
Un schéma éléments finis simple et adaptatif pour les écoulements de Naviers-Stokes compressibles

Yves Secretan

Institut de dynamique des fluides

ETH Zürich

Sonneggstr. 3

8092 Zürich, Suisse

RÉSUMÉ. Nous avons développé une nouvelle formulation simple et stable, basée sur l'élément MINI, pour intégrer les équations de Navier-Stokes compressibles par la méthode des éléments finis. Cet élément est bien adapté au raffinement de maillage. Le système non linéaire discret est résolu par GMRES, une méthode itérative, couplée à un nouveau préconditionnement diagonal. L'algorithme résultant est efficace et facilement vectorisable. L'élément converge quadratiquement sur la norme L_2 et a été validé avec les résultats du GAMM-Workshop on Compressible Navier-Stokes Flows, sur des maillages structurés comme sur des maillages adaptés.

ABSTRACT. We have developed a new, stable and simple formulation, based on the MINI element, to integrate the compressible Navier-Stokes equations by the finite element method. This element is well suited for grid refinement. The non-linear system is solved by GMRES, an iterative method, coupled with a new diagonal preconditioning. The resulting algorithm is very efficient and vectorizes well. The element converges quadratically in the L_2 norm and has been tested against results of the GAMM-Workshop on Compressible Navier-Stokes Flows, on regular grids as well as on adapted grids.

MOTS-CLÉS : Navier-Stokes, raffinement de maillage, GMRES, préconditionnement diagonal.

KEY WORDS : Navier-Stokes, grid refinement, GMRES, diagonal preconditioning.

1. Introduction

L'application de la méthode des éléments finis à la résolution numérique d'écoulements retient de plus en plus l'attention des chercheurs. La facilité avec laquelle des domaines de géométries complexes peuvent être représentés, et la facilité avec laquelle les conditions limites peuvent être imposées sont deux atouts importants de cette méthode.

Les écoulements laminaires, compressibles et visqueux sont des écoulements complexes. Ils sont décrits par les équations de Navier-Stokes dont la simulation

numérique permet d'obtenir une approximation de la traînée due à la viscosité du fluide. La résolution des équations de Navier-Stokes pour des écoulements compressibles est donc justifiée pour des cas complexes de recirculation, de sillage, d'interaction entre un choc et une couche limite, donc les domaines où la viscosité joue un rôle important.

La discrétisation par éléments finis des équations de Navier-Stokes stationnaires conduit à un système algébrique non linéaire de la forme $[K(u)]\{u\} = \{f\}$ où :

- $\{u\}$ est le vecteur des inconnues ;
- $[K(u)]$ la matrice non linéaire de rigidité ;
- $\{f\}$ le vecteur des sollicitations extérieures.

$[K]$ est une matrice creuse qui n'est pas diagonale par bloc ; sa structure dépend de l'organisation des inconnues. La résolution du système par une méthode itérative de type Newton-Raphson, couplée à une méthode de résolution directe [Sec86], requiert à chaque itération la factorisation d'une matrice de même taille et de même structure que $[K]$. En 3D, le stockage de la matrice est hors de portée des ordinateurs actuels. Ainsi, pour des gros problèmes, il est important de ne travailler qu'avec des vecteurs dont la taille est indépendante de la numérotation des nœuds. De plus, ce type d'organisation est particulièrement adapté aux techniques de raffinement de maillage.

Les méthodes itératives, comme la méthode des gradients conjugués ou les méthodes de résolution par sous-espaces de Krylov, ne demandent que des vecteurs et offrent une alternative intéressante aux méthodes de résolution directes. Parmi celles-ci, la méthode GMRES (Saad et Schultz [SS86]) se dégage comme étant très stable, même pour des problèmes à matrice non définie positive. La convergence de ces méthodes peut être accélérée par le préconditionnement du système à résoudre. Mais l'utilisation de méthodes itératives fait que la plus grande part du temps de calcul est passée dans l'assemblage du résidu $[K(u)]\{u\}$. Afin d'exploiter au mieux les ordinateurs, il faut simplifier le plus possible cette boucle de calcul. Un moyen est d'utiliser des éléments sur lesquels les intégrations peuvent être effectuées analytiquement.

Toute résolution numérique reste entachée d'une erreur de discrétisation qui est par définition une mesure de l'écart entre la solution exacte et la solution discrète. Afin d'améliorer la qualité de la solution, nous aurons recours au raffinement de maillage. Il vise à diminuer l'erreur de discrétisation dans les zones à forte erreur, en réduisant la taille des éléments par subdivision [ZLMP85, ODS86, Sec91].

2. Développement du modèle discret

2.1. Modèle mathématique

La dynamique de l'écoulement compressible, laminaire et visqueux d'un fluide Newtonien est complètement décrite par les équations de Navier-Stokes. Couplées à une description thermodynamique du fluide, la loi des gaz parfaits, ces équations forment un système fermé qui peut être écrit sous différentes formes. Nous utilisons une forme non conservative pour les variables primitives (ρ , \mathbf{v} ,

T). Dans ce cas et sous forme adimensionnelle, les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad [1.a]$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{f} \quad [1.b]$$

$$\left(\frac{c_p - R}{E} \right) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla T + p \nabla \cdot \mathbf{v} - \left(\frac{1}{Re Pr E} \right) \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \frac{1}{Re} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = q \quad [1.c]$$

avec

$$p = \frac{R}{E} \rho T \quad \text{la pression exprimée par la loi des gaz parfaits} \quad [2.a]$$

$$Re = \frac{\rho_0 v_0 L_0}{\mu_0} \quad \text{le nombre de Reynolds} \quad [2.b]$$

$$Pr = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0} \quad \text{le nombre de Prandtl} \quad [2.c]$$

$$E = (\gamma - 1) M_0^2 \quad \text{le nombre d'Eckert} \quad [2.d]$$

$$R = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad \text{la constante des gaz parfaits adimensionnelle} \quad [2.e]$$

L'indice 0 indique une valeur de référence. Le coefficient de viscosité μ et le coefficient de transfert thermique λ sont maintenus constants afin de permettre une comparaison avec les résultats du *GAMMW-Workshop* de Nice (1985) [BGPV87]. De même, le nombre de Prandtl est fixé à $Pr = 0.72$ et l'exposant isentropique à $\gamma = 1.4$.

Le choix de la formulation [1] est lié aux conditions limites naturelles de la forme faible associée à ce système, comme on le verra dans ce qui suit.

2.2. Formulation variationnelle

Le modèle mathématique [1] est un système d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre que nous résolvons par la méthode des éléments finis. Un point particulier et important de cette méthode est qu'elle exige une formulation variationnelle du modèle mathématique. Elle est obtenue ici de manière classique par la méthode des résidus pondérés associée à des fonctions de pondération de type Galerkin. Après intégration par partie des termes d'ordre deux, on obtient une forme faible qui est l'expression éléments finis d'une discrétisation centrale.

La forme faible associée au système [1] est :

$$\int_{\Omega} \Psi_{\rho} [\mathbf{v} \cdot \text{grad}(\rho) + \rho \text{div}(\mathbf{v})] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \Psi_{\mathbf{v}} \cdot [\rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) + \text{grad}(p)] d\Omega +$$

$$\frac{1}{Re} \left[\int_{\Omega} \text{grad}(\Psi_{\mathbf{v}}) : \boldsymbol{\tau} d\Omega - \oint_{\Gamma} \Psi_{\mathbf{v}} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \right] = 0$$

$$\int_{\Omega} \Psi_T \left[\left(\frac{c_p - R}{E} \right) \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad}(T) + p \text{div}(\mathbf{v}) - \frac{1}{Re} \dot{\tau} : \text{grad}(\mathbf{v}) \right] d\Omega + \frac{1}{Re Pr E} \left[\int_{\Omega} \lambda (\text{grad}(\Psi_T) \cdot \text{grad}(T)) d\Omega - \oint_{\Gamma} \lambda \Psi_T (\text{grad}(T) \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \right] = 0 \quad \forall (\Psi_{\rho}, \Psi_{\mathbf{v}}, \Psi_T) \quad [3]$$

Ψ_{ρ} , $\Psi_{\mathbf{v}}$ et Ψ_T sont respectivement les fonctions de pondération, et par le choix de la méthode Galerkin sont également les fonctions de base de l'espace solution, de ρ , \mathbf{v} et T .

Regardons plus en détail l'expression [3]. Il y a deux aspects importants.

1. L'ordre des dérivations sur \mathbf{v} et T est abaissé, ce qui permet de choisir des fonctions de continuité globale moindre.
2. L'expression [3] fait apparaître une intégrale de contour qui est très utile pour prendre en compte une partie des conditions limites de Neumann. En effet, ne pas calculer cette intégrale revient à poser $\tau \cdot \mathbf{n}$ et $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$ au sens faible, sur la portion de la frontière où ces conditions s'appliquent. Nous avons ainsi naturellement une partie des conditions limites homogènes qui sont prises en considération par la forme faible.

Le système [3] contient entre autres des produits de fonctions de la forme générale

$$\int_{\Omega} \Psi uv \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega$$

Ces produits sont coûteux à évaluer en terme de temps de calcul. De manière générale, nous *factorisons les produits* de fonctions de type uv ; c'est à dire que nous ne calculons pas le produit des approximations de u et de v , mais nous approximations le produit uv . Cette approximation, qui est du même ordre que l'approximation de u , est formée à partir du produit des valeurs nodales de u et de v . Nous abaissons ainsi l'ordre des polynômes apparaissant dans l'intégrale [Sec91].

2.3. Discrétisation géométrique

Le domaine de calcul Ω_h , approximation du domaine réel Ω , est décomposé en un nombre fini de sous-domaines Ω_e qui couvrent tout le domaine sans se recouper ni laisser de trou. Nous utilisons exclusivement des triangles, car ils permettent de décrire toute forme géométrique polygonale. Nous n'avons ainsi qu'un seul type d'élément, ce qui simplifie énormément la structure du code de calcul. De plus, les triangles sont bien adaptés au raffinement dynamique de maillage.

Les éléments de même forme géométrique et de même degré d'approximation géométrique sont images d'un même élément, l'élément de référence, au travers d'une transformation géométrique τ . Afin d'accélérer le calcul des termes de [3], nous choisissons un élément de référence lagrangien d'ordre un (Figure 1). Le jacobien de la transformation τ est alors constant sur un élément, ce qui permet d'intégrer analytiquement les termes de la forme faible et de supprimer la boucle sur les points de quadrature (en autant qu'une approximation a été choisie pour les propriétés du fluide).

La forme faible sur le domaine [3] est alors remplacée par la somme sur l'ensemble des éléments des formes faibles élémentaires :

$$\int_{\Omega_h} d\Omega_h = \sum_{\text{éléments}} \int_{\Omega_e} d\Omega_e$$

2.4. Fonctions d'approximation

La forme faible [3] impose une continuité globale de type C^0 pour les approximations des variables ρ , \mathbf{v} et T (H^1 pour être précis, mais à toute fin pratique C^0). De plus, pour calculer les dérivées de la forme faible, les approximations sur l'élément de référence doivent être complètes au moins jusqu'au degré 1.

Les approximations doivent être choisies avec soin [Sec86]. Des approximations de même ordre pour toutes les variables produisent des oscillations en forme de damier sur la densité (*checker-board pattern*), qui ne sont pas sans rappeler les problèmes de stabilité rencontrés pour les écoulements incompressibles. Nous avons donc choisi des approximations remplissant la condition de Babuška-Brezzi et avons sélectionné l'élément MINI proposé par Arnold *et al.* [ABF84] pour les équations de Stokes et de Navier-Stokes incompressibles.

Cet élément a peu été utilisé pour les écoulements compressibles. Adapté à ces écoulements [Sec91], l'élément MINI a une approximation linéaire pour la densité et la température. Pour la vitesse, la base linéaire est enrichie avec une fonction bulle au barycentre de l'élément (Figure 1). Comme les degrés de

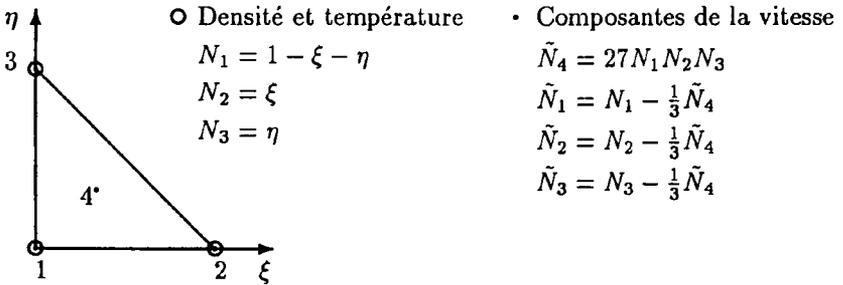


Figure 1 : Elément de référence et fonctions d'approximation

liberté de la bulle ne dépendent d'aucun autre élément, ils peuvent être condensés statiquement au niveau élémentaire.

Pour les équations de Stokes et après condensation statique, nous obtenons d'un côté la discrétisation de l'élément linéaire (sans la bulle), et de l'autre côté un terme supplémentaire provenant de la bulle. Ce dernier a la forme d'un opérateur discret de dissipation agissant sur la pression dans l'équation de continuité. Cet opérateur correspond à l'intégrale de volume de la forme faible de

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla p) \tag{4}$$

où $\boldsymbol{\kappa}$ est un tenseur symétrique. Une analyse dimensionnelle montre que celui-ci est de l'ordre

$$ReD\rho$$

D étant le déterminant du jacobien. La dissipation introduite par la bulle est directionnelle et son intensité est pilotée par la densité, le nombre de Reynolds et la taille du maillage. La bulle rééquilibre le système d'équations, ajoutant à la continuité une dissipation qui empêche la formation des oscillations.

Pour les équations de Navier-Stokes, la présence de la bulle introduit deux termes supplémentaires par rapport à une approximation linéaire. Le premier, qui a la même forme mais pas les mêmes composantes de κ que [4], est ajouté à l'équation de continuité. Le second vient perturber les équations de quantité de mouvement. Comparés globalement à [4], ces termes supplémentaires sont moins dissipatifs. De plus, nous pensons, et de nombreux tests numériques soutiennent cette affirmation [Sec91], que la partie du système discret associée à l'équation de continuité est mal conditionnée, ce qui mène à un ralentissement de la convergence des méthodes itératives.

Par contre, l'effet des termes supplémentaires peut être simulé en ne retenant que la dissipation des équations de Stokes (équation [4]), et en la relaxant par

$$-\omega \nabla \cdot (\kappa \cdot \nabla p) \quad \omega \in [0, 1] \quad [5]$$

où le paramètre de relaxation ω varie linéairement en fonction de la pression locale p comme

$$\omega = \omega_0 + (1 - \omega_0) \frac{p - p_0}{p_{max} - p_0} \quad \omega \in [0, 1] \quad [6]$$

p_0 étant la pression de référence et p_{max} donné par la relation isentropique

$$p_{max} = \frac{1}{\gamma M_0^2} \left(1 + \frac{(\gamma - 1) M_0^2}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad [7]$$

Le paramètre ajustable restant ω_0 prend typiquement la valeur 0.3 pour des écoulements transsoniques.

Cette formulation ne produit pas d'oscillations parasites sur la pression. Elle est très simple et bon marché en terme de temps CPU.

3. Méthode de résolution

La discrétisation par éléments finis de [1] conduit à un système non linéaire de la forme

$$[K(u)]\{u\} = \{f\} \quad [8]$$

Comme il n'existe pas de méthode pour résoudre directement le système [8], il faut le linéariser et résoudre une série de systèmes linéaires, ce qui revient à chercher itérativement un vecteur $\{u\}$ qui rende nul au sens numérique le résidu $\{R(u)\} = \{f\} - [K(u)]\{u\}$. Nos équations étant fortement non linéaires, nous optons pour la méthode de Newton-Raphson, à cause de sa robustesse et de sa convergence quadratique à proximité de la solution.

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative, basée sur le développement en série de Taylor du résidu au voisinage du résultat de l'itération

précédente [DT84]. En introduisant la définition du résidu, ceci revient à résoudre successivement

$$\left[K(u^i) + \frac{\partial K}{\partial u} \{u^i\} \right] \{\Delta u\} = \{R(u^i)\} \quad \{u^{i+1}\} = \{u^i\} + \{\Delta u\}$$

ou encore

$$[Kl(u^i)]\{\Delta u\} = \{R(u^i)\} \quad \{u^{i+1}\} = \{u^i\} + \{\Delta u\} \quad [9]$$

Les systèmes linéaires [9] résultants de la linéarisation sont résolus par l'algorithme GMRES (*Generalized minimal residual*) [SS86], et ceci jusqu'à convergence de l'algorithme de Newton-Raphson.

GMRES fait partie des méthodes de résolution par sous-espace de Krylov, méthodes qui cherchent la solution approchée $\{\Delta u_m\}$ dans l'espace $\{\Delta u_0\} + \mathbf{K}_m$, où \mathbf{K}_m est le sous-espace de Krylov de dimension m et de base

$$\{b\}, [Kl]\{b\}, \dots, [Kl]^{m-1}\{b\} \quad \text{et} \quad \{b\} = \{R(u^i)\} - [Kl(u^i)]\{\Delta u_0\}$$

Evidemment, la précision et la convergence de la méthode sont liées non seulement au conditionnement du système mais également à la dimension m du sous-espace de Krylov. Le choix de m est un point délicat ; si m est trop petit, GMRES peut ne pas converger [SS86]. Il est par contre possible de redémarrer GMRES, c'est-à-dire d'actualiser la solution $\{u\}$, et de reprendre la résolution avec cette nouvelle solution. Nous utilisons généralement pour m une valeur $m = 25$, mais redémarrons GMRES jusqu'à 10 fois pour obtenir une meilleure convergence sur une itération de Newton-Raphson.

L'intérêt de GMRES est de ne jamais faire explicitement référence à la matrice $[Kl]$ pour construire le sous-espace de Krylov ; seule l'action de celle-ci sur un vecteur doit être calculé. De plus, le produit $[Kl]\{\Delta u\}$ peut être approximé numériquement par [Bro87]

$$[Kl]\{\Delta u\} \approx \frac{[K(u + \delta \Delta u)]\{u + \delta \Delta u\} - [K(u)]\{u\}}{\delta} \quad \delta \in \mathbf{R} \quad [10]$$

Dans ce cas, seul le produit $[K]\{u\}$ doit être calculé. Le facteur δ est choisi de manière à fournir une bonne approximation de la dérivée. Pour des calculs en double précision (mots de 64 bits), nous calculons δ comme

$$\delta = 10^{-7} \times (\|u\| + 10^{-12})$$

On parle alors d'une méthode de quasi-Newton et la convergence n'est plus quadratique.

Le conditionnement du système peut être amélioré en utilisant les méthodes de préconditionnement, c'est-à-dire en résolvant non pas [9] mais plutôt

$$[Kp][Kl]\{\Delta u\} = [Kp](\{F\} - [K]\{u\}) \quad [11]$$

où $[Kp]$ est la matrice de préconditionnement. Le cas idéal est évidemment $[Kp] = [Kl]^{-1}$ car la solution est directe dans ce cas. Un bon préconditionnement est une matrice $[Kp]$ facile à calculer et qui approche $[Kl]^{-1}$ [CJ84].

Nous cherchons $[Kp]$ sous forme diagonale, traduisons la condition idéale par [Hir88]

$$\|[I] - [Kp][Kt]\| \leq 1 \quad \forall \|\cdot\| \quad [12]$$

et choisissons comme norme matricielle la norme infinie définie par

$$\|[A]\|_{\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad [13]$$

Appliquant la condition [12] à chaque ligne, nous obtenons pour les kp_{ii} , composantes de $[Kp]$,

$$kp_{ii} \leq \frac{2}{\sum_j |kt_{ij}|} \quad [14]$$

$[Kp]$ est ainsi une approximation diagonale de $[Kt^{-1}]$.

Le préconditionnement proposé est apparenté aux méthodes de pas de temps locaux utilisées pour les schémas temporels explicites. A titre d'exemple, l'accroissement de l'erreur du système linéarisé pour un schéma d'Euler est donné par [Sec91]

$$e_n = ([I] - \Delta t[M]^{-1}[Kt])^n e_0 \quad [15]$$

où Δt est le pas de temps et $[M]$ la matrice masse. La condition de stabilité est alors

$$\|[I] - \Delta t[M]^{-1}[Kt]\| \leq 1 \quad \forall \|\cdot\| \quad [16]$$

En modifiant Δt en une matrice telle que le produit $\Delta t[M]^{-1}$ soit une matrice diagonale, on transforme le pas de temps global en un pas de temps local. La condition de stabilité est alors identique à [12] (on retrouve à un facteur près le même résultat pour les schémas de type Runge-Kutta).

L'algorithme général pour résoudre des systèmes non linéaires se présente alors comme suit :

Algorithme général

1. Choix d'une solution initiale $\{u_0\}$
2. Itérations de quasi-Newton-Raphson inexactes
 - Calcul de la matrice de préconditionnement $[Kp]$ [14]
 - Initialisation de $\{\Delta u_0\}$; $\{\Delta u_0\} = 0$
 - Résolution du système linéaire [11] par GMRES ; soit par i redémarrages à chacun m itérations, soit jusqu'à ce que la norme de convergence soit atteinte. $[Kt]\{\Delta u\}$ est approximé numériquement [10].
 - Actualisation de la solution : $\{u\} = \{u\} + \{\Delta u\}$
3. Si la norme de convergence globale est atteinte, arrêt
4. Sinon retour au point 2

Brown [Bro87] démontre que si la norme de convergence de GMRES est suffisamment petite, on retrouve la convergence quadratique typique de la méthode de Newton-Raphson.

Une convergence partielle des itérations de Newton-Raphson a des avantages lors du démarrage d'un calcul, car elle évite de trop grands changements et

une possible divergence de l'algorithme. Pour les problèmes à haut nombre de Reynolds et haut nombre de Mach, et lorsque la solution initiale est un champ constant, nous effectuons une dizaine d'itérations de Newton-Raphson avec la matrice identité comme matrice de préconditionnement, avant de passer à la matrice $[Kp]$. La stratégie de résolution est alors

1. 1 itération de Newton-Raphson sans préconditionnement mais avec 10 redémarrages ;
2. 10 itérations de Newton-Raphson préconditionnées mais sans redémarrage ;
3. jusqu'à convergence : 1 itération de Newton-Raphson préconditionnée avec 10 redémarrages.

4. Convergence et validation de l'approximation

Nous présentons les résultats du contrôle de convergence de l'élément décrit à la section 2.4., de même qu'une validation sur un maillage structuré pour le cas A2 du *GAMM-Workshop on Compressible Navier-Stokes Flows* tenu à Nice en 1985 [BGPV87].

4.1. Convergence de l'approximation

Le taux de convergence de l'approximation en fonction de la taille du maillage a été contrôlé sur une cascade de maillages réguliers allant de 3×3 nœuds à 21×21 nœuds. La solution exacte utilisée est

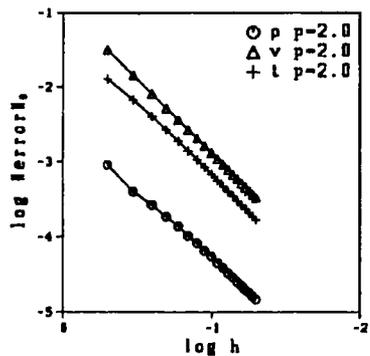
$$\rho = e^{-x-y} \quad u = e^x \quad v = e^y \quad t = e^{x+y} \quad x, y \in [0, 1]$$

Elle génère un terme source qui est incorporé au vecteur $\{f\}$ du système discret [8]. Les conditions limites sont de type Dirichlet sur toute la frontière et pour toutes les variables.

La figure de droite montre, dans un diagramme log-log, les courbes de la norme L_2 de l'erreur en fonction de la taille du maillage h . La variable p est l'exposant de l'expression

$$\|e\|_0 \leq c h^p \quad [17]$$

qui relie l'erreur globale à la taille du maillage (c est indépendant de h). Le taux de convergence est quadratique pour toutes les variables.



Dans la norme H^1 , norme naturelle de la forme faible [3], le taux de convergence est réduit à 1 (linéaire).

4.2. Comparaison avec le cas A2 du GAMM-Workshop

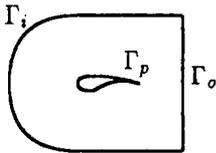
Les écoulements externes du *GAMM-Workshop* sont des écoulements autour d'un profil NACA-0012 prolongé de manière à obtenir une épaisseur du bord de fuite nulle. Nous présentons ici une comparaison avec le cas A2, écoulement à 10° d'angle d'attaque, défini par $Re = 500$, $M = 0.8$, $\gamma = 1.4$ and $Pr = 0.72$. Il est laminaire, transsonique, stationnaire et présente un décollement. Sous forme adimensionnelle, les conditions limites imposées par le *Workshop* sont pour le profil,

- condition de non-glissement : $\mathbf{v}_p = 0$
- température constante : $T_p = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$

et, pour l'infini, un écoulement uniforme défini par

- le nombre de Mach M
- l'angle d'attaque α
- le nombre de Reynolds Re

Ne pouvant simuler l'infini, nous utilisons les conditions limites suivantes sur la frontière extérieure au domaine



sur Γ_i $\rho_i = 1$, $\mathbf{v}_i = (1, 0)$, $T_i = 1$, les conditions à l'infini

sur Γ_o $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$, les conditions naturelles de la forme faible

L'angle d'attaque est imposé non pas par l'intermédiaire des composantes de la vitesse, mais par le maillage qui est généré avec le profil à l'angle d'attaque.

Le maillage utilisé est en C , structuré et quasi orthogonal. La distance entre le profil et la frontière extérieure du domaine est environ neuf fois la longueur de la corde, distance qui est suffisante pour les cas traités. Le profil étant approximativement centré dans le domaine. Les points sont répartis de manière exponentielle entre le profil et la frontière extérieure. Sur le profil, ils sont concentrés dans la zone du bord d'attaque, formant un carré au bord d'attaque ; il n'y a pas de concentration de points autour du bord de fuite. Les caractéristiques du maillage sont :

- 81 points sur le profil et 21 points sur le sillage soit 121 points autour du profil,
- 41 points en direction normale au profil,
- la distance du bord d'attaque au point du domaine le plus proche est de 0.0015 fois la corde,
- la distance du bord de fuite au premier point normal au profil est de 0.007 fois la corde.

Le maillage éléments finis compte alors 4940 nœuds et 9600 éléments.

Sur ce maillage, nous comparons les courbes des coefficients de C_p , C_f et de C_h obtenues avec le nouvel élément présenté et noté $N^3 N^3(\omega)$, avec celles de l'approximation complète par l'élément MINI noté $N^B N^B$. Nous comparons

également les coefficients globaux pour ces deux approximations avec les résultats de Müller [MBR87] et de Cambier [Cam87].

Les courbes de C_p (Figure 2) montrent que le niveau de la pression de l'approximation $N^B N^B$ est légèrement plus élevé que pour l'approximation $N^3 N^3(\omega)$, et ceci sur tout le profil. Les courbes de C_f (Figure 3) sont identiques pour les deux approximations, mis à part une petite différence dans la zone de recompression. Elles présentent les mêmes maxima et minima.

La courbe du Ch de l'approximation $N^3 N^3(\omega)$ (Figure 4) est en bon accord avec les résultats du *Workshop*. Par contre, la courbe de l'approximation $N^B N^B$, qui a une convergence très lente et qui dans ce cas n'est que partiellement convergée sur la température, dévie dans la partie décollée de l'écoulement.

L'excellent accord des courbes de C_p et de C_f se retrouve aussi pour les coefficients globaux (Table 1). Le résultat le plus sensible au type de résolution

Approximation	$N^B N^B$	$N^3 N^3(\omega)$	Müller	Cambier
$C_D p$	0.1419	0.1438	0.1411	–
$C_D \tau_w$	0.1243	0.1226	0.1217	–
C_D	0.2662	0.2664	0.2628	0.2656
$C_L p$	0.4279	0.4407	0.4242	–
$C_L \tau_w$	-0.0051	-0.0045	-0.0043	–
C_L	0.4228	0.4362	0.4199	0.4342
$C_M p$	0.1083	0.1148	0.1075	–
$C_M \tau_w$	0.0055	0.0056	0.0057	–
C_M	0.1138	0.1204	0.1132	0.1190
séparation	0.364	0.368	0.358	0.36

Table 1 : Cas-A2 – Coefficients globaux

et au maillage est le point de séparation. En éliminant les valeurs sortant par trop du lot, la fourchette des valeurs du point de séparation obtenues par les groupes de recherche ayant participé au *Workshop* s'étend de 0.345 à 0.39, avec une moyenne de 0.365.

La solution initiale pour ces simulations est $\rho = 1.0$, $\mathbf{v} = (1.0, 0.0)$ et $T = 1.0$ sur tout le domaine. La table 2 regroupe les temps CPU. La convergence de

Approximation	Convergence Norme L_2	Temps CPU (s) Cray-XMP28
$N^B N^B$	$7.5 \cdot 10^{-5}$	297
$N^3 N^3(\omega)$	$7.5 \cdot 10^{-5}$	255

Table 2 : Cas-A2 – Convergence et temps CPU

l'approximation $N^B N^B$ est très oscillante autour d'une valeur de norme voisine de 10^{-4} . La différence de vitesse de convergence à son origine dans la différence de dissipation des deux approximations. A notre avis, ces résultats justifient l'utilisation de l'approximation $N^3 N^3(\omega)$.

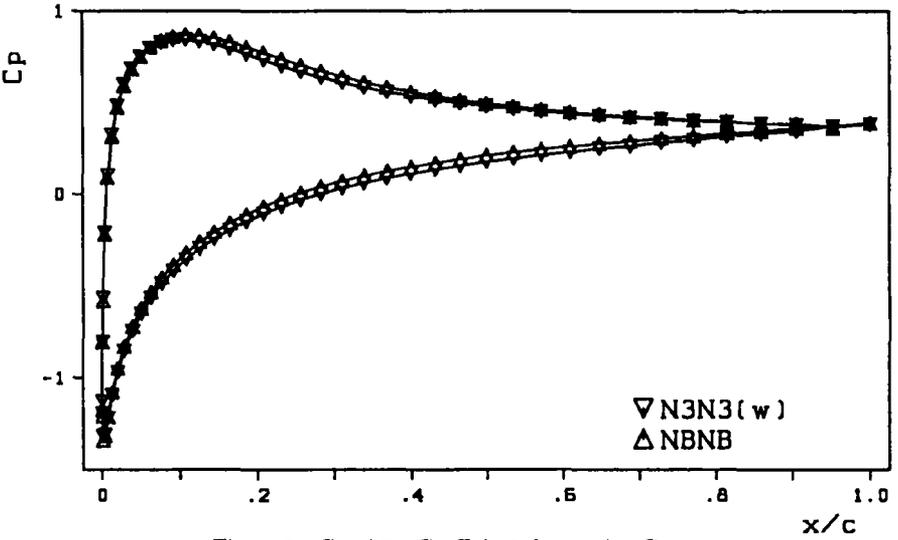


Figure 2 : Cas-A2 - Coefficient de pression C_p

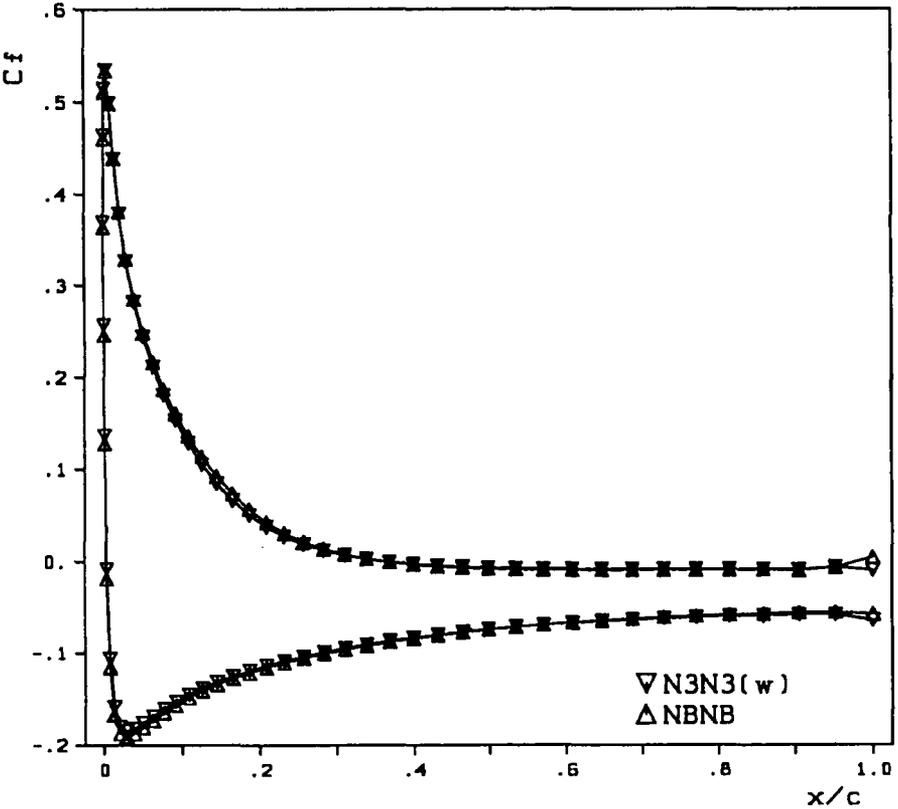


Figure 3 : Cas-A2 - Coefficient de frottement C_f

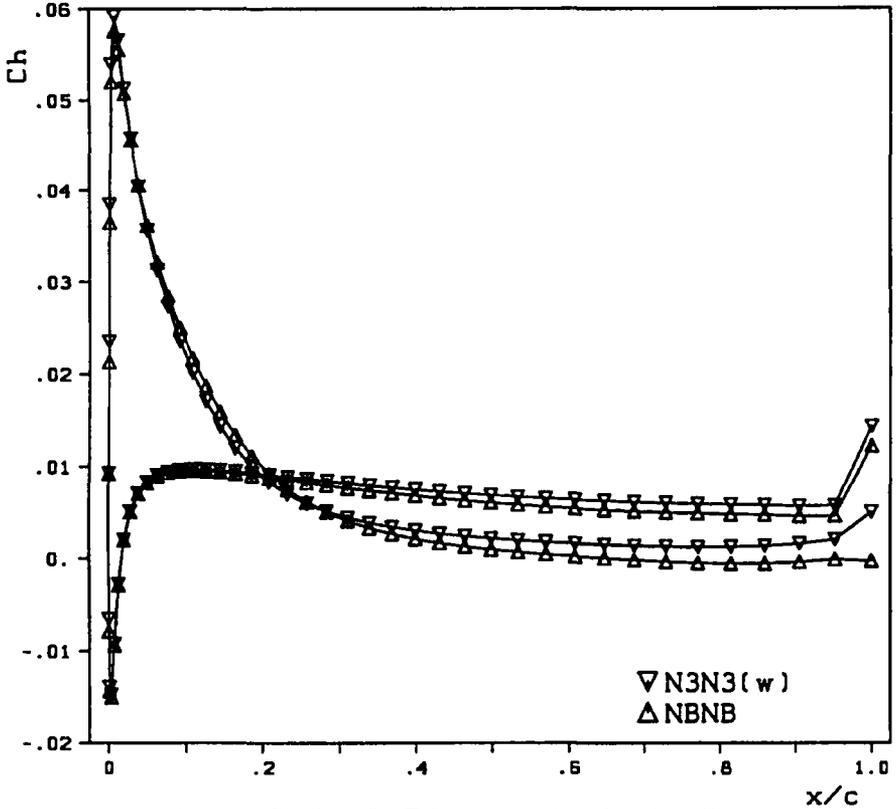


Figure 4 : Cas-A2 - Coefficient de transfert thermique Ch

5. Adaptation du maillage

La méthode des éléments finis n'est pas limitée aux maillages structurés, grâce à la construction élément par élément du système discret et à la transformation locale entre l'élément réel et l'élément de référence. Ceci peut être exploité pour raffiner dynamiquement le maillage, dans le but de distribuer l'erreur d'approximation plus régulièrement sur le maillage.

5.1. Estimation de l'erreur

L'erreur d'approximation, qui est une valeur locale et une fonction de la taille du maillage, doit être estimée par rapport à des valeurs connues [BZGdAO86]. Nous utilisons une estimation *a priori*, basée sur le second terme du développement en série de Taylor de la fonction, et qui est apparentée à l'erreur d'approximation pour l'élément linéaire [DT84].

Introduisant le tenseur symétrique ϵ

$$\epsilon = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Delta x^2 & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Delta y^2 \end{bmatrix} \quad [18]$$

où Φ est la fonction utilisée pour le calcul d'erreur, nous définissons l'erreur nodale e comme la norme de ϵ

$$e = \|\epsilon\| = \sqrt{\sum \epsilon_{ij}^2} \quad [19]$$

L'erreur est ainsi basée sur les dérivées secondes qui ne sont pas directement accessibles avec une approximation linéaire des variables. Comme les termes d'ordre deux de la forme faible sont intégrés par partie, nous intégrons également ϵ par partie et ne retenons que l'intégrale de volume. La valeur aux nœuds de la moyenne pondérée par la surface de ϵ_{ij} est alors donnée par

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{N_{,xi}\} < N_{,xj} > \{\Phi\} d\Omega \frac{\int_{\Omega} \{N\} d\Omega}{\int_{\Omega} \{N_{,xi}\} d\Omega \int_{\Omega} \{N_{,xj}\} d\Omega} \quad [20]$$

où $\{ \}$ représente un vecteur colonne, $< >$ un vecteur ligne, N les fonctions d'approximation (Figure 1), Φ les valeurs nodales de la fonction utilisée pour le calcul de l'erreur et où l'indice $, xi$ indique une dérivation par rapport à x_i . Les opérations sur les quatre vecteurs de [20] se font composante par composante.

Pour un problème à plusieurs inconnues, il faut décider sur quelle variable baser le calcul de l'erreur. Il est avantageux de pouvoir travailler sur des produits de variables (comme la pression) ainsi que sur plus d'une variable à la fois. Dans ce cas, nous avons utilisé comme erreur résultante la moyenne arithmétique des erreurs. Les résultats présentés à la section suivante, ont été adaptés avec l'erreur calculée sur toutes les variables.

5.2. Raffinement de maillage

L'algorithme de raffinement de maillage est simple de concept [LMZ86,PD86]. Les éléments dont tous les nœuds ont une erreur supérieure à $0.2 \times e_{max}$ auront leurs côtés coupés en deux, générant ainsi 4 triangles. Les nœuds pendants sont capturés par bi-section de l'élément voisin (Figure 5). Nous suivons l'historique du raffinement afin d'éviter la bi-section successive d'un même angle du maillage

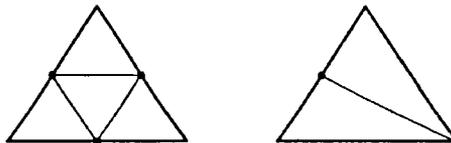


Figure 5 : Quad-section et bi-section d'un triangle

original. Finalement, le maillage est lissé. L'algorithme complet de raffinement de maillage se présente comme suit :

Algorithme de remaillage

1. Calcul de l'erreur en chaque nœud [20]
2. Elimination des bi-sections du raffinement précédent : les éléments issus d'une bi-section sont refondus en un élément, laissant un nœud pendant
3. Subdivision en quatre des éléments dont tous les nœuds ont une erreur $e > 0.2 \times e_{max}$
4. Boucle jusqu'à stabilité du nombre de nœuds créés
 - Subdivision en quatre des éléments ayant un ou des nœuds avec plus d'un niveau de raffinement de différence : cette passe est introduite pour régulariser le maillage et éviter le bi-section successive du même angle
 - Subdivision en quatre des éléments adhérents à un nœud ayant plus de neuf éléments voisins : cette passe régularise le maillage en éliminant les nœuds avec trop d'éléments
 - Subdivision en quatre des éléments ayant deux côtés subdivisés : nous ne retenons que les quad-sections et les bi-section
5. Bi-section des éléments ayant un nœud pendant
6. Appel d'une sous-routine contenant la description de la frontière, et donc dépendante du problème à traiter, pour replacer sur la frontière les nouveaux nœuds de cette frontière
7. Lissage du maillage par recentrage d'un nœud par rapport à ses voisins
8. Interpolation des valeurs des degrés de liberté et création des nouvelles conditions limites.

Dans le domaine, le raffinement de maillage est un procédé stable, parce qu'il ne peut pas produire d'éléments dégénérés. Par contre, le positionnement des nouveaux nœuds de la frontière dépend de la géométrie du problème. Il doit être fait avec soin, car une simple bi-section des côtés peut produire des éléments qui se recourent.

6. Résultats

Nous présentons dans cette section une validation pour le cas A5 du *GAMM-Workshop*, tant sur un maillage régulier que sur un maillage adapté. Puis nous appliquons à un écoulement supersonique la technique de raffinement de maillage décrite.

6.1. Comparaison pour le cas A5

Cet écoulement transsonique autour d'un profil NACA-0012 à 0° d'angle d'attaque est défini par $Re = 500$, $M = 0.85$, $\gamma = 1.4$ and $Pr = 0.72$. Il a été résolu sur un maillage structuré de 121×41 nœuds, de même que sur un maillage adapté. Partant d'un maillage structuré mais grossier de 31×11 nœuds, nous faisons quatre itérations de raffinement de maillage avec l'erreur calculée sur toutes les variables par [20]. Les conditions limites sont celles du *GAMM-Workshop* (Section 4.2.).

La figure 6 présente le maillage adapté dans la partie supérieure et le maillage structuré 121×41 dans la partie inférieure. Le maillage adapté final compte 3054 nœuds concentrés dans la région du bord d'attaque et de la couche limite. Dans une grande partie du domaine, on retrouve la finesse du maillage 121×41 .

La figure 7 montre le très bon accord entre les deux courbes de C_f . Elle souligne également le travail de l'algorithme de raffinement de maillage, surtout dans la zone du bord d'attaque où le maillage adapté est plus fin que le maillage régulier.

A cause de la symétrie du maillage et de l'écoulement, les coefficients de moment C_M et de portance C_L sont nuls pour les deux simulations. La table 3 rassemble les résultats du coefficient de traînée C_D et de temps CPU, ainsi que deux résultats du *Workshop* ; la concordance est excellente. La différence la plus impressionnante est le temps CPU ; la simulation adaptée a demandé moins de la moitié du temps CPU. Une bonne partie du gain de temps est à

	Nombre de nœuds	C_D	Temps CPU(s) Cray-YMP	$\ \cdot \ _0$
Maillage 121×41	4940	0.223	115	$2.2 \cdot 10^{-7}$
Maillage adapté	3054	0.217	49	$7.2 \cdot 10^{-8}$
Secretan et al. [SDN87]	5152	0.218	-	-
Müller et al. [MBR87]	10595	0.220	-	-

Table 3 : Cas A5 du *GAMM-Workshop*

mettre sur le nombre de nœuds final du maillage adapté qui est inférieur à celui du maillage régulier. L'autre partie vient de la résolution sur des maillages successifs inhérente au raffinement de maillage, où le nouveau maillage profite de la solution du maillage précédant obtenue à moindre coût.

6.2. Un écoulement supersonique

La technique de raffinement de maillage permet également d'adapter le maillage et d'améliorer la solution pour des écoulements supersoniques. Nous l'appliquons pour un profil NACA-0012 à 10° d'angle d'attaque à l'écoulement défini par $Re = 1000$, $M = 2.0$, $\gamma = 1.4$ and $Pr = 0.72$. A notre connaissance, la simulation numérique de cet écoulement donne un résultat laminaire et stationnaire pour les maillages utilisés. L'écoulement présente un choc fort et détaché en amont du bord d'attaque. Nous utilisons les conditions limites du *GAMM-Workshop* (Section 4.2.), de même qu'une viscosité constante sur le domaine.

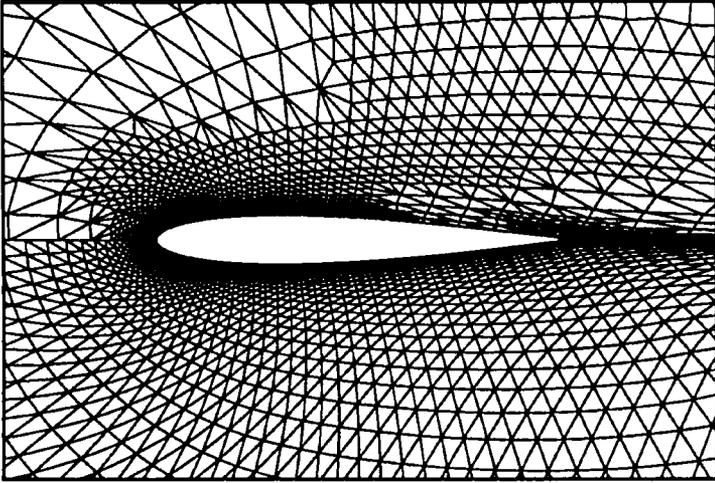


Figure 6 : Cas A5 — Haut : Maillage adapté - Bas : Maillage 121x41

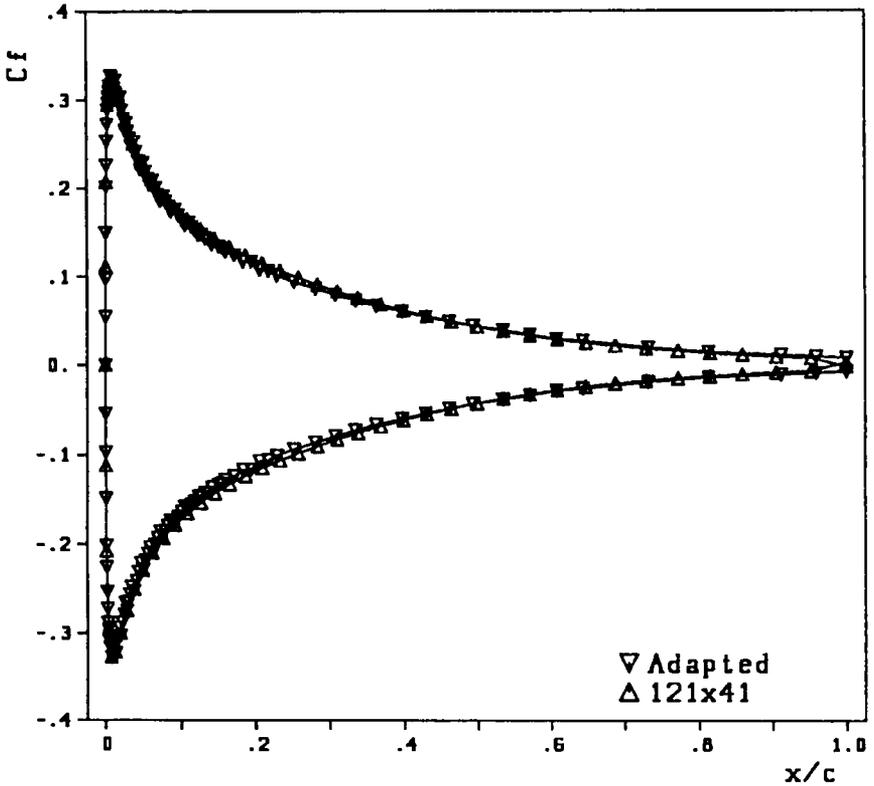


Figure 7 : Cas A5 - Coefficient de friction C_f

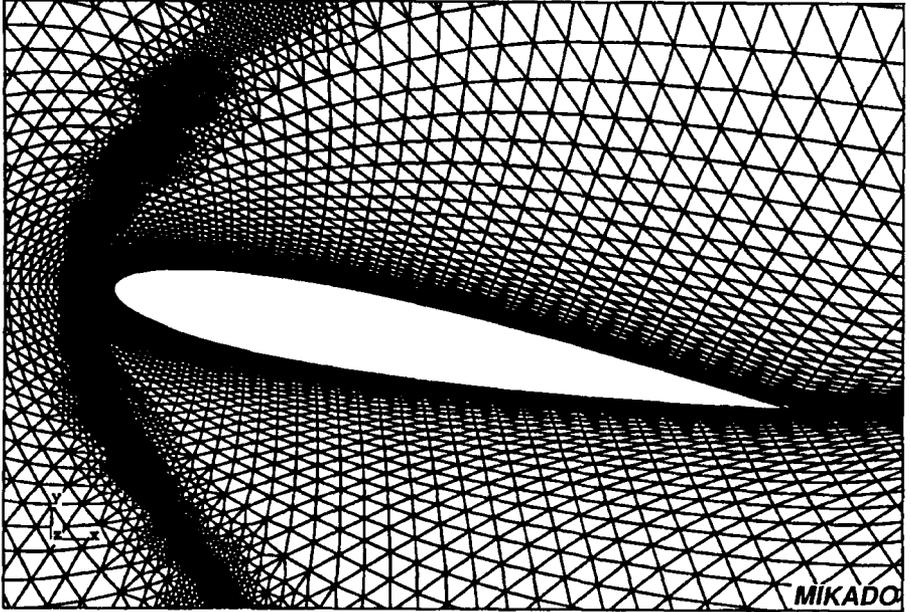


Figure 8 : Ecoulement supersonique – Maillage adapté

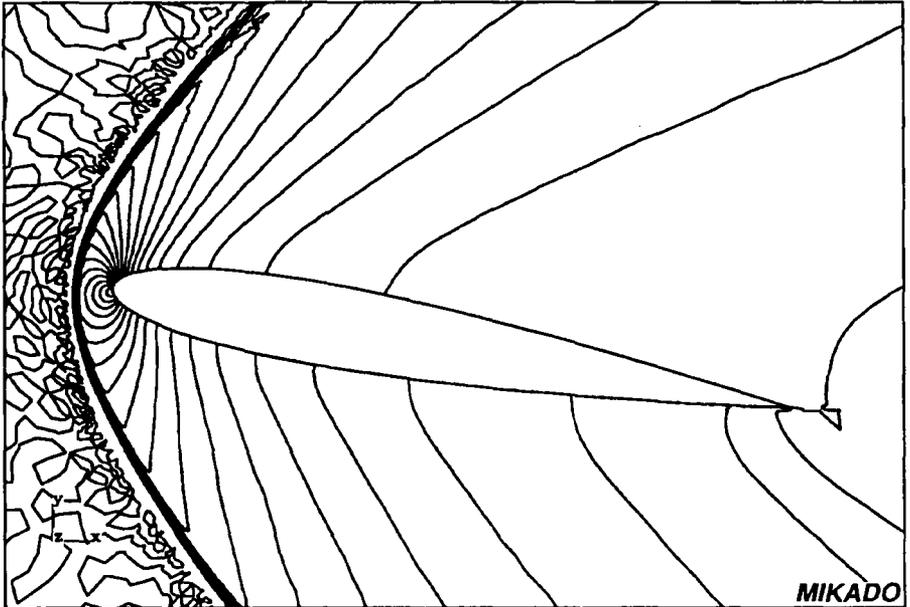


Figure 9 : Ecoulement supersonique – Isobares

La résolution est lancée avec un maillage structuré de 61×21 points qui est trop grossier pour capturer correctement la solution. Suit un raffinement global qui fournit une solution raisonnable, et permet à l'algorithme de raffinement de travailler avec une grande précision. Quatre itérations de raffinement de maillage complètent la simulation. Comme dans le cas précédent, l'erreur est calculée sur toutes les variables.

La figure 8 montre le maillage final. Il compte 11082 nœuds et est bien adapté à l'écoulement. La figure 9 montre les isolignes de la pression adimensionnelle ; la distance entre deux isolignes est de 0.25, le maximum 5.82 et le minimum 0.59. La résolution du choc est excellente. Les oscillations en amont du choc sont caractéristiques des schémas centrés qui manquent de dissipation numérique dans les zones supersoniques.

Cette simulation a demandé 310 s et 1.62 Mmots sur un Cray-YMP. La convergence dans la norme L_2 est de $1.3 \cdot 10^{-7}$. Sur les quatre itérations de raffinement le maximum de l'erreur n'a pu être diminué que de moitié à cause du choc qui se resserre.

7. Conclusion

L'élément triangulaire que nous proposons est simple. Comme tout domaine peut être décrit à l'aide de triangles, nous n'avons qu'un seul type d'élément. Couplé à l'intégration analytique des termes de la forme faible, cela mène à un code très performant et facilement vectorisable [Sec91]. L'algorithme de raffinement de maillage donne au code une grande flexibilité, ne mettant que peu l'accent sur le maillage original, qui doit cependant être suffisamment fin pour permettre au raffinement de travailler correctement. La méthode de résolution GMRES s'est avérée robuste, et le préconditionnement diagonal que nous avons utilisé bien adapté aux cas étudiés. L'élément a été validé avec des cas transsoniques du *GAMM-Workshop* et appliqué à un cas supersonique. Tous ces écoulements sont laminaires et stationnaires.

L'élément est facilement extensible à des écoulements tri-dimensionnels, tenant la simplicité de sa géométrie (tétraèdre linéaire) et de ses approximations

Bibliographie

- [ABF84] D.N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21, 1984.
- [BGPV87] M.O. Bristeau, R. Glowinski, J. Periaux, and H. Viviani, editors. *Numerical Simulation of Compressible Navier-Stokes Flows*. Volume 18 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vieweg, 1987. Proceedings of the GAMM-Workshop (Nice 1985).
- [Bro87] P. N. Brown. A local convergence theory for combined inexact-Newton/finite-difference projection methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24:410–434, 1987.
- [BZGdAO86] I. Babuška, O.C. Zienkiewicz, J. Gago, and E.R. de A. Oliveira, editors. *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*. John Wiley & Sons, 1986.
- [Cam87] L. Cambier. Computation of viscous transonic flows using an unsteady type method and a zonal grid refinement technique. In *Numerical Simulation of Compressible Navier-Stokes Flows*, pages 105–122, Vieweg, 1987.

- [CJ84] T.F. Chan and K.R. Jackson. Nonlinear preconditioned Krylov subspace methods for discrete Newton algorithms. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 5:533-542, 1984.
- [DT84] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis. Collection Université de Compiègne*, Maloine S.A., deuxième édition, 1984.
- [Hir88] Ch. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Volume 1 of *Series in numerical methods in engineering*, John Wiley & Sons, 1988.
- [LMZ86] R. Löhner, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz. Adaptive grid refinement for the compressible Euler equations. In *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, pages 281-297, John Wiley & Sons, 1986.
- [MBR87] B. Müller, T. Berglind, and A. Rizzi. Implicit central difference simulation of compressible Navier-Stokes flow over a NACA-0012 airfoil. In *Numerical Simulation of Compressible Navier-Stokes Flows*, pages 183-200, Vieweg, 1987.
- [ODSD86] J.T. Oden, L. Demkowicz, T. Stouboulis, and P. Devloo. Adaptive methods for problems in solid and fluid mechanics. In *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, pages 249-280, John Wiley & Sons, 1986.
- [PD86] B. Palmerio and A. Dervieux. Application of a FEM moving node adaptive method to accurate shock capturing. In *Numerical Grid Generation in CFD*, pages 425-436, 1986.
- [SDN87] Y. Secretan, G. Dhatt, and D. Nguyen. Compressible viscous flow around a NACA-0012 airfoil. In *Numerical Simulation of Compressible Navier-Stokes Flows*, pages 219-236, Vieweg, 1987.
- [Sec86] Y. Secretan. *Modélisation par éléments finis des équations de Navier-Stokes compressibles appliquées aux écoulements externes*. Master's thesis, Université Laval, Québec, Canada, 1986.
- [Sec91] Y. Secretan. *Contribution à la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles par la méthode des éléments finis adaptatifs ; Développement d'un élément simple*. PhD thesis, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, Switzerland, 1991.
- [SS86] Y. Saad and M. Schultz. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:856-869, 1986.
- [ZLMP85] O. C. Zienkiewicz, R. Löhner, K. Morgan, and J. Peraire. High-speed compressible flow and other advection-dominated problems of fluid dynamics. *Finite Elements in Fluids*, 6:41-88, 1985.

Yves SECRETAN

Article soumis en janvier 1992

Publication recommandée par M. Fortin et D. Pelletier