calcul, expérience)

Un tel problème est né dans les années 1980 et différents travaux lui sont consacrés comme :

- [Baruch 1982, Berman 1971, Chen 1983] (approche directe)
- [Zhang-Lallement-Fillod-Piranda 1987] (linéarisation et méthode de sensibilité)
- [Berger-Barthe-Ohayon 1987] (résidu des équations d'équilibre)
- [Ladevèze-Reynier 1989] (erreur en relation de comportement et techniques associées)

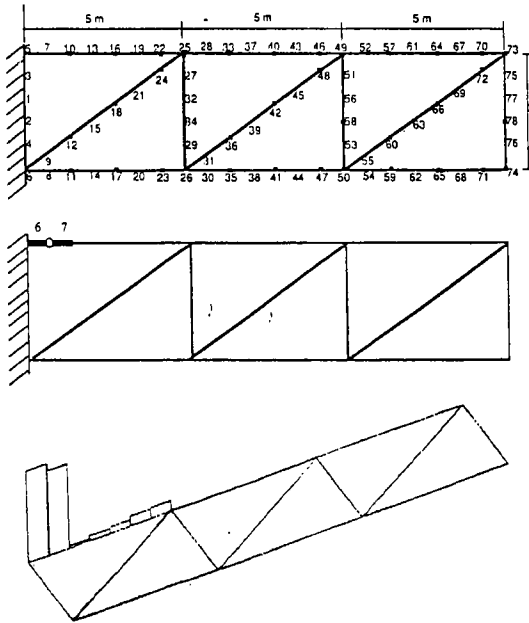


Figure 11. *Contrôle et correction d'un modèle de vibration*

Il s'agit d'un problème d'optimisation mal posé. Pour les structures complexes, il n'est pas possible de mettre en doute tous les paramètres structuraux, la question clé est de localiser les zones erronées. Une telle question est à rapprocher du contrôle de maillage, où il s'agit de détecter les zones incorrectement maillées, soit avec un maillage trop fin, soit avec un maillage trop grossier. Dans cette présentation, nous ne décrirons pas en détail les méthodes mais nous essayerons de montrer leurs possibilités sur un exemple. Les résultats sont tirés de [Ladevèze-Reynier 1989].

Le point majeur est la définition d'une erreur calcul - expérience ; une grande majorité de travaux utilise la méthode des moindres carrés ce qui signifie que la fonction utilisée, écart (calcul, expérience), est relativement simple à calculer, mais en contre-partie n'a pas une signification mécanique profonde, ce qui a des conséquences sur la qualité de la prédiction des zones erronées. Les approches fondées sur l'évaluation du résidu des équations d'équilibre et sur la notion d'erreur en relation de comportement sont les analogues des deux premières méthodes d'évaluation d'erreur présentées dans la première partie consacrée au contrôle de modèles éléments finis. Leur mise en œuvre demande un effort numérique plus important, particulièrement pour la méthode développée à Cachan, mais ces méthodes conduisent à de très bonnes prédictions.

La méthode développée à Cachan a été introduite dans Ladevèze 1983 et développée par la suite, notamment pour la procédure de correction dans [Reynier 1989] ; elle part d'une constatation, également exploitée par d'autres auteurs : les fréquences mesurées sont d'excellente qualité, ce qui n'est pas le cas des modes

mesurés. Ainsi, le premier point est d'imposer en tant que valeurs "exactes", les fréquences mesurées.

Considérons la pulsation expérimentale ω . On lui associe l'espace A_ω des couples déplacement - contrainte (en fait des amplitudes) qui vérifient les équations d'équilibre et de liaison. La qualité d'un couple déplacement - contrainte (U, σ) appartenant à A_ω est alors évaluée par l'erreur globale modifiée en relation de comportement :

$$\psi (U, \sigma) = \| \sigma - K \varepsilon(U) \|^2 + \frac{r}{1 - r} \| \Pi U - \underline{\Pi U} \|^2$$

Le premier terme est le carré de l'erreur globale en relation de comportement, r est un coefficient (généralement 0,5) qui caractérise la qualité des valeurs mesurées $\underline{\Pi U}$; Π est un opérateur de projection qui permet de comparer les valeurs expérimentales $\underline{\Pi U}$ avec celles données par U (les quantités mesurées données sont soulignées).

Toutes les normes sont des normes en énergie. Notons que le choix de Π et de $\| \cdot \|$ est mineur.

A la pulsation expérimentale ω , on associe un couple déplacement - contrainte U_ω, σ_ω qui minimise sur A_ω l'erreur modifiée en relation de comportement. Ce couple déplacement - contrainte peut être aisément calculé sur une base modale tronquée associée au modèle initial.

L'erreur relative au mode ω est :

$$e_\omega^2 = \frac{\psi [U_\omega, \sigma_\omega]}{E_D (\sigma_\omega) + E_C (U_\omega)}$$

avec E_D : énergie de déformation, E_C : énergie cinétique

Sur les modes mesurés, l'erreur globale est :

$$e^2 = [\sum_\omega e_\omega^2] / N$$

où N est le nombre de modes mesurés. Si l'erreur globale est plus petite que la précision imposée e_0 , le modèle éléments finis est considéré comme satisfaisant vis-à-vis des données expérimentales et tout processus de recalage est inutile. Notons que e_0 doit être compatible avec la qualité des résultats expérimentaux.

Pour simplifier la présentation de la méthode, les conditions d'orthogonalité vérifiées par les différents modes n'ont pas été considérées. Nous les introduisons en ordonnant les modes en fonction de leur qualité définie par e_ω ; les conditions d'orthogonalité sont alors introduites par le biais de multiplications de Lagrange.

Les erreurs locales sont évaluées par :

$$e^2 = \sum_E e_E^2$$

où e_E désignent les contributions des éléments ou des sous-structures à l'erreur e . Les zones les plus erronées sont associées aux valeurs maximales de e_E .

La démarche de correction est itérative. Elle consiste à chaque itération à détecter les zones les plus erronées et à définir pour ces zones les paramètres structuraux à recalculer. Les valeurs "recalées" de ces paramètres sont alors obtenues en minimisant l'erreur globale e sur l'ensemble des paramètres structuraux admissibles. Le processus est stoppé dès que l'erreur globale sur l'ensemble des modes mesurés e est plus petite que la précision imposée. En pratique, quelques itérations suffisent.

L'exemple décrit en figure 11 est un système de barres travaillant en tension-flexion. Il a servi de test dans un groupe de travail européen sur le recalage ; d'autres exemples traités dans ce groupe GARTEUR sont développés dans [Ladevèze, Reynier, Berger, Ohayon, Quetin, Barthes, 1991]. Les résultats expérimentaux fournis étaient simulés en introduisant des perturbations de 100 % sur les sections et de 50 % sur les moments d'inertie dans les zones indiquées. Cinq modes expérimentaux sont donnés. Dans l'exemple simple considéré ici, seules les valeurs "réelles" des sections sont différentes des valeurs prises en compte dans le modèle théorique ; l'erreur sur les sections est de 150 %. L'erreur globale en relation de comportement est de 0,055 ; la carte des erreurs locales est donnée figure. On détecte bien les zones erronées. Le processus de correction nécessite dans ce cas une seule itération. Notons que la dimension de la base de calcul pour l'erreur et la correction est de 30. D'autres exemples beaucoup plus complexes sont traités dans Nedjar 1992.

Quelques exemples de problèmes ouverts

- extensions tant en statique qu'en dynamique aux problèmes non-linéaires,
- méthodes pour l'analyse des structures floues. *flou* signifie ici *partiellement indéterminé* (exemple : assemblages avec jeu). Peu de travaux sont menés actuellement dans ce domaine très important pour les applications, par exemple [Wozmak 1983, Soize 1986].

4. Conclusion

La fiabilité et le contrôle de modèles a toujours été un souci majeur, particulièrement en mécanique. Les outils, jusqu'à ces dernières années, étaient très limités ; ils étaient réduits à une simple argumentation dans un cadre d'hypothèses bien structurées, soit qualitative, soit associée à des confrontations expérimentales. L'enjeu est important : il s'agit de maîtriser ces modèles qui, numérisés, sont à la base de bon nombre d'activités scientifiques et industrielles et dont l'essor est extraordinaire. Ce qui a changé depuis 15 ans, c'est l'apparition de nouveaux outils véritablement quantitatifs, en relation généralement avec le concept d'erreur *a posteriori*. Actuellement on ne voit pas d'obstacle pour que ces outils aient un retentissement dans des domaines de plus en plus nombreux.

5. Références

PARTIE 1

- BABUSKA I., RHEINBOLDT W.C., « Error estimates for adaptive finite element computation », *SIAM J. Numer. Anal.*, 15, n° 4, 1978, p. 736-754.
- BABUSKA I., « Feedback, Adaptivity and a posteriori Estimates in F.E. », 1986, p. 3-23 in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in F.E. Computations*, Edited by BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O.C., GAGO J., DE A. OLIVEIRA E.R. 1986, John Wiley.
- BUSSY P., Optimisation et fiabilité des calculs par éléments finis en non linéarité géométrique, thèse de docteur-ingénieur, université Paris 6, 1984.
- COOREVITS P., LADEVEZE P., PELLE J.P., ROUGEOT Ph., « Some new applications of a method for the control and optimization of FE computation » in *New Advances in Computational Structural Mechanics*, ed. LADEVEZE P. and ZIENKIEWICZ O.C., Elsevier.
- GASTINE J.L., LADEVEZE P., MARIN Ph., PELLE J.P., « Accuracy and Optimal Meshes and FE Computation for nearly Incompressible Materials », in *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engineering* (sous presse), 1991.
- COFFIGNAL G., Fiabilité et optimisation des calculs élastoplastiques par éléments finis, thèse d'état, université Paris 6, 1986.
- COOREVITS P., LADEVEZE P., PELLE J.P., « Mesh adaptivity for large gradient problem », (to appear).
- GUEZEL D., Sur l'encadrement du taux de restitution d'énergie, thèse de 3^e cycle, université Paris 6, 1981.
- KELLY D.W., GAGO J.R., ZIENKIEWICZ O.C., BABUSKA I., « A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in Finite Element Method. Part I : Error Analysis », *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 19, 1983, p. 1593-1619.
- LADEVEZE P., Comparaison de modèles de milieux continus, thèse d'état, université Paris 6, 1975.
- LADEVEZE P., « Nouvelle procédure d'estimation d'erreur relative à la méthode des éléments finis et applications », *Proc. J. Eléments Finis*, 1977, Rennes.
- LADEVEZE P., LEGUILLON D., « Error estimate procedure in the finite element method and application », *SIAM J. Numer. Anal.*, 20, n° 3, 1983, p. 485-509
- LADEVEZE P., « Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures », *C.R. Acad. Sc.Paris*, 300, série II, 1985, p. 41-44.
- LADEVEZE P., COFFIGNAL G., PELLE J.P., « Accuracy of Elastoplastic and Dynamic Analysis », 1986, p. 181-203, in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations*, Edited by BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O.C., GAGO J., DE A. OLIVEIRA E.R., (WILEY).
- LADEVEZE P., PELLE J.P., « Accuracy in finite element computation for eigenfrequencies », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 1989, p. 1929-1949.
- LADEVEZE P., « Modélisation et calcul des structures : de nouveaux défis », *La Recherche Aérospatiale*, n° 5, septembre-octobre 1990, p. 29-56.
- LADEVEZE P., PELLE J.P., ROUGEOT Ph., « Error estimates and mesh optimization for FE computation », *Engineering Computations*, 8, 1991, p. 69-80.

- MILLER K., MILLER R., « Moving finite elements », Part I, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18, 1981, p. 1019-1032.
- MILLER K., « Moving finite elements », Part II, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18, 1981, p. 1033-1057.
- PELLE J.P., Fiabilité et optimisation des calculs par éléments finis des fréquences propres, thèse d'état, université Paris 6, 1985.
- PELLE J.P., ROUGEOT Ph., « Contrôle de qualité en éléments finis et maillages optimisés », publié dans *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, tome II, 1988, p. 209-220, FOUET J.M., LADEVEZE P., OHAYON R., Editeurs PLURALIS.
- PELLE J.-P., ROUGEOT Ph., « Maillage adaptatif pour les éléments classiques », publié dans *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, tome III, 1989, FOUET J.M., LADEVEZE P., OHAYON R., Editeurs PLURALIS
- ROUGEOT P., Sur le contrôle de la qualité des maillages éléments finis, thèse de l'université P. et M. Curie, Paris, 1989.
- SZALBO B.A., « Estimation and Control of Error Based on p Convergence », in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in F.E. Computations*, Edited by BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O.C., GAGO J., DE A. OLIVIERA, E.R., John WILEY, 1986, p. 61-77.
- ZHONG HG, BECKER P, Solution Approximation Error Estimators for the FE Solution, report SA-140-Aerospace Lab. of univ. Liège, 1990.
- ZHONG H.G., Estimateurs d'erreur *a posteriori* et adaptation de maillages dans la méthode des éléments finis, thèse de l'université de Liège, 1991.
- ZIENKIEWICZ O.C, GAGO J.R., KELLY D.W., « The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis », *Computer and structures*, 16, n° 14, 1983, p. 53-65.
- ZIENKIEWICZ O.C, CRAIG A., « Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution and Hierarchic Finite Element Method Concepts », in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in F.E. Computations*, Edited by BABUSKA I., ZIENKIEWICZ O.C., GAGO J., DE A. OLIVIERA E.R., John WILEY, 1986, p. 25-59.
- ZIENKIEWICZ O.C., ZHU JZ, « A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis », *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, 24, 1987, p. 337-357.

PARTIE 2

- BARUCH M., « Optimal Correction for Mass Matrix and Stiffness Matrix using Measuring Modes », *A.I.A.A.*, 82-4265, 1982.
- BERMAN A., FLANNELLY O., « Theory of Incomplete Models of Dynamics Structures », *A.I.A.A. Journal*, 9/8, 1971, p. 1481-1487.
- BERGER H., BARTHE L., OHAYON R., « Recalage d'un modèle par éléments finis à partir de données expérimentales du type vibratoire. Concept de localisation », *R.T. DRET*, n° 7/3313 RY 070 R, mai 1987.
- BLACKELY K., DOBBS M., « Modification and Refinement of Large Dynamic Structural Models : Efficient Algorithms and Computer Applications », *Proceedings Ist. Int. modal analysis conf.*, 1984, p. 598-602, Orlando.
- CAESAR B., « Correlation and Update of Dynamic Mathematical Models », *4th F.E. world congress*, Interlaken, septembre 1984.

- CHEN J.C., KUO C.P., GARBA J.A., « Direct Structural Parameter Identification Testing », *A.I.A.A.*, 83-0812, 1983.
- COLLINS J.D., HART G.C., HASSELMAN J.K., KENNEDY B., « Statical Identification of Structures », *A.I.A.A. journal*, 12/2, 1974, p. 185-190.
- COTTIN N., FELGENHAUER H.P., NATKE H.G., « On the parameter identification of elastomechanical systems using input and output residuals », *Ingenieur Archiv*, 54, 1984, p. 378-387, Spring-Verlag.
- HE J., EWINS D.J., « Analytical Stiffness Matrix Correction using Measured Vibration Modes », *Int. Journ. Analytical & Experimental Modal Analysis*, 1, n° 3, July 1986.
- HEYLEN W., VANHONECKER P., « An Automated Technique for Improving Model Matrices by Means of Experimentally Obtained Dynamic Data », *Proceedings of the Int. modal analysis conference*, Orlando, 1984.
- LADEVEZE P., Recalage de modélisation des structures complexes, Note technique n° 33 11 014, Aérospatiale Les Mureaux, 1983.
- LADEVEZE P., REYNIER M., « A localisation Method of Stiffness Errors for the Adjustment of F.E. Models », *Special issue J of Appl. Mech., ASME, Proceedings of 12th ASME Mechanical Vibration and Noise Conference*, 1989.
- LADEVEZE P., REYNIER M., BERGER H., OHAYON R. QUETIN F., BARTHE L., « Méthode de recalage de modèles de structures en dynamique : les approches par réaction dynamique et par la notion d'erreur en relation de comportement », *La Recherche Aérospatiale*, n° 5, 1991, p. 9-20.
- REYNIER M., Sur le contrôle de modélisations par éléments finis : recalage à partir d'essais dynamiques, thèse de l'université Paris 6/ENS Cachan, 1990.
- MAUNDER E., « Finite Element Modelling of Exeter Cathedral », *Finite Element News*, 6, 1991, p.14-18.
- NATKE H., « Updating Computational Models in the Frequency Domain Based on Measured Data : a Survey », *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3, n° 1, 1988.
- NEDJAR D., Correction paramétrique de modélisations par éléments finis à partir de résultats d'essais vibratoires, thèse de l'université Paris 6/ENS Cachan, 1992.
- SIDHU J., EWINS D.J., « Correlation of Finite Element and Modal Studies of a Practical Structure », *Proceedings 2nd IMAC*, février 1984, p. 756-762.
- SOIZE C., « Modélisation probabilistique du flou structural en dynamique linéaire des systèmes mécaniques complexes - Eléments théoriques », *La Recherche Aérospatiale*, 5, 1986, p. 337-362.
- WOZNIAK C.S., « Tolerance and Fuziness in Problems of Mechanics », *Arch. Mech.*, 35, 1983, p. 5-6.
- ZHANG W., LALLEMENT G., FILLOD R., PIRANDAJ., « A Complete Procedure for the Adjustment of Mathematical Model from the Identified Complex Modes », *IMAC-5*, Imperial College, Londres, 1987, 6-9 Ap.

Pierre LADEVÈZE

Article soumis en janvier 1992

Publication recommandée par J.-L. Batoz et R. Ohayon